UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA

Faculté des Sciences et Sciences de l'ingénieur

DEPARTEMENT DE :
MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

N° d'ordre :
N° de série :

# MAGISTER

**Spécialité :** Mathématiques
**Option :** Analyse numérique et E. D. P

**Par :** **MILOUDI Madjda**

## Thème

# Analyse asymptotique des coques minces non linéairement élastiques

**Soutenu publiquement le :** 01/03/2006

Devant le jury composé de M M :

| | | |
|---|---|---|
| **N. SETTOU** | M. C à l'université de KASDI MERBAH - Ouargla : | **Président** |
| **H. MEKIAS** | Pr. à l'université de FERHAT Abbas - Sétif: | **Examinateur** |
| **B. BENYETTOU** | M. C à l'université de THLEDJI AMAR - Laghouat: | **Examinateur** |
| **M. S. SAID** | M. C à l'université de KASDI MERBAH - Ouargla : | **Examinateur** |
| **D. A. CHACHA** | M. C à l'université de KASDI MERBAH - Ouargla : | **Rapporteur** |

# Remerciements

Ce travail a été réalisé à l'université de KASDI Merbah Ouargla sous la direction de Mr. D. A. Chacha maître de conférence à la faculté des sciences et sciences de l'ingénieur de l'université de KASDI Merbah Ouargla.

J'exprime mes plus sincères remerciements à Mr. D. A. Chacha qui a assuré la direction de ce travail. Qu'il trouve ici toute ma reconnaissance pour ses conseils et ses aides. Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à Mr. N. Settou, maître de conférence à la faculté des sciences et sciences de l'ingénieur de l'université de KASDI Merbah Ouargla pour m'avoir fait l'honneur d'accepter la présidence du jury et à Mr. H. Mekias professeur à l'université de FERHAT Abbas Sétif, qui m'a fait le très grand honneur d'examiner mon travail. Je voudrai adresser mes remerciements les plus respectueux à Mr. B. Benyettou maître de conférence à l'université de THLEDJI Amar Laghouat d'avoir accepté et examiné ce mémoire et dont l'honneur profondément. Je remercie infiniment Mr. M. S. SAID maître de conférence à la faculté des sciences et sciences de l'ingénieur de l'université de KASDI Merbah Ouargla d'accepter d'être un membre du jury.

je ne manquerai pas de remercier tous les enseignants de Mathématique à la faculté des sciences et sciences de l'ingénieur de l'université de KASDI Merbah Ouargla, surtout Mr. M. Acila, Mr. M. Meflah et Mr. N. Hermasse.

Je tiens également à remercier sincèrement:

-Mes collègues de post-graduation: Ben Ali, Merabet, Ben Saih, Ben Moussa, Haj Amar, Gamam, Doudi, Ben Addi.

-Toutes mes amies : Teldja, Nassima, Belseme, Safia.

Enfin, j'adresse mes remerciements à toute personne qui, de près ou de loin, à contribué à la réalisation de ce travail.

**The Elements of Theses**

by

Perry H. Disdainful

B.A.(University of Northern South Dakota at Hoople) 1978
M.S. (Ed's School of Quantum Mechanics and Muffler Repair Shop) 1989

A dissertation submitted in partial satisfaction of the
requirements for the degree of
Doctor of Philosophy

in

Aboriginal Basketry

in the

GRADUATE DIVISION
of the
UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY

Committee in charge:
Professor Ignatius Arrogant, Chair
Professor Ivory Insular
Professor General Reference

Spring 2002

The dissertation of Perry H. Disdainful is approved:

Chair Date

Date

Date

University of California, Berkeley

Spring 2002

**The Elements of Theses**

# **Résumé**

The Elements of Theses

by

Perry H. Disdainful

Doctor of Philosophy in Aboriginal Basketry

University of California, Berkeley

Professor Ignatius Arrogant, Chair

Theses have elements. Isn't that nice ?

Professor Ignatius Arrogant
Dissertation Committee Chair

To myself,

Perry H. Disdainful,

the only person worthy of my company.

# Table des matières

## 0.1 Introduction Générale

L'utilisation de plus en plus fréquente de structures de faible épaisseur en comparaison avec les deux autres dimensions, telles que les toitures futuristes, les carrosseries d'automobile, les fuselages d'avion, nécessite une étude approfondie de leur comportement mécanique. Le coût important des essais, comme les crash test pour les automobiles, conduit les concepteurs à utiliser des outils de simulation. La faible épaisseur de ces structures est prise en compte par une modélisation bidimensionnelle qui simplifie de manière importante les équations. Signalons que des simulations numériques menées directement sur des modèles tridimensionnels conduisent à des phénomènes de verrouillage numérique.

Les méthodes numériques utilisées pour résoudre des problèmes de corps élastiques "tridimensionnels" minces (c'est à dire dont l'épaisseur est "petite" par rapport à ses autres longueurs caractéristiques) peuvent échouer, par exemple, en raison d'un phénomène de verrouillage numérique qui apparaît lorsque l'on traite des structures de faible épaisseur. C'est donc de façon naturelle que des modèles bidimensionnels posés sur la surface moyenne du corps ont été développés. Ces modèles présentent par ailleurs l'avantage de diminuer le temps de calcul de l'ordinateur, puisque au lieu de modéliser un corps tridimensionnel on modélise un corps en deux dimensions, mais l'ordre des problèmes est plus élevé. Nous nous intéressons ici plus particulièrement aux coques constituées de matériaux non linéairement élastiques non homogènes et anisotropes.

Une autre façon de modéliser est d'utiliser une procédure asymptotique. Une coque, aussi mince soit-elle, est un corps tridimensionnel. On peut cependant chercher à obtenir par une procédure asymptotique un problème posé sur une surface, lorsque l'épaisseur tend vers zéro.

Dans ce travail, on effectue l'analyse asymptotique d'un modèle tridimensionnel de coques non linéairement élastiques, constituées d'un matériau non homogène et anisotrope. On choisit le couple composé du champ de déplacement et le tenseur des contraintes de la coque comme inconnues du problème, et on applique la méthode des développements asymptotiques formels, avec l'épaisseur de la coque comme petit paramètre. En faisant des hypothèses sur les forces appliquées et selon les propriétés de la variété associée des déplacements inextensionnels admissibles, on obtient les modèles bidimensionnels non linéaires membranaires et couplé flexion-membrane et la loi de comportement limite. D'une autre façon, on choisit la déformation de la coque comme inconnue du problème de minimisation de la fonctionnelle de l'énergie, et on applique la méthode des développements asymptotiques formels, avec l'épaisseur de la coque comme petit paramètre et en faisant des hypothèses sur les forces appliquées, on obtient le modèle bidimensionnel non linéaire de coques membranaires.

Le travail présenté dans ce mémoire est divisé en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on se propose des rappels de l'élasticité tridimensionnelle, l'objet de ce chapitre est l'étude des propriétés géométriques des déformations de $\mathbb{R}^3$, et l'établissement des équations d'équilibre (Ciarlet P. G. [5]), on pose ces équations sur la configuration de référence en terme de la variable de Lagrange, les inconnues de ces équations sont neuf, elles ne peuvent être déterminées à partir des trois équations, d'après les lois de comportement d'un matériau élastique, le problème devient un problème bien posé (Ciarlet P. G. & Rabier P. [10]). C'est un système de trois équations aux dérivées partielles "fortement non linéaire" posées sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$, associées à des conditions aux limites. On donne aussi la formulation variationnelle mixte de Heillinger-Reissner de ce problème et des résultats d'existence du problème variationnel non linéaire dans un cas particulier.

On considère un corps élastique de petite épaisseur $2\varepsilon$ dont la forme, dans son état naturel (état non déformé), est proche d'une surface $S$, s'appelle coque élastique mince constituée d'un matériau non homogène et anisotrope, encastré sur une partie de sa frontière et soumise à des forces de volume et de surface, et $S$ s'appelle la surface moyenne de la coque, on définie la base covariante et la base contravariante associée, le tenseur métrique et le tenseur de courbure et les symbole de Christoffel sur la surface moyenne et sur la coque. Le problème variationnel mixte de Heillinger-Reissner donné sur cette coque (l'inconnue du problème est le champ de déplacement et le tenseur des contraintes) en coordonnées cartésiennes, étant mal adapté à l'étude des coques, alors en réécrit le problème variationnel en coordonnées curvilignes qui suivent de façon plus naturelle la "géométrie" de la coque.

Le deuxième chapitre est consacré à l'obtention par l'analyse asymptotique des modèles bidimensionnels "membranaire" et "couplé flexion-membrane" pour des coques élastiques minces.

On considère une coque élastique mince d'épaisseur $2\varepsilon$ ($\varepsilon$ est un paramètre assez petit comparé aux autres longueurs caractéristiques de la coque), de surface moyenne $S$ ($S = \theta\left(\overline{\omega}\right)$, $\omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\theta \in C^3\left(\omega, \mathbb{R}^3\right)$), constituée d'un matériau élastique non homogène et anisotrope, la coque soumise à des forces de volume et de surface. Le problème variationnel donné sur cette coque en coordonnées curvilignes posé sur un ouvert dépendant de $\varepsilon$.

L'objectif de l'analyse asymptotique est de connaître le comportement de la solution lorsque $\varepsilon$ tend vers zéro. Pour cela, il est important de poser le problème sur un domaine indépendant de $\varepsilon$, on associe à toute fonction, une fonction "mise à l'échelle" sur le domaine fixe. On suppose ensuite que le champ de déplacement "mis à l'échelle" et le tenseur des contraintes "mis à l'échelle" admettent des développements asymptotiques qui commencent par l'ordre zéro, et on donne les développements asymptotiques des données liées à la géométrie autour de la surface moyenne de la coque.

Pour passer au modèle limite, on a besoin des données liées à la géométrie de la surface moyenne de la coque, on démontre toujours que le premier terme d'ordre zéro du développement asymptotique du champ de déplacement "mis à l'échelle" est indépendant de la troisième composante. Pour des coques membranaires , les forces appliquées de volume sont d'ordre zéro, les forces appliquées de surface sont d'ordre 1 et l'ensemble de déplacements inextensionnels est réduit à $\{0\}$, on obtient que le premier terme du développement asymptotique du champ de déplacement vérifie le problème variationnel membranaire et la loi de comportement limite (proposition 14). Si le matériau est homogène et isotrope, on obtient le même problème membranaire et la loi de comportement limite que Miara B. [13]. On donne ensuite un autre modèle membranaire (proposition 15), si le matériau est homogène et isotrope on obtient le même résultat donné par Christophe C. [4].

Lorsque l'ensemble des déplacements inextensionnels n'est pas réduit à $\{0\}$, que les forces appliquées de volume sont d'ordre 2 et que les forces appliquées de surface sont d'ordre 3, on montre que le couple composé du premier terme et le deuxième terme du développement asymptotique du champ de déplacement vérifie le problème variationnel couplé flexion-membrane (proposition 20) et donne la loi de comportement limite. Si le matériau est homogène et isotrope Lods V. & Miara B. [12] ont montrés que le couple composé du premier terme et le deuxième terme du développement asymptotique du champ de déplacement vérifie le problème variationnel en flexion, et Christophe C. [4] a donné la loi de comportement limite du problème en flexion et. Ciarlet P. G. & Daniel C. [7] ont montrés l'existence de la solution du problème en flexion.

En linéarisant les modèles précédents, on retrouve les modèles bidimensionnels de l'élasticité linéarisée, les modèles bidimensionnels membranaires et couplé flexion-membrane linéaires et les lois de comportements limites et les résultats de convergence qui se trouvent dans Patrick G. [15]. Si le matériau est homogène et isotrope on donne aussi les modèles bidimensionnels membranaires et en flexion linéaires et les lois de comportements limites.

Le troisième chapitre est consacré à l'obtention par l'analyse asymptotique de l'énergie bidimensionnelle d'une coque membranaire.

On donne la formulation du problème tridimensionnel sur une coque élastique mince, constituée d'un matériau non homogène et anisotrope, soumise à des forces mortes volumiques et à des forces mortes surfaciques sur ses faces supérieure et inférieure. A chaque déformation de la coque, on associe la fonctionnelle d'énergie, elle est la différence entre l'énergie interne et le travail des forces extérieures, le travail des forces extérieures s'exprime également sous une forme intégrale sur la configuration de référence.Un état d'équilibre est alors décrit comme un minimiseur sur un espace de déformations admissibles de la fonctionnelle d'énergie. Le problème est donné en coordonnées cartésiennes, il est mal adapté à l'étude des coques, alors on réécrit le problème variationnel en coordonnées curvilignes.

On applique la méthode des développements asymptotiques formels, avec l'épaisseur de la coque comme petit paramètre, cette méthode à été utilisée dans Pantz O. [14] pour les plaques élastiques minces. On pose le problème sur un domaine indépendant de l'épaisseur, on associe a toute fonction, une fonction "mise à l'échelle" sur le domaine fixe. On suppose ensuite que les données liées à la géométrie admettent un développement limité autour de la surface moyenne de la coque, et que la déformation "mise à l'échelle" admet un développement asymptotique qui commence par l'ordre zéro.On trouve le modèle bidimensionnel de coques membranaires.

## 0.2 Principales notations et définitions

On utilise les conventions de notations suivantes : les indices ou exposants latins prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ tandis que les indices grecs prennent, à l'exception de $\varepsilon$, leurs valeurs dans l'ensemble $\{1, 2\}$. La convention de sommation par rapport aux indices et exposants répétés est adaptée.

: le produit tensoriel

$D(\Omega)$ : l'espace des fonctions tests

$\wedge$ : le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$.

. : le produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$.

$\circ$ : composition de deux fonctions.

$I_3$ : la matrice unitaire d'ordre 3.

$I_d$ : l'application identité.

$\delta_{ij}$ : le symbole de Kroneker $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$.

$\|.\|$ : la norme euclidientte de $\mathbb{R}^3$.

$\mathbb{N}$ : l'ensemble des nombres naturels.

$M_3^+$ : ensemble des matrices d'ordre trois de déterminant strictement positif.

$\Omega$ : domaine (ouvert borné connexe de frontière Lipschitzienne) de $\mathbb{R}^3$.

$(O, e_1, e_2, e_3)$ : repère orthonormé direct de $\mathbb{R}^3$.

$(x_1, x_2, x_3)$ : coordonnées cartésiennes d'un point $x$ de $\Omega$.

$\sigma$ : second tenseur (d'ordre 2) des contraintes de Piola-Kirchhoff.

$E$ : tenseur des déformations de Green-Lagrange $E(u) = \frac{1}{2}\left(\nabla u + \nabla u^T + \nabla u.\nabla u^T\right)$.

$F^T, F^{-T}$, $\det F$, cof $F$ : transposé, l'inverse de transposé, déterminant de $F$, matrice des cofacteurs.

$A = (A_{ijkl})\,, S = (S_{ijkl})$ : tenseur d'ordre 4 de rigidité, de souplesse.

$\omega$ : domaine (ouvert borné connexe de frontière Lipschitzienne) de $\mathbb{R}^2$.

$S$ : la surface moyenne de $\Omega$.

$(a_1, a_2, a_3)$ : (resp. $\left(a^1, a^2, a^3\right)$)base covariante (resp. contravariante) associée à la surface moyenne $S$.

$(g_1, g_2, g_3)$ : (resp. $\left(g^1, g^2, g^3\right)$)base covariante (resp. contravariante) associée à $\Omega$.

$a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$ : composantes covariantes du tenseur métrique et du tenseur de courbure associées à $S$.

$g_{ij}$ : (resp. $g^{ij}$) composantes covariantes (resp. contravariante) du tenseur métrique associées à $\Omega$.

$\Gamma^{\rho *}_{\alpha\beta}$ : symboles de Christoffel bidimensionnels.

$\Gamma^k_{ij}$ : symboles de Christoffel tridimensionnels.

$v_{i\|j} = \partial_j v_i - \Gamma^k_{ij} v_k$ : dérivée covariante de $v$.

$div$ : opérateur de divergence.

$\nabla$ : opérateur de gradient.

$\partial_N$ : la dérivée normale extérieure, $(\partial_N = \nabla.N)$.

$C_c(\Omega)$ : fonctions continues à support compact dans $\Omega$.

$C^k(\Omega)$ : fonctions $k$ fois continûment différentiables sur $\Omega$.

$C^k_c(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)\,.$

$C^\infty(\Omega) = \cap_{k\,\geq 0} C^k(\Omega)\,.$

$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ mésurable et telle que } \left( \int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\} (p \in [1, \infty[)$.

$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ mésurable et telle que } \exists C > 0 \text{ tel que } |f(x)| < C \text{ p.p. sur } \Omega \}$.

$W^{m,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega); \text{ tel que } D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m \} (p \in [1, \infty])$.

$\|\|_{m,p,\Omega}$ : la norme dans l'espace $W^{m,p}(\Omega)$, $m \geq 1$, $p \in [0, \infty]$ .

$W_0^{m,p}(\Omega)$ : la fermeture de $C_c^m(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$, $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$.

# Chapitre 1

# ÉLASTICITÉ NON LINÉAIRE SUR UNE COQUE MINCE

## 1.1 Introduction

Ce chapitre comprend trois sections. La première section contient des rappels de l'élasticité tridimensionnelle, l'objet de cette section est l'établissement du modèle mathématique de l'élasticité tridimensionnelle (les équations d'équilibres, Ciarlet P. G. [5]), d'après les lois de comportement d'un matériau élastique, le problème devient un problème bien posé (voir Ciarlet P. G. & Rabier P. [10]). C'est un système de trois équations aux dérivées partielles "fortement non linéaire" posées sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$, associées à des conditions aux limites et dans la deuxième section on trouve le problème variationnel de ce système.

Dans la troisième section, on considère un corps élastique de petite épaisseur $2\varepsilon$ dont la forme, dans son état naturel (état non déformé), est proche d'une surface $S$, s'appelle coque élastique mince, encastré sur une partie de sa frontière et soumise à des forces de volume et de surface. Le problème variationnel de l'élasticité tridimensionnelle donné sur cette coque (l'inconnue du problème est le champ de déplacement et le tenseur des contraintes), en coordonnées cartésiennes, étant mal adapté à l'étude des coques, alors on réécrit le problème variationnel en coordonnées curvilignes.

## 1.2 Élasticité tridimensionnelle

Soit $\Omega$ un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^3$ de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ suffisamment régulière et soit $\overline{\Omega}$ l'adhérence de $\Omega$ dans $\mathbb{R}^3$. Dans toute la suite, l'ensemble $\overline{\Omega}$ représentera le volume occupé par un solide "non déformé" et sera appelé configuration de référence. Nous noterons $x$ un point courant de l'ensemble $\overline{\Omega}$, de composantes $x_i$ dans la base canonique $\{e_i\}$ de $\mathbb{R}^3$, et $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ la dérivée partielle par rapport à la variable $x_i$.

La structure est encastrée sur une partie de sa frontière $\Gamma_0 \subset \Gamma$ de $d\Omega$ -mesure non nulle et est soumise à une distribution surfacique de force $h$ sur $\Gamma_1$ de telle sorte que $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$, et de densité de force volumique $f$.

Nous appellerons déformation de la configuration de référence une application $\varphi$ : $\overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ suffisamment régulière, injective, et préservant l'orientation, c'est à dire vérifiant (voir Ciarlet P. G. [5]) :

$$\det \ \nabla\varphi\,(x) > 0, \ \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{1.1}$$

A toute déformation $\varphi$, nous associons un déplacement $u$, qui est le champ de vecteurs $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ défini par la relation :

$$\varphi = I_d + u. \tag{1.2}$$

L'ensemble $\overline{\Omega^{\varphi}} = \varphi\left(\overline{\Omega}\right)$ est appelé configuration déformé, sa frontière $\Gamma^{\varphi} = \varphi\left(\Gamma\right)$, et notons $F : \overline{\Omega} \rightarrow M_3^+$ le gradient de la déformation $\varphi$, $F = \nabla\varphi = I_3 + \nabla u$.

Si $\varphi$ est une déformation dérivable au point $x \in \overline{\Omega}$, le tenseur des déformations de Cauchy-Green à droite $C = \nabla\varphi^T.\nabla\varphi$, apparaît en formant la quantité :

$$|\varphi(x+\delta x) - \varphi(x)|^2 = \delta x^T \nabla\varphi^T(x)\nabla\varphi(x)\delta x + o(|\delta x|^2), x, x+\delta x \in \overline{\Omega}, \tag{1.3}$$

il joue un rôle fondamental en théorie de l'élasticité.

On dit que $\varphi$ est une déformation rigide, si $\nabla\varphi\left(x\right) = Q$, $\forall x \in \overline{\Omega}$, telle que $Q$ est une matrice orthogonale et $\det Q > 0$, on a alors $C = I_3$ dans $\overline{\Omega}$ (théorème1.1.2, Ciarlet P. G. [5]) .

Introduisons enfin le tenseur des déformations de Green- Saint-Venant $E$ (voir Ciarlet P. G. & Rabier P. [10])

$$E\left(u\right) = \frac{1}{2}(C - I_3) = \frac{1}{2}\left(\nabla u + \nabla u^T + \nabla u.\nabla u^T\right), \tag{1.4}$$

mésurant l'écart entre une déformation donnée et une déformation rigide. Le tenseur $E$ est symétrique $E_{ij} = E_{ji}$.

**Remarque 1 :** Dans le tenseur des déformations apparaît une partie linéaire (par rapport au déplacement $u$) et une partie non linéaire. La partie linéaire :

$$e_{ij}\left(u\right) = \frac{1}{2}\left(\partial_i u_j + \partial_j u_i\right), \tag{1.5}$$

est appelée tenseur linéarisé des déformations et intervient dans la théorie linéaire de l'élasticité (dans le cadre des petites déformations).

Nous supposons que le corps occupant une configuration déformée $\overline{\Omega^{\varphi}}$ est soumis à deux types de forces appliquées, forces appliquées de volume, correspondant à un champ de vecteurs $f^\varphi : \Omega^\varphi \to \mathbb{R}^3$ et forces appliquées de surfaces définies sur une portion $\Gamma_1^\varphi = \varphi(\Gamma_1)$ de la frontière $\Gamma^\varphi$ , correspondant à un champ de vecteurs $h^\varphi : \Gamma_1^\varphi \to \mathbb{R}^3$.

L'axiome de l'équilibre statique qui dit que la configuration $\varphi(\Omega)$ étant une configuration d'équilibre pour le solide, assure l'existence d'un tenseur des contraintes symétrique $\sigma^\varphi$ appelé le tenseur de Cauchy (théorème 1.2.1, Ciarlet P. G. [5]) vérifiant à l'équilibre le système d'équations aux dérivées partielles suivant (voir Ciarlet P. G. [5]) :

$$\left\{ \begin{array}{c} -div^\varphi \sigma^\varphi = f^\varphi \text{ dans } \Omega^\varphi \\ (\sigma^\varphi)^T = \sigma^\varphi \text{ dans } \Omega^\varphi \\ \sigma^\varphi . n^\varphi = h^\varphi \text{ sur } \Gamma_1^\varphi \end{array} \right. , \tag{1.6}$$

$n^\varphi$ désigne la normale unitaire extérieure à $\Gamma_1^\varphi$.

Les relations précédentes, établies sur la configuration déformée $\Omega^\varphi$ en terme de la variable d'Euler $x^\varphi$, ne sont pas utilisables pour le calcul de la déformation $\varphi$ . (Ciarlet P. G. [5]). Pour remédier à cela, il est d'usage de transporter ces relations sur la configuration de référence en terme de la variable de Lagrange $x$, le système (1.6) devient (théorème 1.2.3, Ciarlet P. G. [5]) :

$$\left\{ \begin{array}{c} -div\left(\sigma . F^T\right) = f \text{ dans } \Omega \\ \sigma = \sigma^T \text{ sur } \Omega \\ \sigma . F^T . n = h \text{ sur } \Gamma_1 \end{array} \right. , \tag{1.7}$$

lorsque $n$ désigne la normale unitaire extérieure à $\Gamma_1$ , tel que : $\Gamma_1 = \Gamma - \Gamma_0$ .

Le tenseur $\sigma$, symétrique, défini par la relation $\sigma = \det F . F^{-1} \sigma^\varphi F^{-T}$, est appelé le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, et $f \; dx = f^\varphi \; dx^\varphi$ et $h \; da = h^\varphi \; da^\varphi$, où : $dx^{\varphi}$ représente l'élément de volume au point $x^{\varphi} = \varphi(x)$ est donnée par :

$$dx^{\varphi} = \det F(x) \ dx \tag{1.8}$$

tels que, $dx$ est l'élément de volume au point $x$ de la configuration de référence et $da$, $da^{\varphi}$ désignent les éléments d'aire aux points $x \in \Gamma$ et $x^{\varphi} = \varphi(x) \in \Gamma^{\varphi}$, de normales extérieures unitaires respectives $n$ et $n^{\varphi}$. On obtient alors $f = \det F.\ f^{\varphi}$ et $h = \det F.\ h^{\varphi}$ $\|F^{-T}.n\|$, $f$ et $h$ dépendent à priori de la déformation $\varphi$, l'inconnue du problème, alors la résolution mathématique des équations d'équilibre dans la configuration de référence peut être compliquées. C'est donc dans un but de simplification que nous introduisons les définitions suivantes : une force appliquée de volume est une force morte si la densité $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ associée de volume de la configuration de référence est indépendante de la déformation considérée (voir Ciarlet P. G. [5]). C'est le cas par exemple du champ de gravité pour lequel :

$$f\ (x) = -\rho(x)\ g\ e_3, x \in \Omega,$$

$\rho(x)$ est la masse volumique au point $x$. De la même manière, une force appliquée de surface est une force morte si la densité $h$ associée de surface de la configuration de référence est indépendante de la déformation $\varphi$ considérée.

**Remarque 2 :** Les équations d'équilibre sont déduites des principes mécaniques généraux ne faisant pas intervenir la nature du matériau.

Les équations d'équilibre dans la configuration de référence $\Omega$ constituent un problème aux limites dont les inconnues sont les six composantes du tenseur symétrique des contraintes $\sigma$ et les trois composantes du déplacement $u$, neuf inconnues ne peuvent être déterminées à partir de trois équations.

Afin que le problème mathématique soit correctement posé, il faut fournir aux équations d'équilibre six relations supplémentaires. C'est l'objet des lois de comportement.

### 1.2.1 Lois de comportement des matériaux élastiques

Les lois de comportement expriment les relations qui existent entre le second tenseur de Piola-Kirchhoff $\sigma$ et le tenseur des déformations de Green Saint-Venant $E$, ces relations dépendent de la nature du matériau.

On suppose dans toute la suite que l'ensemble $\overline{\Omega}$ dans la configuration de référence est occupé par un matériau élastique.

**Définition 3 :** On dit qu'un matériau est élastique si en tout point $x \in \overline{\Omega}$ , le second tenseur de Piola-Kirchhoff $\sigma$ est une fonction de $x$ et du tenseur des déformations de Green Saint-Venant $E$.

En première approximation, on peut chercher des lois de comportement dans lesquelles la relation entre $\sigma$ et $E$ est linéaire (voir Ciarlet P. G. & Rabier P. [10]) :

$$\sigma(x) = A(x) : E(u), \forall x \in \Omega, \tag{1.9}$$

où $A$ désigne le tenseur d'ordre 4 de rigidité du matériau. Son inverse est le tenseur de souplesse $S$. Pour les matériaux homogènes et isotropes le tenseur $A$ indépendant de $x$ , ses composantes sont :

$$A_{ijkl} = \lambda\ \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\ \left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right), \tag{1.10}$$

les constantes $\lambda$ et $\mu$, caractéristiques du matériau sont les coefficients de Lamé, $\lambda > 0$, $\mu > 0$,telles que :

$$\lambda = \frac{E\ \upsilon}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)};\ \mu = \frac{E}{2(1+\upsilon)}, \tag{1.11}$$

où les constantes $E$ (module de Young) et $\upsilon$ (coefficient de Poisson) vérifient les inégalités :

$$E > 0,\ 0 < \upsilon < \frac{1}{2}. \tag{1.12}$$

La relation (1.9) s'écrit alors sous la forme :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\ E_{ij}\,(u) + \lambda\ E_{pp}\,(u)\,\delta_{ij}, \tag{1.13}$$

si l'on inverse les relations (1.13), on obtient :

$$E_{ij}\,(u) = \left(\frac{1+\upsilon}{E}\right)\ \sigma_{ij} - \frac{\upsilon}{E}\sigma_{pp}\delta_{ij} \tag{1.14}$$

Nous adapterons la notation :

$$\sigma = A^{-1}E\,(u)\,;\ E\,(u) = A\sigma,$$

où $A$ représente l'opérateur linéaire (sur les tenseurs symétriques) :

$$(AX)_{ij} = \left(\frac{1+\upsilon}{E}\right)\ X_{ij} - \frac{\upsilon}{E}\ X_{pp}\ \delta_{ij}, \tag{1.15}$$

et $A^{-1}$ son inverse :

$$\left(A^{-1}Y\right)_{ij} = 2\mu\ Y_{ij}\,(u) + \lambda Y_{pp}\,(u)\ \ \delta_{ij}, \tag{1.16}$$

$X$ et $Y$ étant des tenseurs symétriques.

## 1.3 Problème variationnel en coordonnées cartésiennes

Soit $\Omega$ un domaine de $\mathbb{R}^3$, de frontière Lipschitzienne $\Gamma$. On considère un corps élastique, encastré sur une partie de sa frontière $\Gamma_0 \subset \Gamma$, dont la configuration de référence est $\overline{\Omega}$. Il est soumis à des forces de volume $f = (f_i) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ et à des forces de surface $h = (h_i) : \Gamma_1 \to \mathbb{R}^3, \Gamma_1 = \Gamma \backslash \Gamma_0$, qui engendrent un champ de déplacement

$$u = (u_i) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3.$$

Le champ de déformation associée est alors défini par

$$\varphi(u) = I_d + u.$$

En notant $\sigma$ le second tenseur de Piola-Kirchhoff et $E$ le tenseur des déformations de Green Saint-Venant. Alors les équations d'équilibre s'écrivent (voir Ciarlet P. G. & Rabier P. [10]) :

$$\left\{ \begin{array}{c} -\partial_j (\sigma_{ij} + \sigma_{kj}\partial_k u_i) = f_i \text{ dans } \Omega \\ (S : \sigma)_{ij} = E_{ij}(u) \text{ dans } \Omega \\ (\sigma_{ij} + \sigma_{kj}\partial_k u_i) n_j = h_i \text{ sur } \Gamma_1 \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \end{array} \right. , \tag{1.17}$$

où $n$ est la normale unitaire extérieure à la surface $\Gamma$.

Dans la suite, on suppose que le corps élastique est constitué d'un matériau non homogène anisotrope, c'est à dire que le second tenseur de Piola-Kirchhoff est relié au tenseur des déformations de Green Saint-Venant par les lois de comportement

$$\sigma = A(x) : E(u), \forall x \in \Omega,$$

que l'on peut également écrire composante par composante :

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}(x) E_{kl}(u), \forall x \in \Omega, \tag{1.18}$$

où $A = (A_{ijkl})$ est le tenseur du $4^{ème}$ ordre de rigidité du matériau, son inverse est le tenseur $S$ de souplesse.

**Lemme 4 :** La formulation mixte de Heillinger-Reissner du problème (1.17) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\sigma, u) \in \Sigma \times V \\ \int_\Omega S_{ijkl}\sigma_{kl}\tau_{ij}dx = \int_\Omega E_{ij}(u)\,\tau_{ij}dx, \forall\tau \in \Sigma \\ \int_\Omega (\sigma_{ij} + \sigma_{kj}\partial_k u_i)\,\partial_j v_i dx = \int_\Omega f_i v_i dx + \int_{\Gamma_1} h_i v_i da, \forall v \in V \end{cases}, \tag{1.19}$$

les espaces $\Sigma$ et $V$ étant définie par :

$$\begin{cases} \Sigma = \left\{\tau = (\tau_{ij}) \in \left(L^2(\Omega)\right)^9 ; \tau_{ij} = \tau_{ji}\right\} \\ V = \left\{v = (v_i) \in \left(W^{1,4}(\Omega)\right)^3 ; v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\right\} \end{cases}. \tag{1.20}$$

**Preuve :** Il est immédiat que la première équation du problème (1.19) est équivaut à la relation (2) du problème (1.17). Après une simple intégration par partie de la relation (1) et l'utilisation des relations (3) et (4) du problème (1.17), on obtient la deuxième équation du problème (1.19). ■

Nous allons donner des résultats d'existence pour le problème non linéaire tridimensionnel précédent dans un cas particulier.

**Théorème 5 :** *On suppose que $\Gamma_0 = \Gamma$ (et que $\Gamma$ est "assez régulière que nécessaire"), auquel cas l'espace $V$ est l'espace $\left(W_0^{1,4}(\Omega)\right)^3$. Pour $p > 3$, il existe un voisinage $F$ de $0$ dans $(L^p(\Omega))^3$ et il existe un voisinage $U$ de $0$ dans $\left(W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)\right)^3$ tels que pour tout $f = (f_i)_{i=1}^3 \in F$, il existe une et une seule solution du problème $(\sigma, u) \in \Sigma \times U$.*

**Preuve :** Nous allons nous ramener à un problème dont le seul inconnu est le déplacement $u$, c'est -à-dire procéder d'abord à l'élimination des inconnues $\sigma = (\sigma_{ij})$. Pour cela, nous utiliserons la relation (1.13) liant les tenseurs $\sigma$ et $E(u)$ en conservant toutefois l'écriture primitive (1.9) ici plus pratique, soit :

$$\sigma_{ij} = \left(A^{-1}E(u)\right)_{ij} = A_{ijkl}\; E_{kl}(u), \tag{1.21}$$

où $A^{-1}$ est défini par (1.16) ; les coefficients $A_{ijkl}$ sont alors des constantes qui ne dépendent que des coefficients de Lamé $\lambda$ et $\mu$. En les reportant dans la deuxième équation de (1.19), nous obtenons pour tout $v \in V$ :

$$\begin{gathered}\int_\Omega \left(A_{ijkl}\ e_{kl}\left(u\right) + \tfrac{1}{2}A_{ijkl}\ \partial_k\ u_m \partial_l\ u_m\ \right)\partial_j\ v_i\ dx \\ + \int_\Omega \left(A_{ljkp}\ e_{kp}\left(u\right)\partial_l\ u_i + \tfrac{1}{2}A_{ljkp}\ \partial_k\ u_m\ \partial_p\ u_m \partial_l\ u_i\right)\partial_j\ v_i\ dx = \int_\Omega f_i v_i dx.\end{gathered} \tag{1.22}$$

A ce stade, il nous faut remarquer que l'équation (1.22) a bien une signification au sens des distributions, en effet, l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est une algèbre de Banach pour $m\ p > n$ (lorsque $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ) (voir Ciarlet P. G. & Rabier P. [10]) ; ici, $n = 3$, $m = 1$ et l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est donc une algèbre de Banach dès que $p > 3$, ce que l'on a supposé à cette fin. L'identité (1.22) s'exprime donc par :

$$\begin{gathered}-\partial_j(A_{ijkl}\ e_{kl}\left(u\right) + \tfrac{1}{2}A_{ijkl}\ \partial_k\ u_m \partial_l\ u_m\ + A_{ljkp}\ e_{kp}\left(u\right)\partial_l\ u_i + \\ + \tfrac{1}{2}A_{ljkp}\ \partial_k\ u_m\ \partial_p\ u_m \partial_l\ u_i) = f_i,\end{gathered} \tag{1.23}$$

ce que l'on écrira sous la forme condensée :

$$B\left(u\right) = f.$$

Examinons les propriétés de l'opérateur $B$. Pour $u \in \left(W^{2,p}\left(\Omega\right)\right)^3$ , les dérivées partielles $\partial_i u_j$ appartiennent à l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ dont les propriétés d'algébricité déja signalées entraînent par (1.23) :

$$B\left(u\right) \in \left(L^p\left(\Omega\right)\right)^3.$$

D'autre part, il est claire de (1.23) que $B$ est une somme d'applications linéaire, bilinéaire et trilinéaire continues. Donc, c'est une application de classe $C^\infty$ de l'espace $\left(W^{2,p}\left(\Omega\right)\right)^3$, on a :

$$\left(B'(0).v\right)_i = -\partial_j\left(A_{ijkl}\ e_{kl}\left(v\right)\right) = -\partial_j\left(A^{-1}\ e\left(v\right)\right)_{ij},$$

ce qui prouve que $B'(0)$ n'est autre que l'opérateur du système linéaire de l'élasticité. Pour appliquer le Théorème d'inversion locale, plaçons-nous dans le sous espace $(W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega))^3$. Ainsi :

$$B : \left(W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)\right)^3 \longrightarrow (L^p(\Omega))^3, \tag{1.24}$$

$$B'(0) : \left(W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)\right)^3 \longrightarrow (L^p(\Omega))^3, \tag{1.25}$$

et montrons que sur cet espace, l'opérateur $B'(0)$ est un isomorphisme avec l'espace $(L^p(\Omega))^3$. Grâce au Théorème de Banach, il suffit de prouver que $B'(0)$ est une bijection continue, la continuité ne crée aucune difficulté ; la preuve de la bijectivité est un résultat d'unicité (injectivité) et de régularité (surjectivité) pour le problème linéaire de l'élasticité. Plus précisement, grâce à l'inégalité de Korn, on peut conclure que pour tout $f \in \left(L^2(\Omega)\right)^3$, l'équation :

$$\begin{cases} u \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3 \\ B'(0).u = f, \end{cases} \tag{1.26}$$

possède une solution unique, ce qui prouve que l'opérateur $B'(0)$ (1.25) est injectif. Pour prouver qu'il est surjectif, il faut montrer que la solution (unique) de l'équation (1.26) appartient à l'espace $\left(W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)\right)^3$ dès que la donnée $f$ appartient à l'espace $(L^p(\Omega))^3$ . Ce résultat est vrai pour $p = 2$ et d'après Geymonat (voir Ciarlet P. G. & Rabier P. [10]), l'application $B'(0)$ (1.26) a un indice indépendant de $p \in ]1, +\infty[$. Puisque le noyau $\ker B'(0)$ est réduit à $\{0\}$ dans l'espace $\left(W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)\right)^3$ d'après le résultat d'injectivité précédent, et puisque l'indice est nul pour $p = 2$ (donc pour tout $p \in ]1, +\infty[$) :

$$\dim co\ker B'(0) = 0$$

dans l'espace $\left(W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)\right)^3$ , ce qui entraine la surjectivité. ■

**Théorème 6 :** *Sous les mêmes conditions qu'au théorème précédent* $(\Gamma_0 = \Gamma)$ *et en supposant de plus que* $\Gamma$ *est connexe, l'application* $\varphi$ *(1.2) est un difféomorphisme global de* $\Omega$ *sur* $\varphi(\Omega)$ *qui préserve l'orientation dès que les forces* $|f_i|_{0,p,\Omega}$ *sont assez petites* $(p > 3)$.

**Preuve :** Pour prouver notre assertion, il suffit de montrer que $\varphi$ est à la fois un difféomorphisme local préservant l'orientation et une injection.

Si $J_\varphi(x)$ désigne le jacobien de $\varphi$ au point $x$, on a :

$$J_\varphi(x) = \det\left(\partial_i \varphi_j(x)\right) = \det\left(I + \left(\partial_i u_j(x)\right)\right).$$

Or, si $|f_i|_{0,p,\Omega}$ est petit, il en va de même de $\|u\|_{2,p,\Omega}$. Grâce à l'injection (voir Brezis H. [2]) :

$$W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^1\left(\overline{\Omega}\right) \qquad (p > 3),$$

on conclut que pour $1 \leq i, j \leq 3$, $\partial_i u_j$ est arbitrairement petit dans $L^\infty(\Omega)$ et donc que $J_\varphi(x) > 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega}$.

Ceci prouve que $\varphi$ est un difféomorphisme local préservant l'orientation mais ne suffit pas à montrer que $\varphi$ est une injection. Pour cela, on utilisera un résultat (voir Ciarlet P. G. & Rabier P. [10]) exprimant que si $O$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ , $K$ est un compact de $O$ à bord $\partial K$ connexe et si $\varphi : O \to \mathbb{R}^n$ est de $C^1$ vérifiant :

$$J_\varphi(x) > 0,$$

pour tout $x \in K$, la restriction $\varphi|_{\partial K}$ étant injective, alors $\varphi|_K$ est injective.

Dans notre problème, on a $\varphi \in \left(W^{2,p}(O)\right)^3$ où $O$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ contenant

$\overline{\Omega}$, notre assertion est prouvée en prenant $K = \overline{\Omega}$ puisque

$$\varphi\left|_{\Gamma}\right. = I_d.$$

■

A chaque déformation $\varphi$, on associe l'énergie $J(\varphi)$ différence entre l'énergie interne $I(\varphi)$ et le travail $l(\varphi)$ des forces extérieures.

$$J(\varphi) = I(\varphi) - l(\varphi). \tag{1.27}$$

Pour un matériau élastique non homogène et anisotrope, l'énergie interne $I(\varphi)$ s'exprime comme l'intégrale sur $\Omega$ d'une densité d'énergie $W(x, \nabla\varphi)$ dépendant de la variable d'espace et du gradient de la déformation.

$$I(\varphi) = \int_{\Omega} W(x, \nabla\varphi)\ dx.$$

L'expression de $W$ dépendent du type de matériau qui constitue $\Omega$. Si on considère un matériau non homogène et anisotrope et tel que la configuration de référence est naturelle, la densité d'énergie $W$ est de la forme

$$W(x, F) = \frac{1}{2}\ A(x) : E(F) . E(F),$$

tel que $E$ est le tenseur de déformation

$$E(F) = \frac{1}{2}\left(F^T.F - I_3\right),$$

et $A$ est le tenseur de rigidité du matériau d'ordre 4.

Si la coque est soumise à des forces mortes volumiques $f$ et à des forces mortes surfaciques $h$ sur la partie $\Gamma_1$ du bord, le travail des forces extérieures s'exprime également sous une forme intégrale sur la configuration de référence.

$$l(\varphi) = \int_{\Omega} f.\varphi \, dx + \int_{\Gamma_1} h.\varphi \, da.$$

Un état d'équilibre est alors décrit comme un minimiseur $\varphi$ sur un espace de déformations admissibles de la fonctionnelle $J(\Psi)$.

$$J(\varphi) = \inf_{\Psi} J(\Psi).$$

L'existence de solutions de ce problème de minimisation est établie, si $W$ vérifie certaines conditions de croissance, de coercivité et de quasi-convexité. La polyconvexité implique la quasi-convexité. Dans ce cadre, Ball J. M. [1] a prouvé l'existence de solutions pour un solide hyperélastique homogène, telque

$$W(F) = \frac{\lambda}{2}(trE(F))^2 + \mu \; tr\left(E^2(F)\right) + o\left(|E(F)|^2\right),$$

et les coefficients $\lambda$ et $\mu$ sont les coefficients de Lamé du matériau, et de choisir

$$\begin{aligned} W(F) &\rightarrow +\infty \text{ si } \det(F) \rightarrow 0^+. \\ W(F) &= +\infty \text{ si } \det(F) \leq 0. \end{aligned}$$

Par la suite, on s'intéresse plus particulièrement à des solides élastiques de type non homogènes et anisotropes, pour lesquels la densité d'énergie $W$ n'est pas quasi-convexe (voir Pantz O. [14]) et les problèmes d'existence ou de non existence sont encore largement ouverts.

Le but du paragraphe suivant est de poser le problème de l'élasticité non linéaire sur un ouvert de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui a la particularité d'avoir une de ses dimensions beaucoup plus petite que les autres.

D'une façon intuitive, une coque mince est en fait une surface de l'espace qui est "épaissie". Physiquement, le problème posé est celui de trouver le déplacement et le tenseur des contraintes d'une coque remplie d'un matériau, soumise à des forces volumiques et des conditions aux limites sur son bord. Une fois défini le modèle que l'on prend comme point de départ, qui est ici celui de l'élasticité tridimensionnelle non linéaire pour un matériau non homogène et anisotrope, on profite alors de la structure de la coque pour se placer dans un système de coordonnées curvilinéaires (paragraphe 1.4.1) plus adapté pour étudier le comportement asymptotique du déplacement $u^\varepsilon$ et le second tenseur de Piola-Kirchhoff $\sigma^\varepsilon$, quand l'épaisseur de la coque tend vers 0.

## 1.4 Modélisation d'une coque élastique mince

Nous commençons par définir une surface régulière et les formes fondamentales associées à cette surface, pour plus de détails on renvoie à Sanchez-Hubert J. & Sanchez-Palencia E. [17].

Soit $\omega$ un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^2$, de frontière Lipschitzienne $\gamma$. On note un point $x = (x_\alpha)$ de $\overline{\omega}$. Soit $\theta \in C^3\left(\overline{\omega}, \mathbb{R}^3\right)$ une application injective telle que les deux vecteurs $a_\alpha = \partial_\alpha \theta$ soient linéairement indépendants en tout point de $\overline{\omega}$. Les vecteurs $a_\alpha$ forment la base covariante du plan tangent à la surface $S = \theta\left(\overline{\omega}\right)$. On définit le vecteur normal unitaire en tout point de la surface moyenne $S$ par $a_3 = \frac{a_1 \wedge a_2}{|a_1 \wedge a_2|}$, les trois vecteurs de la base $(a_\alpha)$ sont linéairements indépendants, alors $\det\left(a_{\alpha\beta}\right) > 0$. On définit la base contravariante associée $\left(a^\beta\right)$ par $a^\beta . a_\alpha = \delta_{\alpha\beta}$ et on les complète par le vecteur $a^3$ défini par $a^3 = a_3$. De plus, en tout point de $S$, la première forme fondamentale (le tenseur métrique) de composantes covariantes $a_{\alpha\beta}$ ou de composantes contravariantes $a^{\alpha\beta}$, la seconde forme fondamentale (tenseur de courbure) de composantes covariantes $b_{\alpha\beta}$ ou de composantes mixtes $b_\alpha^\beta$ et les symboles de Christoffel bidimensionnels $\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho*}$ sont donnés par :

$$a_{\alpha\beta} = a_\alpha . a_\beta, a^{\alpha\beta} = a^\alpha . a^\beta \tag{1.28}$$

$$b_{\alpha\beta} = -\left(\partial_\alpha a_3\right) . a^\beta, b_\alpha^\beta = a^{\beta\sigma} . b_{\sigma\alpha} \tag{1.29}$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho*} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\rho*} = a^\rho . \partial_\alpha a_\beta \tag{1.30}$$

L'élément d'aire de $S$ est $\sqrt{a}dx$, où

$$a = \det\left(a_{\alpha\beta}\right), \; a > 0 \tag{1.31}$$

La surface $S$ étant définie, précisons maintenant l'idée intuitive qu'une coque est une surface à laquelle on a ajouté de l'épaisseur. Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit les ensembles

$$\Omega^\varepsilon = \omega \times \left]-\varepsilon, +\varepsilon\right[, \Gamma_+^\varepsilon = \omega \times \{+\varepsilon\}, \Gamma_-^\varepsilon = \omega \times \{-\varepsilon\}, \Gamma^\varepsilon = \gamma \times [-\varepsilon, +\varepsilon], \tag{1.32}$$

et une application injective (c'est le cas lorsque $\varepsilon$ est petit, Ciarlet P. G. [6]) $\Theta^\varepsilon : \overline{\Omega^\varepsilon} \to \mathbb{R}^3$ par :

$$\forall x^\varepsilon = (x_1, x_2, x_3^\varepsilon) \in \overline{\Omega^\varepsilon}, \Theta^\varepsilon\left(x^\varepsilon\right) = \theta\left(x_1, x_2\right) + x_3^\varepsilon a_3\left(x_1, x_2\right) \in \overline{\widehat{\Omega^\varepsilon}} = \Theta^\varepsilon\left(\overline{\Omega^\varepsilon}\right). \tag{1.33}$$

Pour $\varepsilon$ suffisamment petit, les trois vecteurs définis par $g_i^\varepsilon = \partial_i^\varepsilon \Theta^\varepsilon$ sont linéairement indépendants et définissent une base covariante en tout point de $\overline{\Omega^\varepsilon}$ (voir Ciarlet P. G. [6]). La base contravariante associée $\left(g^{i,\varepsilon}\right)$ est définie par $g_i^\varepsilon . g^{j,\varepsilon} = \delta_{ij}$. On définit alors les composantes covariantes $g_{ij}^\varepsilon = g_i^\varepsilon . g_j^\varepsilon$ et contravariantes $g^{ij,\varepsilon} = g^{i,\varepsilon} . g^{j,\varepsilon}$ du tenseur métrique, les trois vecteurs de la base $(g_i^\varepsilon)$ sont linéairements indépendants, alors $\det\left(g_{ij}^\varepsilon\right) > 0$ . On définit l'élément de volume $\sqrt{g^\varepsilon}dx^\varepsilon$ et l'élément de surface $\det\left(\nabla\Theta^\varepsilon\right)\left\|\left(\nabla\Theta^\varepsilon\right)^{-T}.n\right\|dS^\varepsilon$ où $g^\varepsilon = \det\left(g_{ij}^\varepsilon\right)$, ainsi que les symboles de Christoffel tridimensionnels $\Gamma_{ij}^{p,\varepsilon} = g^{p,\varepsilon}.\partial_j^\varepsilon g_i^\varepsilon = \Gamma_{ji}^{p,\varepsilon}$. Pour l'application $\Theta^\varepsilon$ définie précédemment, $\Gamma_{\alpha 3}^{3,\varepsilon} = \Gamma_{33}^{p,\varepsilon} = 0$

Dans toute la suite, on utilise la convention de notation suivante : les notations comportant un chapeau sont exprimées dans un système de coordonnées cartésiennes, celles sans chapeau étant exprimées dans un système de coordonnées curvilignes.

La coque, dont la configuration de référence est $\overline{\widehat{\Omega^\varepsilon}} = \Theta^\varepsilon\left(\overline{\Omega^\varepsilon}\right)$, est encastrée sur la partie $\widehat{\Gamma_0^\varepsilon} = \Theta^\varepsilon\left(\Gamma_0^\varepsilon\right)$ où $\Gamma_0^\varepsilon = \gamma_0 \times [-\varepsilon, +\varepsilon]$, $\gamma_0 \subset \gamma$ de longueur non nulle, de sa surface latérale $\widehat{\Gamma^\varepsilon} = \Theta^\varepsilon\left(\Gamma^\varepsilon\right)$. Sur ses faces supérieure $\widehat{\Gamma_+^\varepsilon} = \Theta^\varepsilon\left(\Gamma_+^\varepsilon\right)$, et inférieure $\widehat{\Gamma_-^\varepsilon} = \Theta^\varepsilon\left(\Gamma_-^\varepsilon\right)$, elle est soumise à des forces de surface notées $\widehat{h^\varepsilon} \in \left(L^2\left(\widehat{\Gamma_+^\varepsilon} \cup \widehat{\Gamma_-^\varepsilon}\right)\right)^3$ et à des forces de volume $\widehat{f^\varepsilon} \in \left(L^2\left(\widehat{\Omega^\varepsilon}\right)\right)^3$. Sous l'action de ces forces, la coque subit un déplacement noté $\widehat{u^\varepsilon} : \overline{\widehat{\Omega^\varepsilon}} \to \mathbb{R}^3$. Le champ de déformation associée est $\widehat{\varphi^\varepsilon} = I_3 + \widehat{u^\varepsilon}$. En notant $\widehat{\sigma^\varepsilon}$ le second tenseur des contraintes de Piola -Kirchhoff et $\widehat{E^\varepsilon}$ le tenseur des déformations de Green Saint-Venant.

La formulation variationnelle mixte d'équations d'équilibre de l'élasticité non linéaire, s'écrit alors en coordonnées cartésiennes (voir Ciarlet P. G. & Rabier P. [10]) :

$$\widehat{P^\varepsilon}\left(\widehat{\Omega^\varepsilon}\right)\begin{cases} \text{Trouver } \left(\widehat{\sigma^\varepsilon}, \widehat{u^\varepsilon}\right) \in \widehat{\Sigma^\varepsilon} \times \widehat{V^\varepsilon} \\ \int_{\widehat{\Omega^\varepsilon}} \widehat{S_{ijkl}^\varepsilon}\widehat{\sigma_{kl}^\varepsilon}\widehat{\tau_{ij}^\varepsilon}d\widehat{x^\varepsilon} = \int_{\widehat{\Omega^\varepsilon}} \widehat{E_{ij}^\varepsilon}\left(\widehat{u^\varepsilon}\right)\widehat{\tau_{ij}^\varepsilon}d\widehat{x^\varepsilon}, \forall\widehat{\tau^\varepsilon} \in \widehat{\Sigma^\varepsilon} \\ \int_{\widehat{\Omega^\varepsilon}} \left(\widehat{\sigma_{ij}^\varepsilon} + \widehat{\sigma_{kj}^\varepsilon}\widehat{\partial_k^\varepsilon}\widehat{u_i^\varepsilon}\right)\widehat{\partial_k^\varepsilon}\widehat{v_i^\varepsilon}d\widehat{x^\varepsilon} = \int_{\widehat{\Omega^\varepsilon}} \widehat{f_i^\varepsilon}\widehat{v_i^\varepsilon}d\widehat{x^\varepsilon} + \int_{\widehat{\Gamma_+^\varepsilon} \cup \widehat{\Gamma_-^\varepsilon}} \widehat{h_i^\varepsilon}\widehat{v_i^\varepsilon}d\widehat{S^\varepsilon}, \forall\widehat{v^\varepsilon} \in \widehat{V^\varepsilon} \end{cases}, \tag{1.34}$$

telle que :

$$\widehat{\sigma_{ij}^\varepsilon} = \widehat{A_{ijkl}^\varepsilon}\left(\widehat{x^\varepsilon}\right)\widehat{E_{kl}^\varepsilon}\left(\widehat{u^\varepsilon}\right), \forall\widehat{x^\varepsilon} \in \widehat{\Omega^\varepsilon}, \tag{1.35}$$

et :

$$\widehat{E^{\varepsilon}_{ij}}\left(\widehat{u^{\varepsilon}}\right)=\frac{1}{2}\left(\widehat{\partial}_i\widehat{u^{\varepsilon}_j}+\widehat{\partial}_j\widehat{u^{\varepsilon}_i}+\widehat{\partial}_i\widehat{u^{\varepsilon}_k}\widehat{\partial}_j\widehat{u^{\varepsilon}_k}\right), \tag{1.36}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\widehat{\Sigma^{\varepsilon}}=\left\{\widehat{\tau}=\left(\widehat{\tau_{ij}}\right)\in\left(L^2\left(\widehat{\Omega^{\varepsilon}}\right)\right)^9;\widehat{\tau_{ij}}=\widehat{\tau_{ji}}\right\}\\ \widehat{V^{\varepsilon}}=\left\{\widehat{v}=\left(\widehat{v_i}\right)\in\left(W^{1,4}\left(\widehat{\Omega^{\varepsilon}}\right)\right)^3;\widehat{v}=0\text{ sur }\widehat{\Gamma^{\varepsilon}_0}\right\}\end{array}\right.$$

$\widehat{A^{\varepsilon}}=\left(\widehat{A^{\varepsilon}_{ijkl}}\right)$ est le tenseur de rigidité du matériau vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{c}\widehat{A^{\varepsilon}_{ijkl}}\in L^{\infty}\left(\widehat{\Omega^{\varepsilon}}\right)\\ \widehat{A^{\varepsilon}_{ijkl}}=\widehat{A^{\varepsilon}_{jikl}}=\widehat{A^{\varepsilon}_{klij}}=\widehat{A^{\varepsilon}_{klji}}\\ \exists c\succ 0,\widehat{A^{\varepsilon}_{ijkl}}\widehat{\tau^{\varepsilon}_{kl}}\widehat{\tau^{\varepsilon}_{ij}}\geq c\widehat{\tau^{\varepsilon}_{ij}}\widehat{\tau^{\varepsilon}_{ij}},\forall\widehat{\tau^{\varepsilon}_{ij}}=\widehat{\tau^{\varepsilon}_{ji}}\end{array}\right., \tag{1.37}$$

$\widehat{S^{\varepsilon}}=\left(\widehat{S^{\varepsilon}_{ijkl}}\right)$ est le tenseur de souplesse associé.

### 1.4.1 Le problème variationnel sur l'ensemble $\Omega^{\varepsilon}$

On transforme le problème précédent écrit en coordonnées cartésiennes $\widehat{x^{\varepsilon}}=\left(\widehat{x^{\varepsilon}_i}\right)$ en un problème écrit en coordonnées curvilignes $x^{\varepsilon}=\left(x^{\varepsilon}_i\right)$ mieux adaptées à l'étude des coques.

On pose :

$$\widehat{x^{\varepsilon}}=\Theta^{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right),\forall x^{\varepsilon}\in\Omega^{\varepsilon}, \tag{1.38}$$

$$f^{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)=\widehat{f^{\varepsilon}}\left(\widehat{x^{\varepsilon}}\right)=\widehat{f^{\varepsilon}}\circ\Theta^{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)=f^{i,\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)g^{\varepsilon}_i\left(x^{\varepsilon}\right),\forall x^{\varepsilon}\in\Omega^{\varepsilon}, \tag{1.39}$$

$$h^{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)=\widehat{h^{\varepsilon}}\left(\widehat{x^{\varepsilon}}\right)=\widehat{h^{\varepsilon}}\circ\Theta^{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)=h^{i,\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)g^{\varepsilon}_i\left(x^{\varepsilon}\right),\forall x^{\varepsilon}\in\Gamma^{\varepsilon}_{+}\cup\Gamma^{\varepsilon}_{-}, \tag{1.40}$$

$$u^{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)=\widehat{u^{\varepsilon}}\left(\widehat{x^{\varepsilon}}\right)=\widehat{u^{\varepsilon}}\circ\Theta^{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)=u^{\varepsilon}_i\left(x^{\varepsilon}\right)g^{i,\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right),\forall x^{\varepsilon}\in\Omega^{\varepsilon}, \tag{1.41}$$

$$v^{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)=\widehat{v^{\varepsilon}}\left(\widehat{x^{\varepsilon}}\right)=\widehat{v^{\varepsilon}}\circ\Theta^{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)=v^{\varepsilon}_i\left(x^{\varepsilon}\right)g^{i,\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right),\forall x^{\varepsilon}\in\Omega^{\varepsilon},$$

$$\tau^{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)=\widehat{\tau^{\varepsilon}}\left(\widehat{x^{\varepsilon}}\right)=\widehat{\tau^{\varepsilon}}\circ\Theta^{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)=\tau^{ij,\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)g^{\varepsilon}_i\left(x^{\varepsilon}\right)g^{\varepsilon}_j\left(x^{\varepsilon}\right),\forall x^{\varepsilon}\in\Omega^{\varepsilon},$$

$$A^{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)=\widehat{A^{\varepsilon}}\left(\widehat{x^{\varepsilon}}\right)=\widehat{A^{\varepsilon}}\circ\Theta^{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)=A^{ijkl,\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)g_i^{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)g_j^{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)g_k^{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)g_l^{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right),\forall x^{\varepsilon}\in\Omega^{\varepsilon}, \tag{1.42}$$

$$S^{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)=\widehat{S^{\varepsilon}}\left(\widehat{x^{\varepsilon}}\right)=\widehat{S^{\varepsilon}}\circ\Theta^{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)=S_{ijkl}^{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)g^{i,\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)g^{j,\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)g^{k,\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)g^{l,\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right),\forall x^{\varepsilon}\in\Omega^{\varepsilon}. \tag{1.43}$$

Le problème $\widehat{P^{\varepsilon}}\left(\widehat{\Omega^{\varepsilon}}\right)$ s'écrit alors en coordonnées curvilignes (voir Annexe, lemme 32) :

$$P^{\varepsilon}\left(\Omega^{\varepsilon}\right)\left\{\begin{array}{c}\text{Trouver }\left(u^{\varepsilon},\sigma^{\varepsilon}\right)\in V^{\varepsilon}\times\Sigma^{\varepsilon}\text{; tel que :}\\ \int_{\Omega^{\varepsilon}}\sqrt{g^{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)}S_{ijkl}^{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)\sigma^{kl,\varepsilon}\tau^{ij,\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)dx^{\varepsilon}=\\ =\int_{\Omega^{\varepsilon}}\sqrt{g^{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)}E_{i\|j}^{\varepsilon}\left(u^{\varepsilon}\right)\tau^{ij,\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)dx^{\varepsilon},\forall\tau^{\varepsilon}\in\Sigma^{\varepsilon}\\ \int_{\Omega^{\varepsilon}}\sqrt{g^{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)}\sigma^{ij,\varepsilon}F_{i\|j}^{\varepsilon}\left(u^{\varepsilon},v^{\varepsilon}\right)dx^{\varepsilon}=\int_{\Omega^{\varepsilon}}\sqrt{g^{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)}f^{i,\varepsilon}v_i^{\varepsilon}dx^{\varepsilon}+\\ +\int_{\Gamma_+^{\varepsilon}\cup\Gamma_-^{\varepsilon}}\sqrt{g^{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)}h^{i,\varepsilon}v_i^{\varepsilon}dS^{\varepsilon},\forall v^{\varepsilon}\in V^{\varepsilon}\end{array}\right., \tag{1.44}$$

où :

$$E_{i\|j}^{\varepsilon}\left(u^{\varepsilon}\right)=\frac{1}{2}\left(u_{i\|j}^{\varepsilon}+u_{j\|i}^{\varepsilon}+g^{ms,\varepsilon}u_{m\|i}^{\varepsilon}u_{s\|j}^{\varepsilon}\right), \tag{1.45}$$

sont les composantes covariantes du tenseur des déformations de Green Saint-Venant , les $\sigma^{ij,\varepsilon}$ sont les composantes contravariantes du second tenseur des contraintes de Piola -Kirchhoff.

$$F_{i\|j}^{\varepsilon}\left(u^{\varepsilon},v^{\varepsilon}\right)=\frac{1}{2}\left(v_{j\|i}^{\varepsilon}+v_{i\|j}^{\varepsilon}+g^{ms,\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)u_{m\|i}^{\varepsilon}v_{s\|j}^{\varepsilon}\right), \tag{1.46}$$

sont les composantes covariantes de $\left(\widehat{F^{\varepsilon}}\right)^T.\widehat{\nabla^{\varepsilon}}\widehat{v^{\varepsilon}}$ où $\widehat{F^{\varepsilon}}=\widehat{\nabla^{\varepsilon}}\widehat{\varphi^{\varepsilon}}$ (voir Christophe C. [4]). Avec :

$$v_{i\|j}^{\varepsilon}=\partial_j^{\varepsilon}v_i^{\varepsilon}-\Gamma_{ij}^{k,\varepsilon}v_k^{\varepsilon}\quad\text{(dérivée covariante de }v^{\varepsilon}\text{)}, \tag{1.47}$$

$$\Sigma^{\varepsilon}=\left\{\tau^{\varepsilon}=\left(\tau^{ij,\varepsilon}\right)\in\left(L^2\left(\Omega^{\varepsilon}\right)\right)^9,\tau^{ij,\varepsilon}=\tau^{ji,\varepsilon}\right\}, \tag{1.48}$$

$$V^{\varepsilon}=\left\{v^{\varepsilon}\in\left(v_i^{\varepsilon}\right)\in\left(W^{1,4}\left(\Omega^{\varepsilon}\right)\right)^3,v^{\varepsilon}=0\text{ sur }\Gamma_0^{\varepsilon}\right\}. \tag{1.49}$$

# Chapitre 2

# L'ANALYSE ASYMPTOTIQUE FORMELLE DES COQUES NON LINÉAIREMENT ÉLASTIQUES MINCES

## 2.1 Introduction

Ce deuxième chapitre est consacré a l'obtention par l'analyse asymptotique des modèles bidimensionnels "membranaire" et "couplé flexion-membranne" pour des coques élastiques minces.

On considère une coque élastique mince d'épaisseur $2\varepsilon$ est petite par rapport à ses autres longueurs, encastrée sur une partie de sa frontière. Sous l'action de forces de volume et de forces de surface, il subit un champ de déplacement. Ce champ de déplacement et le tenseur des contraintes sont solution d'un problème variationnel $P^{\varepsilon}(\Omega^{\varepsilon})$ en coordonnées curvilignes qui suivent de façon plus naturelle la géométrie de la coque. On écrit le problème variationnel sur un domaine indépendant de l'épaisseur (paragraphe 2.2). Le développement asymptotique permet d'obtenir formellement des modèles limites bidimensionnelles posés sur la surface moyenne de la coque (paragraphe 2.3), par linéarisation, on obtient les modèles bidimensionnels de l'élasticité linéarisé (paragraphe 2.4).

On considère une coque $\widehat{\Omega^{\varepsilon}} = \Theta^{\varepsilon}(\Omega^{\varepsilon})$ de frontière $\widehat{\Gamma^{\varepsilon}}$, ($\Omega^{\varepsilon} = \omega \times ]-\varepsilon, +\varepsilon[$ de frontière $\Gamma^{\varepsilon}$), tel que $\omega$ est un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^2$, de frontière $\gamma$ Lipschitzienne, d'épaisseur $2\varepsilon$ ($\varepsilon$ est petit) de surface moyenne $S = \theta(\overline{\omega})$, telle que $\theta \in C^3(\omega, \mathbb{R}^3)$, constituée d'un matériau élastique non homogène et anisotrope son tenseur de rigidité $A^{\varepsilon} = \left(A^{ijkl,\varepsilon}\right)$ vérifie :

$$\left\{\begin{array}{c} A^{ijkl,\varepsilon}(x^{\varepsilon}) \in L^{\infty}(\Omega^{\varepsilon}) \\ A^{ijkl,\varepsilon} = A^{jikl,\varepsilon} = A^{klij,\varepsilon} = A^{klji,\varepsilon} \\ \exists\, C > 0, A^{ijkl,\varepsilon}\tau_{ij}\tau_{kl} \geq C\ \tau_{ij}\tau_{ij},\ \forall \tau_{ij} = \tau_{ji} \end{array}\right. . \tag{2.1}$$

La coque est soumise à des forces volumiques dans $\widehat{\Omega^{\varepsilon}}$ et à des forces surfaciques sur $\widehat{\Gamma^{\varepsilon}_{+}} \cup \widehat{\Gamma^{\varepsilon}_{-}}$, ($\widehat{\Gamma^{\varepsilon}_{\pm}} = \Theta^{\varepsilon}\left(\Gamma^{\varepsilon}_{\pm} = \omega \times \{\pm\varepsilon\}\right)$), les densités de ces forces sont respectivement données par leurs composantes contravariantes : $f^{\varepsilon} = (f^{\varepsilon}_{i}) \in \left(L^2(\Omega^{\varepsilon})\right)^3$ et $h^{\varepsilon} = (h^{\varepsilon}_{i}) \in \left(L^2\left(\Gamma^{\varepsilon}_{+} \cup \Gamma^{\varepsilon}_{-}\right)\right)^3$. De plus, la coque est encastrée sur la partie $\Theta^{\varepsilon}(\Gamma^{\varepsilon}_{0})$, ($\Gamma^{\varepsilon}_{0} = \gamma_0 \times [-\varepsilon, +\varepsilon], \gamma_0 \subset \gamma$) de sa frontière latérale, alors $u^{\varepsilon} = 0$ sur $\Gamma^{\varepsilon}_{0}$.

Le déplacement $u^{\varepsilon}$ et le second tenseur de Piola-Kirchhoff $\sigma^{\varepsilon}$ vérifient le problème $P^{\varepsilon}(\Omega^{\varepsilon})$ (1.44), (chapitre 1) en coordonnées curvilignes.

## 2.2 Position du problème variationnel sur un domaine indépendant de l'épaisseur

L'objectif de l'analyse asymptotique est de connaître le comportement de la solution $(u^\varepsilon, \sigma^\varepsilon)$ du problème $P^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)$ lorsque $\varepsilon$ tend vers zéro. Pour cela il est important que le domaine sur lequel est posé le problème ne dépend pas de $\varepsilon$. On définit les ensembles suivants : $\Omega = \omega \times ]-1,+1[$ ainsi que $\Gamma = \gamma \times [-1,+1]$, $\Gamma_0 = \gamma_0 \times [-1,+1]$ et $\Gamma_\pm = \omega \times \{\pm 1\}$. On note $x = (x_i)$ un point de $\overline{\Omega}$ et on pose $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

On construit l'application $\pi^\varepsilon$ bijective de $\overline{\Omega}$ dans $\overline{\Omega^\varepsilon}$ de la façon suivante :

$$\pi^\varepsilon : x = (x_1, x_2, x_3) \in \overline{\Omega} \to \pi^\varepsilon(x) = x^\varepsilon = (x_1, x_2, \varepsilon x_3) \in \overline{\Omega^\varepsilon}, \tag{2.2}$$

d'où : $\partial_\alpha^\varepsilon = \partial_\alpha$ et $\partial_3^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\partial_3$.

A toute fonction $k^\varepsilon$ définie sur $\Omega^\varepsilon$, on associe la fonction "mise à l'échelle" définie sur $\Omega$ par

$$k^\varepsilon(x^\varepsilon) = k(\varepsilon)(x), x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon, x \in \Omega, \tag{2.3}$$

on définit ainsi les fonctions

$$\begin{aligned}
u_i(\varepsilon)(x) &= u_i^\varepsilon(x^\varepsilon), f^i(\varepsilon)(x) = f^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon), \\
A^{ijkl}(\varepsilon)(x) &= A^{ijkl,\varepsilon}(x^\varepsilon), S_{ijkl}(\varepsilon)(x) = S_{ijkl}^\varepsilon(x^\varepsilon), \\
g(\varepsilon)(x) &= g^\varepsilon(x^\varepsilon), g^i(\varepsilon)(x) = g^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon), \\
g_i(\varepsilon)(x) &= g_i^\varepsilon(x^\varepsilon), \sigma^{ij}(\varepsilon)(x) = \sigma^{ij,\varepsilon}(x^\varepsilon), \\
E_{i\|j}(\varepsilon)(u(\varepsilon)) &= E_{i\|j}^\varepsilon(u^\varepsilon), F_{i\|j}(\varepsilon)(u(\varepsilon), v) = F_{i\|j}^\varepsilon(u^\varepsilon, v), \\
\Gamma_{ij}^k(\varepsilon)(x) &= \Gamma_{ij}^{k,\varepsilon}(x^\varepsilon), \forall x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon \text{ et } x \in \Omega, \\
h^i(\varepsilon)(x) &= h^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon) \text{ pour } x^\varepsilon \in \Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon \text{ et } x \in \Gamma_+ \cup \Gamma_-.
\end{aligned}$$

On peut alors reécrire le problème variationnel $P^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)$ sur l'ouvert fixe $\Omega$ :

$$P(\varepsilon, \Omega) \left\{ \begin{array}{c}
\text{Trouver } (u(\varepsilon), \sigma(\varepsilon)) \in V \times \Sigma\text{; tels que :} \\
\varepsilon \int_\Omega \sqrt{g(\varepsilon)} S_{ijkl}(\varepsilon) \sigma^{kl}(\varepsilon) \tau^{ij} dx = \\
= \varepsilon \int_\Omega \sqrt{g(\varepsilon)} E_{i\|j}(\varepsilon)(u(\varepsilon)) \tau^{ij} dx, \forall \tau \in \Sigma \\
\varepsilon \int_\Omega \sqrt{g(\varepsilon)} \sigma^{ij}(\varepsilon) F_{i\|j}(\varepsilon)(u(\varepsilon), v) dx = \varepsilon \int_\Omega \sqrt{g(\varepsilon)} f^i(\varepsilon) v_i dx + \\
+ \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} \sqrt{g(\varepsilon)} h^i(\varepsilon) v_i dS, \forall v \in V
\end{array} \right. , \tag{2.4}$$

tels que :

$$E_{i\|j}(\varepsilon)(u(\varepsilon)) = \frac{1}{2}\left(u_{i\|j}(\varepsilon) + u_{j\|i}(\varepsilon) + g^{ms}(\varepsilon) u_{m\|i}(\varepsilon) u_{s\|j}(\varepsilon)\right), \tag{2.5}$$

$$F_{i\|j}(\varepsilon)(u(\varepsilon), v) = \frac{1}{2}\left(v_{j\|i}(\varepsilon) + v_{i\|j}(\varepsilon) + g^{ms}(\varepsilon)(x) u_{m\|i}(\varepsilon) v_{s\|j}(\varepsilon) + g^{ms}(\varepsilon)(x) u_{m\|j}(\varepsilon) v_{s\|i}(\varepsilon)\right), \tag{2.6}$$

$$v_{i\|\beta}(\varepsilon) = \partial_\beta v_i - \Gamma_{i\beta}^k(\varepsilon) v_k, \tag{2.7}$$

$$v_{i\|3}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\partial_3 v_i - \Gamma_{i3}^{\rho}(\varepsilon)\, v_\rho, \tag{2.8}$$

$$\Sigma = \left\{\tau = \left(\tau^{ij}\right) \in \left(L^2(\Omega)\right)^9, \tau^{ij} = \tau^{ji}\right\}, \tag{2.9}$$

$$V = \left\{v = (v_i) \in \left(W^{1,4}(\Omega)\right)^3, v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\right\}. \tag{2.10}$$

## 2.3 Identification d'un problème variationnel bidimentionnel

Nous commençons maintenant l'analyse asymptotique du problème variationnel $P(\varepsilon, \Omega)$. On suppose que la solution de ce problème admet un développement asymptotique formel d'ordre zéro.

$$(u(\varepsilon), \sigma(\varepsilon)) = \left(u^0, \sigma^0\right) + \varepsilon\left(u^1, \sigma^1\right) + \ldots \quad . \tag{2.11}$$

Nous énonçons maintenant quelques résultats qu'on aura besoin par la suite.

**Théorème 7 :** *Soit $\omega$ un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^2$ de frontière $\gamma$ Lipschitzienne, soit $\theta \in C^3\left(\overline{\omega}, \mathbb{R}^3\right)$ une application injective telle que les deux vecteurs $a_\alpha = \partial_\alpha \theta$ soient linéairement indépendants en tout point de $\overline{\omega}$ et soit $\varepsilon_0 > 0$ (toujours existe, tel que l'application $\Theta : \overline{\Omega_0} \to \mathbb{R}^3$ définie par $\Theta(y, x_3) = \theta(y) + x_3 a_3(y)$ pour tout $(y, x_3) \in \overline{\Omega_0}$, où $\Omega_0 = \omega \times \left]-\varepsilon_0, \varepsilon_0\right[$ est $C^1-$difféomorphisme de $\overline{\Omega_0}$ dans $\Theta\left(\overline{\Omega_0}\right)$ et $\det(g_1, g_2, g_3) > 0$ dans $\overline{\Omega_0}$, $g_i = \partial_i \Theta$,( voir théorème 3.1.1, Ciarlet P. G. [6]). Les fonctions $g(\varepsilon)$, $\Gamma_{ij}^k(\varepsilon)$, $b_{\alpha\beta}$, $b_\alpha^\sigma, \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma *}$ sont définies dans la section 1.4 (chapitre 1), les dérivées covariantes $b_{\beta|\alpha}^\sigma$ sont définies par :*

$$b_{\beta|\alpha}^\sigma = \partial_\alpha b_\beta^\sigma + \Gamma_{\alpha\tau}^{\sigma *} b_\beta^\tau - \Gamma_{\alpha\beta}^{\tau *} b_\tau^\sigma,$$

*et les fonctions $b_{\alpha\beta}$, $b_\alpha^\sigma, \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma *}$ , $b_{\beta|\alpha}^\sigma$ et $a$ $(a = \det(a_{\alpha\beta}))$ sont identifiées à des fonctions de*

$C^0\left(\overline{\Omega}\right)$. *Alors :*

$$\Gamma_{ij}^{k}\left(\varepsilon\right)\left(x\right)=\Gamma_{ij}^{k,0}+\varepsilon x_3\Gamma_{ij}^{k,1}+O\left(\varepsilon^2\right),$$

$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma,0}=\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma *},\ \Gamma_{\alpha\beta}^{3,0}=b_{\alpha\beta},\ \Gamma_{\alpha 3}^{\beta,0}=-b_{\alpha}^{\beta},\ \Gamma_{i3}^{3,0}=\Gamma_{33}^{i,0}=0, \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma,1}=-b_{\alpha|\beta}^{\gamma},\ \Gamma_{\alpha\beta}^{3,1}=-b_{\alpha}^{\sigma}b_{\sigma\beta},$
$\Gamma_{\alpha 3}^{\gamma,1}=-b_{\alpha}^{\sigma}b_{\sigma}^{\gamma},\ \Gamma_{i3}^{3,1}=\Gamma_{33}^{i,1}=0.$

$$\partial_3\Gamma_{\alpha\beta}^{k}\left(\varepsilon\right)=O\left(\varepsilon\right),\ g\left(\varepsilon\right)\ =a+O\left(\varepsilon\right),$$

*pour tout* $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$, *où* $O\left(\varepsilon\right)$, $O\left(\varepsilon^2\right)$ *sont définis par rapport à la norme usuelle de* $L^{\infty}\left(\Omega\right)$ .

*Finallement, il existe des constantes* $a_0$, $g_0$ *et* $g_1$ *telles que :*

$$\begin{aligned} 0 &< a_0\leq a\left(y\right)\ \text{pour tout}\ y\in\overline{\omega}, \\ 0 &< g_0\leq g\left(\varepsilon\right)\left(x\right)\leq g_1,\ \text{pour tout}\ x\in\overline{\Omega}\ \text{et}\ 0<\varepsilon\leq\varepsilon_0. \end{aligned}$$

**Preuve :** Les vecteurs $a_i$, $a^i$, $g_i^{\varepsilon}$, $g^{i,\varepsilon}$ et les scalaires $a_{\alpha\beta}$, $g_{ij}^{\varepsilon}$, $g^{ij,\varepsilon}$ sont définis dans la section 1.4.

Par définition :

$$g_{\alpha}\left(\varepsilon\right)=a_{\alpha}+\varepsilon x_3\partial_{\alpha}a_3=a_{\alpha}-\varepsilon x_3 b_{\alpha\sigma}a^{\sigma},$$

tel que : $\partial_{\alpha}a_3=-b_{\alpha\sigma}a^{\sigma}$ d'après la formule de Weingarten (théorème 2.3.1, Ciarlet P. G. [6]).

$$g_{\alpha\beta}\left(\varepsilon\right)=a_{\alpha\beta}+\varepsilon x_3 g_{\alpha\beta}^{1}+O\left(\varepsilon^2\right),\ g_{\alpha\beta}^{1}=-2b_{\alpha\beta}$$

$$\text{et}\ g_{i3}\left(\varepsilon\right)=\delta_{i3},\ g_3\left(\varepsilon\right)=a_3.$$

La matrice $\left(g_{ij}\left(\varepsilon\right)\right)$ est de la forme :

$$\left(g_{ij}\left(\varepsilon\right)\right)=G+\varepsilon H+O\left(\varepsilon^2\right),$$

son inverse satisfait :

$$\left(g_{ij}\left(\varepsilon\right)\right)^{-1}=\left(g^{ij}\left(\varepsilon\right)\right)=G^{-1}-\varepsilon G^{-1}HG^{-1}+O\left(\varepsilon^{2}\right),$$

la dernière égalité donne :

$$g^{\alpha\beta}\left(\varepsilon\right)=a^{\alpha\beta}+\varepsilon x_{3}g^{\alpha\beta,1}+O\left(\varepsilon^{2}\right),\ g^{\alpha\beta,1}=2a^{\alpha\sigma}b_{\sigma}^{\beta}$$

$$\text{et } g^{i3}\left(\varepsilon\right)=\delta_{i3},\ g^{\alpha}\left(\varepsilon\right)=g^{\alpha i}\left(\varepsilon\right)g_{i}\left(\varepsilon\right)=a^{\alpha}+\varepsilon x_{3}g^{\alpha,1}+O\left(\varepsilon^{2}\right),\ g^{\alpha,1}=b_{\sigma}^{\alpha}a_{\sigma}.$$

Par définition : $\Gamma_{\alpha j}^{\sigma}\left(\varepsilon\right)\left(x\right)=g^{\sigma}\left(\varepsilon\right).\partial_{\alpha}g_{j}\left(\varepsilon\right)$ ; alors

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}\left(\varepsilon\right)=\left(a^{\sigma}+\varepsilon x_{3}b_{\tau}^{\sigma}a^{\tau}+O\left(\varepsilon^{2}\right)\right).\left(\partial_{\alpha}a_{\beta}+\varepsilon x_{3}\partial_{\alpha\beta}a_{3}\right),\left(\partial_{\alpha\beta}=\partial_{\alpha}\left(\partial_{\beta}\right)\right),$$

$$\Gamma_{\alpha3}^{\sigma}\left(\varepsilon\right)=\left(a^{\sigma}+\varepsilon x_{3}b_{\tau}^{\sigma}a^{\tau}+O\left(\varepsilon^{2}\right)\right).\partial_{\alpha}a_{3}.$$

D'après les formules de Gaub et Weingarten (théorème 2.3.1, Ciarlet P. G. [6]), on obtient :

$$\partial_{\alpha}a_{\beta}=\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma*}a_{\gamma}+b_{\alpha\beta}a_{3}\text{ et }\partial_{\alpha}a_{3}=-b_{\alpha}^{\sigma}a_{\sigma},$$

et d'après la définition de $b_{\beta|\alpha}^{\sigma}$, on obtient alors :

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}\left(\varepsilon\right)&=\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma*}-\varepsilon x_{3}b_{\beta|\alpha}^{\sigma}+O\left(\varepsilon^{2}\right),\\ \Gamma_{\alpha3}^{\sigma}\left(\varepsilon\right)&=-b_{\alpha}^{\sigma}-\varepsilon x_{3}b_{\alpha}^{\tau}b_{\tau}^{\sigma}+O\left(\varepsilon^{2}\right).\end{aligned}$$

$g^{3}\left(\varepsilon\right)=g^{3i}\left(\varepsilon\right)\ g_{i}\left(\varepsilon\right)=a^{3}$, avec :

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha3}^{\sigma}\left(\varepsilon\right)&=g^{3}\left(\varepsilon\right).\partial_{\alpha}g_{\beta}\left(\varepsilon\right)=a^{3}.\left(\partial_{\alpha}a_{\beta}+\varepsilon x_{3}\partial_{\alpha\beta}a_{3}\right)\\ &=b_{\alpha\beta}-\varepsilon x_{3}b_{\alpha}^{\sigma}b_{\sigma\beta}.\end{aligned}$$

Les relations

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{p}\left(\varepsilon\right)\left(x\right)=g^{p}\left(\varepsilon\right).\partial_{\beta}g_{\alpha}\left(\varepsilon\right)=g^{p}\left(\varepsilon\right).\left(\partial_{\beta}a_{\alpha}+\varepsilon x_{3}\partial_{\alpha\beta}a_{3}\right),$$

donnent :

$$\partial_3 \Gamma^p_{\alpha\beta}(\varepsilon) = \partial_3 g^p(\varepsilon) . \partial_\beta a_\alpha + O(\varepsilon).$$

Soit :

$$\|W\|_{1,\infty,\overline{\Omega}} = \|W\|_{0,\infty,\overline{\Omega}} + \sum_i \|\partial_i W\|_{0,\infty,\overline{\Omega}}.$$

Les fonctions

$$g_{\alpha\beta}(\varepsilon) = (a_\alpha + \varepsilon x_3 \partial_\alpha a_3) . (a_\beta + \varepsilon x_3 \partial_\beta a_3),$$

se composent des dérivées d'ordre un et deux de $\theta$ , sachant que $\theta \in C^3\left(\overline{\omega}, \mathbb{R}^3\right)$ , on déduit qu'il existe une constante $c_1$ telle que :

$$g_{\alpha\beta}(\varepsilon) = a_{\alpha\beta} + \varepsilon g^1_{\alpha\beta}, \text{ avec } \|g^1_{\alpha\beta}\|_{1,\infty,\overline{\Omega}} \leq c_1.$$

Alors : $g(\varepsilon) - a = O(\varepsilon)$ , et il existe une constante $c_2$ telle que :

$$g^{\alpha\beta}(\varepsilon) = a^{\alpha\beta} + \varepsilon g^{\alpha\beta,1}, \text{ avec } \|g^{\alpha\beta,1}\|_{1,\infty,\overline{\Omega}} \leq c_2.$$

Les relations $\partial_3 \Gamma^k_{\alpha\beta}(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ existent d'après les données suivantes :

$$g^\alpha(\varepsilon) = g^{\alpha\beta}(\varepsilon) \ g_\beta(\varepsilon) \text{ et } g^3(\varepsilon) = a^3.$$

Tant que les vecteurs $a_\alpha$ sont linéairement indépendants pour tout point de $\overline{\omega}$ , il existe des constantes $a_0$ et $a_1$ telles que :

$$0 < a_0 \leq a(y) \leq a_1, \forall \ y \in \overline{\omega}.$$

Le comportement asymptotique de la fonction $g(\varepsilon)$ donne, si $\varepsilon_0 > 0$ (est choisi dans le théorème 3.1.1, Ciarlet P. G. [6]), il existe deux constantes $g_0$ et $g_1$ telles que :

$$0 < g_0 \leq g(\varepsilon) \leq g_1 \text{ pour tout } x \in \overline{\Omega} \text{ et tout } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Finallement, il est claire que les relations $\Gamma^{3}_{\alpha 3}(\varepsilon) = \Gamma^{k}_{33}(\varepsilon) = 0$ sont conséquences immédiates des relations $\Gamma^{3,\varepsilon}_{\alpha 3} = \Gamma^{k,\varepsilon}_{33} = 0$ (section 1.4). ■

D'après (2.11) et le théorème précédent, on obtient le développement asymptotique de $E_{i\|j}(\varepsilon)(u(\varepsilon))$ et $\digamma_{i\|j}(\varepsilon)(u(\varepsilon), v)$.

$$E_{3\|3}(\varepsilon)(u(\varepsilon)) = \frac{1}{\varepsilon^2}E^{-2}_{3\|3} + \frac{1}{\varepsilon}E^{-1}_{3\|3} + E^{0}_{3\|3} + \varepsilon E^{1}_{3\|3} + ...,$$

$$E_{3\|\alpha}(\varepsilon)(u(\varepsilon)) = E_{\alpha\|3}(\varepsilon)(u(\varepsilon)) = \frac{1}{\varepsilon}E^{-1}_{3\|\alpha} + E^{0}_{3\|\alpha} + \varepsilon E^{1}_{3\|\alpha} + ...,$$

$$E_{\alpha\|\beta}(\varepsilon)(u(\varepsilon)) = E^{0}_{\alpha\|\beta} + \varepsilon E^{1}_{\alpha\|\beta} + ...,$$

$$\digamma_{3\|3}(\varepsilon)(u(\varepsilon), v) = \frac{1}{\varepsilon^2}\digamma^{-2}_{3\|3}(v) + \frac{1}{\varepsilon}\digamma^{-1}_{3\|3}(v) + \digamma^{0}_{3\|3}(v) + \varepsilon \digamma^{1}_{3\|3}(v) + ...,$$

$$\digamma_{3\|\alpha}(\varepsilon)(u(\varepsilon), v) = \digamma_{\alpha\|3}(\varepsilon)(u(\varepsilon), v) = \frac{1}{\varepsilon}\digamma^{-1}_{3\|\alpha}(v) + \digamma^{0}_{3\|\alpha}(v) + \varepsilon \digamma^{1}_{3\|\alpha}(v) + ...,$$

$$\digamma_{\alpha\|\beta}(\varepsilon)(u(\varepsilon), v) = \digamma^{0}_{\alpha\|\beta}(v) + \varepsilon \digamma^{1}_{\alpha\|\beta}(v) + ... \quad .$$

Finalement, nous énonçons un résultat utilisé plusieurs fois dans l'analyse asymptotique de $P(\varepsilon, \Omega)$.

**Théorème 8 :** *Soit* $u \in L^1(\Omega)$ *tel que :* $\int_\Omega u.\partial_3 v \; dx = 0$, *pour tout*

$$v \in \psi(\Omega) = \left\{ v \in (v_i) \in W^{1,4}(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \right\} \text{ alors } u = 0.$$

**Preuve :** On considère en particulier $v \in D(\Omega) \subset \psi(\Omega)$. On a alors

$$-\int_\Omega \partial_3 u.v dx = 0 \text{ pour tout } v \in D(\Omega),$$

donc $\partial_3 u = 0$ dans $\Omega$. On considère maintenant des fonctions tests de la forme $v = x_3 \xi$ avec $\xi \in D(\omega)$ ; ainsi $\int_\Omega u.\xi \; dx = 0$ : pour tout $\xi \in D(\omega)$. On en conclut que $u = 0$ dans $\omega$, ce qui est équivaut à $u = 0$ dans $\Omega$. ■

**Hypothèse sur le tenseur de rigidité** -Nous supposons que le tenseur de rigidité défini sur $\omega \times \left]-1,+1\right[$, $A(\varepsilon)$ est indépendant de $\varepsilon$, c'est à dire qu'il existe un tenseur $A$ indépendant de $\varepsilon$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \overline{\Omega},\ A^{\varepsilon}\left(x_1, x_2, \varepsilon x_3\right) = A\left(x\right). \tag{2.12}$$

Dans le cas isotrope, en notant $\widehat{\lambda^{\varepsilon}}\left(\widehat{x^{\varepsilon}}\right)$ et $\widehat{\mu^{\varepsilon}}\left(\widehat{x^{\varepsilon}}\right)$ les constantes de Lamé au point $\widehat{x^{\varepsilon}}$ de $\widehat{\Omega^{\varepsilon}}$, nous avons :

$$\widehat{A^{\varepsilon}_{ijkl}}\left(\widehat{x^{\varepsilon}}\right) = \widehat{\lambda^{\varepsilon}}\left(\widehat{x^{\varepsilon}}\right)\delta_{ij}\delta_{kl} + \widehat{\mu^{\varepsilon}}\left(\widehat{x^{\varepsilon}}\right)\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right), \tag{2.13}$$

l'hypothèse (2.12) implique qu'il existe deux applications $\lambda$ et $\mu$ de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ telles que (voir Patrick G. [15]) :

$$\forall x \in \Omega,\ \widehat{A_{ijkl}}\left(x\right) = \lambda\left(x\right)\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(x\right)\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right). \tag{2.14}$$

Lorsque le matériau est homogène, l'hypothèse (2.12) implique qu'il existe un tenseur $A$ du quatrième ordre tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \Omega,\ A\left(\varepsilon\right)\left(x_1, x_2, \varepsilon x_3\right) = A.$$

Nous notons $A^{ijkl}\left(x\right)$ les composantes du tenseur $A\left(x\right)$ sur la base

$$g_i\left(\varepsilon\right).g_j\left(\varepsilon\right).g_k\left(\varepsilon\right).g_l\left(\varepsilon\right).$$

Quand $A\left(x\right)$ vérifie la condition (2.12), nous avons :

$$\left\{\begin{array}{c} A^{ijkl}\left(x\right) \in L^{\infty}\left(\Omega\right) \\ A^{ijkl}\left(x\right) = A^{jikl}\left(x\right) = A^{klij}\left(x\right) = A^{klji}\left(x\right) \\ \exists C \succ 0, \forall x \in \Omega, A^{ijkl}\left(x\right)\tau_{kl}\tau_{ij} \geq C\ \tau_{ij}\tau_{ij}, \forall\ \tau_{ij} = \tau_{ji} \end{array}\right. . \tag{2.15}$$

Nous allons identifier, lors de l'analyse asymptotique, une loi de comportement limite.

Pour tout $x = (y, x_3) \in \overline{\Omega}$, nous pouvons décomposer $A(x)$ sur la base

$$a_i(y).a_j(y).a_k(y).a_l(y) \ .$$

Autrement dit, $A(x)$ s'écrit

$$A(x) = A^{ijkl}(0) \ \ (x) \ \ a_i(y).a_j(y).a_k(y).a_l(y), \tag{2.16}$$

dans le cas particulier d'un matériau isotrope, les coefficients $A^{ijkl}(0)$ sont donnés par :

$$A^{ijkl}(0)(x) = \lambda(x)\, a^{ij}(y)\, a^{kl}(y) + \mu(x)\left(a^{ik}(y)\, a^{jl}(y) + a^{il}(y)\, a^{jk}(y)\right),$$

telle que $\lambda(x)$ et $\mu(x)$ sont les constantes de Lamé et :

$$A^{\alpha\beta\gamma\delta}(0)(x) = \lambda(x)\, a^{\alpha\beta}(y)\, a^{\gamma\delta}(y) + \mu(x)\left(a^{\alpha\gamma}(y)\, a^{\beta\delta}(y) + a^{\alpha\delta}(y)\, a^{\beta\gamma}(y)\right),$$

$$A^{\alpha\beta 33}(0)(x) = \lambda(x)\, a^{\alpha\beta}(y),\, A^{\alpha 3\gamma 3}(0)(x) = \mu(x)\, a^{\alpha\gamma}(y),\, A^{3333}(0)(x) = \lambda(x) + 2\mu(x),$$

$$A^{\alpha\beta\gamma 3}(0)(x) = A^{\alpha 333}(0)(x) = 0.$$

On sait que pour un matériau homogène et isotrope de constantes de Lamé $\lambda$ et $\mu$, la loi de comportement tridimensionnelle est donnée par

$$A^{ijkl}(0)(x) = \lambda a^{ij}(y)\, a^{kl}(y) + \mu\left(a^{ik}(y)\, a^{jl}(y) + a^{il}(y)\, a^{jk}(y)\right), \tag{2.17}$$

fournit la loi de comportement limite (voir Miara B. [13])

$$D^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} a^{\alpha\beta} a^{\gamma\delta} + \mu\left(a^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta} + a^{\alpha\delta} a^{\beta\gamma}\right). \tag{2.18}$$

**Lemme 9 :** Pour tout $x \in \Omega$, la matrice $\left(A^{i3j3}(0)\right)(x)$ est inversible.

**Preuve :** Pour tout $x = (y, x_3)$, la forme bilinéaire définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$(u, v) \to A^{i3j3}(x)\, u_i v_j$$

est, d'après l'hypothèse (2.15), symétrique et coercitive et vérifie :

$$\forall v \in \mathbb{R}^3, A^{i3j3}(x)\, v_i v_j \geq C v.v$$

la forme bilinéaire est donc définie positive. la matrice $\left(A^{i3j3}(0)\right)(x)$ est la matrice représentant cette forme bilinéaire dans la base $(a_i(y).a_j(y).a_k(y).a_l(y))$. Elle est donc inversible.

■

Nous notons $d(x) = (d_{ij}(x))$ son inverse, c'est une matrice symétrique. Nous définissons, pour $x = (y, x_3) \in \Omega$, un tenseur $D(x)$ par

$$D(x) = D^{\alpha\beta\gamma\delta}(x)\ \ a_\alpha(y).a_\beta(y).a_\gamma(y).a_\delta(y),$$

telle que l'application $D(x) : S^2 \to S^2$, où $S^2$ est l'espace des tenseurs symétriques d'ordre 2, définie par $(D(x)X)^{\alpha\beta} = D^{\alpha\beta\gamma\delta}(x)\, X_{\gamma\delta}, \forall X = (X_{\alpha\beta}) \in S^2$, est inversible. Son inverse l'application $D^{-1}(x) : S^2 \to S^2, \left(D^{-1}(x)\, Y\right)_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta\gamma\delta}(0)(x)\, Y^{\gamma\delta}, \forall Y \in S^2$, $(S_{ijkl}(0)(x)$ sont les composantes du tenseur $S(\varepsilon)(x)$ dans la base $\left(a^i(y).a^j(y).a^k(y).a^l(y)\right)$, on obtient (voir Chacha D. A. [3])

$$D^{\alpha\beta\gamma\delta}(x) = A^{\alpha\beta\gamma\delta}(0)(x) - A^{\alpha\beta i3}(0)(x)\, d_{ij}(x)\, A^{j3\gamma\delta}(0)(x), \tag{2.19}$$

on pose

$$S_{ijkl}(\varepsilon)(x) = S_{ijkl}(0)(x) + \varepsilon x_3 S^1_{ijkl}(x) + \varepsilon^2 x_3^2 S^2_{ijkl}(x) + ...,$$

Les propriétés de symétrie de $A$ et de $d$ impliquent que

$$D^{\alpha\beta\gamma\delta}(x) = D^{\beta\alpha\gamma\delta}(x) = D^{\gamma\delta\alpha\beta}(x),$$

par conséquent, $D(x)$ est un tenseur symétrique.

**Lemme 10 :** Le champ de tenseur $D$ est uniformément coercif, c'est à dire, il existe $C > 0$ telle que :

$$\forall x \in \Omega, D^{\alpha\beta\gamma\delta}(x) X_{\gamma\delta} X_{\alpha\beta} \geq C\ X_{\alpha\beta}.X_{\alpha\beta}, X_{\alpha\beta} = X_{\beta\alpha}. \tag{2.20}$$

**Preuve :** voir Patrick G. [15]. ■

**Lemme 11 :** Dans le cas où le matériau est isotrope, les coefficients $D^{\alpha\beta\gamma\delta}(x)$ ont l'expression usuelle

$$D^{\alpha\beta\gamma\delta}(x) = \frac{2\lambda(x)\mu(x)}{\lambda(x) + 2\mu(x)} a^{\alpha\beta}(y) a^{\gamma\delta}(y) + \mu(x) \left( a^{\alpha\gamma}(y) a^{\beta\delta}(y) + a^{\alpha\delta}(y) a^{\beta\gamma}(y) \right), \tag{2.21}$$

où $\lambda(x)$, $\mu(x)$ sont les deux constantes de Lamé au point $x$.

**Preuve :** Nous ne tenons pas compte du point $x$ dans cette démonstration afin d'alléger les écritures.

Dans le cas isotrope

$$A^{ijkl}(0) = \lambda a^{ij} a^{kl} + \mu \left( a^{ik} a^{jl} + a^{il} a^{jk} \right)$$

La matrice $\left(A^{i3j3}(0)\right)(x)$ est donc $\begin{pmatrix} \mu a^{11} & \mu a^{12} & 0 \\ \mu a^{21} & \mu a^{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2\mu \end{pmatrix}$.

Un simple calcul montre que

$$d = \begin{pmatrix} \mu^{-1} a_{11} & \mu^{-1} a_{12} & 0 \\ \mu^{-1} a_{21} & \mu^{-1} a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda + 2\mu)^{-1} \end{pmatrix}$$

Nous avons aussi

$$A^{\alpha\beta i3}(0) = \lambda a^{\alpha\beta} a^{i3}, A^{j3\gamma\delta}(0) = \lambda a^{\gamma\delta} a^{j3}.$$

Ainsi

$$A^{\alpha\beta i3}(0)\, d_{ij} A^{j3\gamma\delta}(0) = \frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu} a^{\alpha\beta} a^{\gamma\delta}.$$

En reportant dans la définition (2.21) du tenseur $D$, nous obtenons le résultat. ■

Nous commençons par un lemme décrivant le comportement des composantes du tenseur élastique lorsque $\varepsilon$ tend vers zéro. Nous notons $\|f\|_\infty$ la norme habituelle d'une fonction $f \in L^\infty(\Omega)$.

**Lemme 12 :**

$$\left\| A^{ijkl}(\varepsilon) - A^{ijkl}(0) \right\|_\infty \leq C_1 \varepsilon \tag{2.22}$$

**Preuve :** Nous avons, pour tout $x = (y, x_3) \in \Omega$,

$$\begin{aligned} g_\alpha(\varepsilon)(x) &= a_\alpha(y) + \varepsilon x_3 \partial_\alpha a_3(y), \\ g_3(\varepsilon)(x) &= g^3(\varepsilon)(x) = a_3(y), \\ g^\alpha(\varepsilon)(x) &= a^\alpha(y) + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

comme

$$A^{ijkl}(\varepsilon)(x) = A(x)\, g^i(\varepsilon)(x) . g^j(\varepsilon)(x) . g^k(\varepsilon)(x) . g^l(\varepsilon)(x),$$

on a donc

$$\exists C > 0, \left| A^{ijkl}(\varepsilon)(x) - A(x)\ \ a^i(y) . a^j(y) . a^k(y) . a^l(y) \right| \leq C\varepsilon \ \ \text{p.p.x.}$$

Nous obtenons donc bien le résultat annoncé. ■

**Remarque 13 :** Tout au long de l'analyse asymptotique ; on supposera à chaque fois que l'ordre des forces qui convient est connu.

### 2.3.1 Modèles formels de coques membranaires

On se propose de donner quelques modèles bidimensionnels de coques membranaires obtenus par l'analyse asymptotique formelle à partir du modèle tridimensionnel de coques élastiques minces constituées d'un matériau anisotrope et non homogène. On donne également les équations formelles vérifiées par le tenseur limite des contraintes.

On suppose qu'il existe deux fonctions $f^0 \in \left(L^2(\Omega)\right)^3$ et $h^1 \in \left(L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)\right)^3$ telles que :

$$f(\varepsilon)(x) = \varepsilon^0 f^0(x) \text{ pour tout } x \in \Omega, \tag{2.23}$$

$$h(\varepsilon)(x) = \varepsilon^1 h^1(x) \text{ pour tout } x \in \Gamma_+ \cup \Gamma_-. \tag{2.24}$$

et

$$Y_F(\omega) = \left\{\eta \in \left(W^{1,4}(\omega)\right)^3 ; \eta = 0 \text{ sur } \gamma_0,\ E^0_{\alpha\|\beta}(\eta) = 0\right\} = \{0\},$$

On substitue (2.23), (2.24) dans (2.4), et on identifie les termes du même ordre de $\varepsilon$, on obtient à l'ordre $\varepsilon^{-1}$, $\varepsilon^0$ et $\varepsilon^1$ respectivement :

$$\left(P^{-1}\right)\begin{cases} \forall \tau \in \Sigma : \int_\Omega \sqrt{a(y)} E^{-2}_{3\|3} \tau^{33} dx = 0 \\ \forall v \in V(\Omega) : \int_\Omega \sqrt{a(y)} \sigma^{0,33} F^{-2}_{3\|3}(v)\, dx = 0 \end{cases}, \tag{2.25}$$

$$\left(P^{0}\right)\begin{cases} \forall \tau \in \Sigma : \int_\Omega \left[\sqrt{a(y)}\left\{E^{-1}_{3\|3}\tau^{33} + 2E^{-1}_{3\|\alpha}\tau^{3\alpha}\right\} + x_3\left(\sqrt{g}\right)^1(x)\, E^{-2}_{3\|3}\tau^{33}\right] dx = 0 \\ \forall v \in V(\Omega) : \int_\Omega \left[\sqrt{a(y)}\left\{\sigma^{0,ij} F^{-1}_{i\|j}(v) + \sigma^{1,33} F^{-2}_{3\|3}(v)\right\} + x_3\left(\sqrt{g}\right)^1(x)\, \sigma^{0,33} F^{-2}_{3\|3}(v)\right] dx = 0 \end{cases}, \tag{2.26}$$

$$
\left(P^{1}\right)\left\{\begin{array}{c}
\forall \tau \in \Sigma : \int_{\Omega} \sqrt{a\left(y\right)} S_{ijkl}\left(0\right)\left(x\right)\sigma^{0,kl}\tau^{ij}dx = \\
= \int_{\Omega}\left[\sqrt{a\left(y\right)} E_{i\|j}^{0}\tau^{ij} + x_{3}\left(\sqrt{g}\right)^{1}\left(x\right)E_{i\|j}^{-1}\tau^{ij} + x_{3}^{2}\left(\sqrt{g}\right)^{2}\left(x\right)E_{3\|3}^{-2}\tau^{33}\right]dx, \\
\forall v \in V\left(\Omega\right) : \int_{\Omega}\left[\sqrt{a\left(y\right)}\left\{\sigma^{0,ij}F_{i\|j}^{0}\left(v\right) + \sigma^{1,ij}F_{i\|j}^{-1}\left(v\right) + \sigma^{2,33}F_{3\|3}^{-2}\left(v\right)\right\}\right]dx + \\
+ \int_{\Omega}\left[x_{3}\left(\sqrt{g}\right)^{1}\left(x\right)\left\{\sigma^{0,ij}F_{i\|j}^{-1}\left(v\right) + \sigma^{1,33}F_{3\|3}^{-2}\left(v\right)\right\} + x_{3}^{2}\left(\sqrt{g}\right)^{2}\left(x\right)\sigma^{0,33}F_{3\|3}^{-2}\left(v\right)\right]dx = \\
= \int_{\Omega}\sqrt{a\left(y\right)} f^{0,i}v_{i}dx + \int_{\Gamma_{+}\cup\Gamma_{-}}\sqrt{a\left(y\right)} h^{1,i}v_{i}dy,
\end{array}\right. \tag{2.27}
$$

tels que :

$$
\sqrt{g\left(\varepsilon\right)}\left(x\right) = \sqrt{a\left(y\right)} + \varepsilon x_{3}\left(\sqrt{g}\right)^{1}\left(x\right) + \varepsilon^{2}x_{3}^{2}\left(\sqrt{g}\right)^{2}\left(x\right) + ..., \forall x \in \Omega. \tag{2.28}
$$

Nous introduisons dans la proposition suivante le problème limite. Posons

$$
\begin{aligned}
A_{11}^{\alpha\beta\gamma\delta}\left(y\right) &= \int_{-1}^{+1} D^{\alpha\beta\gamma\delta}\left(y,x_{3}\right)\ dx_{3},\ A_{12}^{\alpha\beta\gamma\delta}\left(y\right) = \int_{-1}^{+1} x_{3}\ D^{\alpha\beta\gamma\delta}\left(y,x_{3}\right)\ dx_{3}\ , \\
A_{21}^{\alpha\beta\gamma\delta}\left(y\right) &= A_{12}^{\alpha\beta\gamma\delta}\left(y\right),\ A_{22}^{\alpha\beta\gamma\delta}\left(y\right) = \int_{-1}^{+1} x_{3}^{2}\ D^{\alpha\beta\gamma\delta}\left(y,x_{3}\right)\ dx_{3}\ .
\end{aligned}
$$

Nous remarquons que lorsque le matériau est homogène, comme $D\left(y,x_{3}\right)$ est indépendant de $x_{3}$, on a

$$
A_{11}^{\alpha\beta\gamma\delta}\left(y\right) = 2D^{\alpha\beta\gamma\delta}\left(y\right),\ A_{21}^{\alpha\beta\gamma\delta}\left(y\right) = A_{12}^{\alpha\beta\gamma\delta}\left(y\right) = 0 \text{ et } A_{22}^{\alpha\beta\gamma\delta}\left(y\right) = \frac{2}{3}D^{\alpha\beta\gamma\delta}\left(y\right).
$$

**Proposition 14 :** On suppose qu'il existe deux fonctions $f^{0} \in \left(L^{2}\left(\Omega\right)\right)^{3}$ et $h^{1} \in \left(L^{2}\left(\Gamma_{+}\cup\Gamma_{-}\right)\right)^{3}$ telles que :

$$
f\left(\varepsilon\right)\left(x\right) = \varepsilon^{0}f^{0}\left(x\right) \text{ pour tout } x \in \Omega,
$$

$$
h\left(\varepsilon\right)\left(x\right) = \varepsilon^{1}h^{1}\left(x\right) \text{ pour tout } x \in \Gamma_{+}\cup\Gamma_{-}.
$$

et l'ensemble de déplacements inextensionnels

$$
Y_{F}\left(\omega\right) = \left\{\eta \in \left(W^{1,4}\left(\omega\right)\right)^{3}\ ;\ \eta = 0 \text{ sur } \gamma_{0},\ E_{\alpha\|\beta}^{0}\left(\eta\right) = 0\right\},
$$

est réduit à $\{0\}$.

Alors le premier terme $u^0$ du développement asymptotique de $u(\varepsilon)$ est solution d'un problème bi-dimensionnel $P(\omega)$ indépendant de $x_3$ tel que :

$$(P(\omega))\begin{cases} \text{Trouver } u^0 \in V(\omega) \text{ telle que pour tout } \eta \in V(\omega) \ : \\ \int_\omega \sqrt{a(y)} A_{11}^{\alpha\beta\gamma\delta}(y) \ E^0_{\gamma\|\delta}(u^0) \digamma^0_{\alpha\|\beta}(u^0,\eta)\, dy = \int_\omega \sqrt{a(y)} p^{0,i}(y) \ \eta_i dy \end{cases} . \quad (2.29)$$

Le développement asymptotique de $\sigma^{\alpha\beta}(\varepsilon)$ commence par un terme d'ordre 0 et celui de $\sigma^{i3}(\varepsilon)$ par un terme d'ordre 1. Plus précisement, on obtient la loi de comportement limite

$$\sigma^{0,\alpha\beta} = D^{\alpha\beta\gamma\delta}(x) \ E^0_{\alpha\|\beta}(u^0), \forall x \in \Omega \quad (2.30)$$

tels que

$$V(\omega) = \left\{ v \in (v_i) \in \left(W^{1,4}(\omega)\right)^3, v = 0 \text{ sur } \gamma_0 \right\},$$

$$p^{0,i}(y) = \left( \int_{-1}^{+1} f^{0,i}(y,t)\, dt \right) + h_+^{1,i}(y) + h_-^{1,i}(y), \ \forall y \in \omega$$

$$E^0_{\alpha\|\beta}(u^0) = \frac{1}{2}\left( u^0_{\alpha\|\beta} + u^0_{\beta\|\alpha} + a^{pq} u^0_{p\|\alpha} u^0_{q\|\beta} \right),$$

$$\digamma^0_{\alpha\|\beta}(u^0,\eta) = \frac{1}{2}\left( \eta_{\beta\|\alpha} + \eta_{\alpha\|\beta} + a^{pq} u^0_{p\|\alpha} \eta_{q\|\beta} + a^{pq} \eta_{q\|\alpha} u^0_{p\|\beta} \right),$$

$$\eta_{q\|\beta} = \partial_\beta \eta_q - \Gamma^{r,0}_{\alpha q} \eta_r.$$

La preuve de cette proposition est divisé en trois étapes.

**Preuve :** Etape 1 :

La première équation du problème $\left(P^{-1}\right)$ est :

$$\forall \tau \in \Sigma : \int_\Omega \sqrt{a(y)} \ E^{-2}_{3\|3}(u^0) \ \tau^{33} dx = 0 \quad (2.31)$$

telle que :

$$E_{3\|3}^{-2}\left(u^{0}\ \right)=\frac{1}{2}\left(\partial_{3}u_{3}^{0}\ \partial_{3}u_{3}^{0}+a^{\alpha\beta}\left(y\right)\ \partial_{3}u_{\alpha}^{0}\ \partial_{3}u_{\beta}^{0}\right). \tag{2.32}$$

On pose $\tau^{33}=a_{3}\left(y\right)\widetilde{\tau}^{33},\forall\widetilde{\tau}^{33}\in L^{2}\left(\Omega\right),\left(a_{3}\left(y\right)\in C^{2}\left(\overline{\omega}\right)\right)$

dans l'équation (2.31) on obtient :

$$\forall\widetilde{\tau}^{33}\in L^{2}\left(\Omega\right):\int_{\Omega}\sqrt{a\left(y\right)}a_{3}\left(y\right)\ \partial_{3}u_{3}^{0}\ \partial_{3}u_{3}^{0}\ \widetilde{\tau}^{33}dx=0,$$

alors : $\partial_{3}u_{3}^{0}=0$ sur $\Omega$.

On pose maintenant $\tau^{33}=a_{\alpha\alpha}\left(y\right)\widetilde{\tau}^{33},\forall\widetilde{\tau}^{33}\in L^{2}\left(\Omega\right),\ \left(a_{\alpha\alpha}\left(y\right)\in C^{2}\left(\overline{\omega}\right)\right)$ dans l'équation (2.31) on obtient :

$$\forall\widetilde{\tau}^{33}\in L^{2}\left(\Omega\right):\int_{\Omega}\sqrt{a\left(y\right)}\left(\partial_{3}u_{\alpha}^{0}\right)^{2}\widetilde{\tau}^{33}dx=0,$$

alors $\partial_{3}u_{\alpha}^{0}=0$ sur $\Omega$. Par conséquence $\partial_{3}u^{0}=0$ sur $\Omega$.

Etape 2 :

D'après l'étape précédente,

$$F_{3\|3}^{-2}\left(u^{0},v\right)=a^{pq}\left(y\right)\ \partial_{3}u_{p}^{0}\ \partial_{3}v_{q}=0,\forall v\in V, \tag{2.33}$$

$$F_{3\|3}^{-1}\left(u^{0},u^{1},v\right)=\partial_{3}v_{3}\left(1+u_{3\|3}^{0}\right)+a^{\gamma\delta}\left(y\right)\ u_{\gamma\|3}^{0}\partial_{3}v_{\delta},\forall v\in V,$$

$$F_{\gamma\|3}^{-1}\left(u^{0},v\right)=F_{3\|\gamma}^{-1}\left(u^{0},v\right)=\frac{1}{2}\left(\partial_{3}v_{\gamma}+a^{\beta\sigma}\left(y\right)\ u_{\beta\|\gamma}^{0}\partial_{3}v_{\sigma}+u_{3\|\gamma}^{0}\partial_{3}v_{3}\right),\forall v\in V,$$

$$F_{\alpha\|\beta}^{-1}\left(u^{0},v\right)=0,$$

avec :

$$
\begin{aligned}
u^0_{\alpha\|\beta} &= \partial_\beta u^0_\alpha - \Gamma^{k,0}_{\alpha\beta} u^0_k, \\
u^0_{\alpha\|3} &= \partial_3 u^1_\alpha - \Gamma^{\gamma,0}_{\alpha 3} u^0_\gamma, \\
u^0_{3\|\beta} &= \partial_\beta u^0_3 - \Gamma^{\gamma,0}_{\beta 3} u^0_\gamma, \\
u^0_{3\|3} &= \partial_3 u^1_3.
\end{aligned}
$$

Et $E^{-1}_{3\|3}\left(u^0\right) = E^{-1}_{3\|\alpha}\left(u^0\right) = E^{-2}_{3\|3}\left(u^0\right) = 0$ .

La deuxième équation du problème $\left(P^0\right)$ est :

$$
\forall v \in V(\Omega) : \int_\Omega \sqrt{a(y)} \left\{ \sigma^{0,33} F^{-1}_{3\|3}\left(u^0, u^1, v\right) + \sigma^{0,3\alpha} F^{-1}_{3\|\alpha}\left(u^0, u^1, v\right) + \sigma^{0,\alpha 3} F^{-1}_{\alpha\|3}\left(u^0, u^1, v\right) \right\} dx = 0, \tag{2.34}
$$

on a alors :

$$
\begin{aligned}
&\forall v \in V(\Omega) : \int_\Omega \sqrt{a(y)} \left[ \left( \sigma^{0,33} \left(1 + u^0_{3\|3}\right) + \sigma^{0,\gamma 3} u^0_{3\|\gamma} \right) \partial_3 v_3 \right] dx + \\
&+ \int_\Omega \sqrt{a(y)} \left( \sigma^{0,33} a^{\gamma\delta}(y)\, u^0_{\gamma\|3} + \sigma^{0,\gamma 3} a^{\sigma\delta}(y)\, u^0_{\sigma\|\gamma} + \sigma^{0,3\delta} \right) \partial_3 v_\delta dx = 0,
\end{aligned} \tag{2.35}
$$

d'après le théorème 6 ; on obtient :

(coefficient de $\partial_3 v_3$ )

$$
\sigma^{0,33} \left(1 + u^0_{3\|3}\right) + \sigma^{0,\gamma 3} u^0_{3\|\gamma} = 0, \tag{2.36}
$$

(coefficient de $\partial_3 v_\delta$ )

$$
\sigma^{0,33} a^{\gamma\delta}(y)\, u^0_{\gamma\|3} + \sigma^{0,\gamma 3} a^{\sigma\delta}(y)\, u^0_{\sigma\|\gamma} + \sigma^{0,3\delta} = 0. \tag{2.37}
$$

On obtient le système d'équations

$$
\left\{
\begin{array}{c}
\sigma^{0,33} \left(1 + u^0_{3\|3}\right) + \sigma^{0,\gamma 3} u^0_{3\|\gamma} = 0, \\
\sigma^{0,33} a^{\gamma\delta}(y)\, u^0_{\gamma\|3} + \sigma^{0,\gamma 3} a^{\sigma\delta}(y)\, u^0_{\sigma\|\gamma} + \sigma^{0,3\delta} = 0,
\end{array}
\right. \tag{2.38}
$$

ce système d'équations linéaires admet une première solution triviale

$$\sigma^{0,\gamma 3} = \sigma^{0,3\gamma} = 0 \ , \ \sigma^{0,33} = 0. \tag{2.39}$$

Maintenant, on considère seulement cette solution, elle a été construite de façon à retrouver par linéarisation le modèle limite, le modèle linéaire de coques membranaires.

Dans le cas contraire, on trouve une deuxième solution

$$\begin{cases} 1 + u^0_{3\|3} = 0, \\ u^0_{\gamma\|3} = 0, \ \sigma^{0,3\gamma} = 0 \end{cases}$$

ce qui correspond à un autre modèle de coque membranaire (cf. Paragraphe suivant).

Etape 3 :

La première équation du problème $\left(P^1\right)$ (d'après (2.39)) est :

$$\forall \tau \in \Sigma : \int_\Omega \sqrt{a(y)} S_{ij\gamma\delta}(0)(x)\,\sigma^{0,\gamma\delta}\tau^{ij}dx = \int_\Omega \sqrt{a(y)} E^0_{i\|j}\left(u^0, u^1\right)\tau^{ij}dx, \tag{2.40}$$

telle que :

$$E^0_{i\|j}\left(u^0, u^1\right) = \frac{1}{2}\left(u^0_{i\|j} + u^0_{j\|i} + a^{ms}u^0_{m\|i}u^0_{s\|j}\right), \tag{2.41}$$

on prend dans (2.40) $\tau^{3\alpha} = \tau^{\alpha 3} = \tau^{33} = 0$, on obtient :

$$\forall \left(\tau^{\alpha\beta}\right) \in \left(L^2(\Omega)\right)^6 : \int_\Omega \sqrt{a(y)} S_{\alpha\beta\gamma\delta}(0)(x)\,\sigma^{0,\gamma\delta}\tau^{\alpha\beta}dx = \int_\Omega \sqrt{a(y)} E^0_{\alpha\|\beta}\left(u^0\right)\tau^{\alpha\beta}dx, \tau^{\alpha\beta} = \tau^{\beta\alpha}, \tag{2.42}$$

donc :

$$\sigma^{0,\alpha\beta}(x) = D^{\alpha\beta\gamma\delta}(x)\,E^0_{\gamma\|\delta}\left(u^0\right), \forall x \in \Omega. \tag{2.43}$$

La deuxième équation du problème $\left(P^1\right)$ (d'après (2.39)) est :

$$\forall v \in V(\Omega) : \int_\Omega \sqrt{a(y)} \left(\sigma^{0,\alpha\beta} F^0_{\alpha\|\beta}\left(u^0, v\right) + \sigma^{1,ij} F^{-1}_{i\|j}\left(u^0, u^1, v\right)\right) dx = \tag{2.44}$$

$$= \int_\Omega \sqrt{a(y)}\ f^{0,i}v_i dx + \int_{\Gamma_+\cup\Gamma_-} \sqrt{a(y)} h^{1,i}v_i dS. \tag{2.45}$$

Pour les fonctions tests $v = \eta \in V(\omega) = \left\{ \eta \in \left(W^{1,4}(\omega)\right)^3, \eta = 0 \text{ sur } \gamma_0 \right\}$ indépendantes de $x_3$, le problème variationnel (2.45) se réduit à $\left( \digamma^{-1}_{3\|\alpha}\left(u^0, u^1, \eta\right) = 0, \digamma^{-1}_{\alpha\|3}\left(u^0, u^1, \eta\right) = 0 \right)$ :

$$P(\omega) \begin{cases} \text{Trouver } u^0 \text{ tel que, } \forall \eta \in V(\omega) \ : \\ \int_\Omega \sqrt{a(y)} \sigma^{0,\alpha\beta} \digamma^0_{\alpha\|\beta}\left( u^0, \eta\right) dx = \int_\Omega \sqrt{a(y)} f^{0,i} \eta_i dx + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} \sqrt{a(y)} h^{1,i} \eta_i dS \end{cases} . \tag{2.46}$$

On pose :

$$\begin{aligned} h^{1,i}_+(y) &= h^{1,i}(y, +1), \forall y \in \omega \\ h^{1,i}_-(y) &= h^{1,i}(y, -1), \forall y \in \omega \\ p^{0,i}(y) &= \left( \int_{-1}^{+1} f^{0,i}(y,t)\, dt \right) + h^{1,i}_+(y) + h^{1,i}_-(y), \forall y \in \omega \end{aligned}$$

On a :

$$P(\omega) \begin{cases} \text{Trouver } u^0 \ \in V(\omega) \text{ telle que pour tout } \eta \in V(\omega) \ : \\ \int_\omega \sqrt{a(y)} A^{\alpha\beta\gamma\delta}_{11}(y)\, E^0_{\gamma\|\delta}\left(u^0\right) \digamma^0_{\alpha\|\beta}\left(u^0, \eta\right) dy = \int_\omega \sqrt{a(y)} p^{0,i}(y)\, \eta_i dy \end{cases} , \tag{2.47}$$

telle que :

$$E^0_{\alpha\|\beta}\left(u^0\right) = \frac{1}{2}\left( u^0_{\alpha\|\beta} + u^0_{\beta\|\alpha} + a^{pq} u^0_{p\|\alpha} u^0_{q\|\beta} \right), \tag{2.48}$$

$$\digamma^0_{\alpha\|\beta}\left(u^0, \eta\right) = \frac{1}{2}\left( \eta_{\beta\|\alpha} + \eta_{\alpha\|\beta} + a^{pq} u^0_{p\|\alpha} \eta_{q\|\beta} + a^{pq} \eta_{q\|\alpha} u^0_{p\|\beta} \right), \tag{2.49}$$

$$\eta_{q\|\beta} = \partial_\beta \eta_q - \Gamma^{r,0}_{\alpha q} \eta_r. \tag{2.50}$$

■

Si le matériau qui constitue la coque est isotrope et homogène avec l'ensemble des déplacements inextensionnels $Y_F(\omega) = \left\{ \eta \in \left(W^{1,4}(\omega)\right)^3 ; \eta = 0 \text{ sur } \gamma_0, \ E^0_{\alpha\|\beta}(\eta) = 0 \right\}$ est réduit à $\{0\}$, les forces appliquées de volume sont d'ordre 0 ($f^i\ (\varepsilon) = f^{i,0}$, où $f^{i,0}$ est indépendant de $\varepsilon$) et les forces appliquées de surface sont d'ordre 1 ($h^i\ (\varepsilon) = \varepsilon\ h^{i,1}$, où $h^{i,1}$ est indépendant de $\varepsilon$) , on obtient le premier terme $u^0$ du développement asymptotique de $u(\varepsilon)$, qui est indépendant de $x_3$ et solution du problème membranaire :

$$P(\omega) \left\{ \begin{array}{c} \text{Trouver } u^0 \text{ tel que pour tout } \eta \in V(\omega) \\ 2\int_\omega \sqrt{a(y)} b^{\alpha\beta\gamma\delta}(y)\, E^0_{\gamma\|\delta}\left(u^0\right)\ F^0_{\alpha\|\beta}\left(u^0, \eta\right) dy = \int_\omega \sqrt{a(y)} p^{0,i}(y)\, \eta_i dy \end{array} \right. , \quad (2.51)$$

tel que :

$$b^{\alpha\beta\gamma\delta}(y) = \left( \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} a^{\alpha\beta}(y)\, a^{\gamma\delta}(y) + \mu \left( a^{\alpha\gamma}(y)\, a^{\beta\delta}(y) + a^{\alpha\delta}(y)\, a^{\beta\gamma}(y) \right) \right), \forall y \in \omega. \quad (2.52)$$

Ce résultat est obtenu dans Miara B. [13].

Christophe C. [4] a montré que, si $Y_F(\omega) = \{0\}$ et si les composantes contravariantes des forces appliquées sont

$$f^i(\varepsilon)(x) = f^{i,0}(x)\ ,\ h^i(\varepsilon)(x) = \varepsilon\ h^{i,1}(x),$$

où $f^{i,0}$ et $h^{i,1}$ sont indépendants de $\varepsilon$, le développement asymptotique de $\sigma^{\alpha\beta}(\varepsilon)$ commence par un terme d'ordre 0 et celui de $\sigma^{i3}(\varepsilon)$ par un terme d'ordre 1. Plus précisement, on obtient la loi de comportement limite

$$\sigma^{\alpha\beta,0}(y) = b^{\alpha\beta\gamma\delta}(y)\ \ E^0_{\gamma\|\delta}\left(u^0\right), \forall y \in \omega,$$

ainsi que les composantes des $\sigma^{i3}(\varepsilon)$ :

$$\begin{aligned} \sigma^{\gamma 3,1} &= (I + 2AE)^{-1} \left[ \left(I + AU^T\right) T^1 + T^{33,1} Az \right], \\ \sigma^{33,1} &= \vartheta \left[ d\left(u^0\right) T^{33,1} - z^T\ cof\ \left(I + U^T A\right) T^1 \right], \end{aligned}$$

avec

$$d\left(u^0\right) = \det\ \ \left(I + U^T A\right),$$

et

$$\vartheta = \sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{2\lambda}{\lambda+2\mu} a^{\alpha\beta} E^0_{\alpha\|\beta}\right) \left[ \left(d\left(u^0\right)\right)^2 + z^T \ cof \ \left(I + U^T A\right) \ A \ cof^T \left(I + U^T A\right) \ z \right]}},$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{21} & a^{22} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u^0_{1\|1} & u^0_{1\|2} \\ u^0_{2\|1} & u^0_{2\|2} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} E^0_{1\|1} & E^0_{1\|2} \\ E^0_{2\|1} & E^0_{2\|2} \end{pmatrix},$$

$$z = \begin{pmatrix} u^0_{3\|1} \\ u^0_{3\|2} \end{pmatrix}, \quad T^1 = \begin{pmatrix} T^{13,1} \\ T^{23,1} \end{pmatrix},$$

tel que

$$T^{\gamma 3,1} = -h_-^{\gamma,1} - \int_{-1}^{x_3} f\left(y,t\right) \ dt + \frac{x_3+1}{2} \left\{ h_+^{\gamma,1} + h_-^{\gamma,1} + \int_{-1}^{+1} f\left(y,t\right) \ dt \right\}.$$

**Autre modèle formel de coques membranaires**

Une deuxième solution

$$\begin{cases} 1 + u^0_{3\|3} = 0 \\ u^0_{\gamma\|3} = 0, \sigma^{0,\gamma 3} = 0 \end{cases}, \tag{2.53}$$

du système

$$\begin{cases} \sigma^{0,33}\left(1 + u^0_{3\|3}\right) + \sigma^{0,\gamma 3} u^0_{3\|\gamma} = 0 \\ \sigma^{0,33} a^{\gamma\delta}\left(y\right) u^0_{\gamma\|3} + \sigma^{0,\gamma 3} a^{\sigma\delta}\left(y\right) u^0_{\sigma\|\gamma} + \sigma^{0,3\delta} = 0 \end{cases}, \tag{2.54}$$

donne un nouveau modèle limite.

**Proposition 15 :** Une deuxième solution du système (2.54) est donnée par

$$\begin{cases} 1 + u^0_{3\|3} = 0 \\ u^0_{\gamma\|3} = 0, \ \sigma^{0,\gamma 3} = 0 \end{cases},$$

alors, le problème variationnel limite qui lui est associé s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Trouver } u^0 \in V(\omega) \text{ telque pour tout } \eta \in V(\omega), \\ \int_\omega \sqrt{a(y)} \left(\int_{-1}^{+1} \sigma^{0,\alpha\beta}(y,x_3)\,dx_3\right) F^0_{\alpha\|\beta}(u^0,\eta)\,dy = \int_\omega \sqrt{a(y)} p^{0,i}(y)\,\eta_i dy\end{array}\right. \tag{2.55}$$

et $\sigma^{0,\alpha 3} = \sigma^{0,3\alpha} = 0, \sigma^{0,33}$, $\sigma^{0,\alpha\beta}$ sont solutions du système

$$\left\{\begin{array}{c} S_{3333}(0)\ \sigma^{0,33} + S_{33\alpha\beta}(0)\ \sigma^{0,\alpha\beta} = -\frac{1}{2}, \\ S_{\gamma\delta 33}(0)\ \sigma^{0,33} + S_{\gamma\delta\alpha\beta}(0)\ \sigma^{0,\alpha\beta} = E^0_{\gamma\|\delta}(u^0). \end{array}\right. . \tag{2.56}$$

**Preuve :** $u^0$ est indépendant de $x_3$ d'après l'étape 1 de la preuve de la proposition précédente.

D'après (2.53) on obtient

$$\begin{aligned} E^0_{3\|3}\left(u^0,u^1\right) &= -\frac{1}{2}, \\ E^0_{3\|\alpha}\left(u^0,u^1\right) &= 0. \end{aligned}$$

Alors l'équation 1 de $\left(P^1\right)$ devient :

$$\begin{aligned} \forall\tau \in \Sigma : & \int_\Omega \sqrt{a(y)} \left\{S_{ij33}(0)(x)\,\sigma^{0,33} + S_{ij\alpha\beta}(0)(x)\,\sigma^{0,\alpha\beta}\right\}\tau^{ij} dx = \\ = & \int_\Omega \sqrt{a(y)} \left\{-\frac{1}{2}\tau^{33} + E^0_{\gamma\|\delta}\left(u^0\right)\tau^{\gamma\delta}\right\} dx, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} S_{3333}(0)\ \sigma^{0,33} + S_{33\alpha\beta}(0)\ \sigma^{0,\alpha\beta} &= -\frac{1}{2}, \\ S_{\gamma\delta 33}(0)\ \sigma^{0,33} + S_{\gamma\delta\alpha\beta}(0)\ \sigma^{0,\alpha\beta} &= E^0_{\gamma\|\delta}\left(u^0\right), \end{aligned}$$

dans l'équation 2 de $\left(P^1\right)$ on prend $v = \eta \in V(\omega)$ indépendant de $x_3$, on trouve :

$$\int_\Omega \sqrt{a(y)} \left[\sigma^{0,\alpha\beta} F^0_{\alpha\|\beta}\left(u^0,\eta\right) + \sigma^{0,33} F^0_{3\|3}\left(u^0,u^1,u^2,\eta\right)\right] dx =$$

$$= \int_\Omega \sqrt{a(y)} f^{0,i}\eta_i dx + \int_{\Gamma_+\cup\Gamma_-} \sqrt{a(y)} h^{1,i}\eta_i dS,$$

tel que

$$\digamma^0_{3\|3}\left(u^0,u^1,u^2,v\right) = v_{3\|3} + \partial_3 u^2_3\ \partial_3 v_3 + a^{\gamma\sigma}\left(u^0_{\gamma\|3}\left(-\Gamma^{k,0}_{\sigma 3} v_k\right) + u^1_{\gamma\|3}\partial_3 v_\delta\right),$$

$$u^1_{\gamma\|3} = \partial_3 u^2_\gamma - \Gamma^{k,0}_{3\gamma} u^1_k - x_3 \Gamma^{k,1}_{3\gamma} u^0_k,$$

donc

$$\digamma^0_{3\|3}\left(u^0,u^1,u^2,\eta\right) = 0,\ \left(\eta \in V(\omega)\ \text{ et } u^0_{\gamma\|3} = 0\right),$$

on a

$$\int_\Omega \sqrt{a(y)}\ \sigma^{0,\alpha\beta} \digamma^0_{\alpha\|\beta}\left(u^0,\eta\right) dx = \int_\Omega \sqrt{a(y)} f^{0,i}\eta_i dx + \int_{\Gamma_+\cup\Gamma_-} \sqrt{a(y)} h^{1,i}\eta_i dS,$$

alors le problème limite est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^0 \in V(\omega)\ \text{ telque} \\ \int_\omega \sqrt{a(y)}\ \left(\int_{-1}^{+1}\sigma^{0,\alpha\beta}(y,x_3)\,dx_3\right)\ \digamma^0_{\alpha\|\beta}\left(u^0,\eta\right)\ dy = \int_\omega \sqrt{a(y)}\ P^{0,i}\eta_i dy \end{cases}$$

tel que $\sigma^{0,\alpha\beta}$ et $\sigma^{0,33}$ sont solutions du système

$$\begin{cases} S_{3333}(0)\ \sigma^{0,33} + S_{33\alpha\beta}(0)\ \sigma^{0,\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \\ S_{\gamma\delta 33}(0)\ \sigma^{0,33} + S_{\gamma\delta\alpha\beta}(0)\ \sigma^{0,\alpha\beta} = E^0_{\gamma\|\delta}(u^0) \end{cases}.$$

■

Dans le cas d'un matériau homogène et isotrope, si la solution du système (2.54) est donnée par

$$\begin{cases} 1 + u^0_{3\|3} = 0 \\ u^0_{\gamma\|3} = 0,\ \sigma^{0,\gamma 3} = 0 \end{cases},$$

alors le problème limite qui lui est associé est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^0 \in V(\omega)\ \text{ telque pourtout } \eta \in V(\omega), \\ \int_\omega \sqrt{a(y)} A^{\alpha\beta\gamma\delta} \widetilde{E}^0_{\alpha\|\beta}\left(u^0\right) \widetilde{F}^0_{\gamma\|\delta}\left(u^0,\eta\right)\ dy = \int_\omega \sqrt{a(y)} p^{0,i}(y)\,\eta_i\ dy \end{cases} \tag{2.57}$$

où

$$\begin{aligned} \widetilde{E}^0_{\alpha\|\beta}\left(u^0\right) &= E^0_{\alpha\|\beta}\left(u^0\right) - \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}a_{\alpha\beta}, \\ \widetilde{F}^0_{\gamma\|\delta}\left(u^0,\eta\right) &= F^0_{\gamma\|\delta}\left(u^0,\eta\right). \end{aligned}$$

Ce résultat est obtenu par Christophe C. [4]

Lorsque la solution formelle $u^0$ de (2.57) existe elle est un point stationnaire sur $V(\omega)$ de la fonctionnelle

$$J(\eta) = \frac{1}{2}\int_\omega \sqrt{a(y)}A^{\alpha\beta\gamma\delta}\widetilde{E}^0_{\alpha\|\beta}\left(u^0\right)\widetilde{F}^0_{\gamma\|\delta}\left(u^0,\eta\right)\,dy - \int_\omega \sqrt{a(y)}p^{0,i}(y)\,\eta_i\,dy.$$

### 2.3.2 Modèle formel couplé flexion-membrane

On se propose de donner un modèle bidimensionnel obtenu par l'analyse asymptotique formelle à partir du modèle tridimensionnel de coques élastiques minces constituées d'un matériau anisotrope et non homogène. On donne également les équations formelles vérifiées par le tenseur limite des contraintes.

On suppose qu'il existe deux fonctions $f^2 \in \left(L^2(\Omega)\right)^3$ et $h^3 \in \left(L^2(\Gamma_+\cup\Gamma_-)\right)^3$ telles que :

$$f(\varepsilon)(x) = \varepsilon^2 f^2(x) \text{ pour tout } x\in\Omega, \tag{2.58}$$

$$h(\varepsilon)(x) = \varepsilon^3 h^3(x) \text{ pour tout } x\in\Gamma_+\cup\Gamma_-, \tag{2.59}$$

et l'ensemble des déplacements inextensionnels

$$Y_F(\omega) = \left\{\eta\in\left(W^{1,4}(\omega)\right)^3 ;\ \eta = 0 \text{ sur } \gamma_0,\ E^0_{\alpha\|\beta}(\eta) = 0\right\},$$

n'est pas réduit à $\{0\}$.

On substitue (2.58), (2.59) et (2.11) dans $(P(\varepsilon,\Omega))$, et on identifie les termes du même ordre de $\varepsilon$, on obtient à l'ordre $\varepsilon^{-1}$, $\varepsilon^{0}$, $\varepsilon^{1}$, $\varepsilon^{2}$ et $\varepsilon^{3}$ respectivement :

$$\left(P^{-1}\right)\begin{cases}\forall\tau\in\Sigma:\int_\Omega\sqrt{a(y)}E^{-2}_{3\|3}\tau^{33}dx=0\\ \forall v\in V(\Omega):\int_\Omega\sqrt{a(y)}\sigma^{0,33}F^{-2}_{3\|3}(v)\,dx=0\end{cases},\tag{2.60}$$

$$\left(P^{0}\right)\begin{cases}\forall\tau\in\Sigma:\int_\Omega\left[\sqrt{a(y)}\left\{E^{-1}_{3\|3}\tau^{33}+2E^{-1}_{3\|\alpha}\tau^{3\alpha}\right\}+x_3\left(\sqrt{g}\right)^1(x)\,E^{-2}_{3\|3}\tau^{33}\right]dx=0\\ \forall v\in V(\Omega):\int_\Omega\left[\sqrt{a(y)}\left\{\sigma^{0,ij}F^{-1}_{i\|j}(v)+\sigma^{1,33}F^{-2}_{3\|3}(v)\right\}+x_3\left(\sqrt{g}\right)^1(x)\,\sigma^{0,33}F^{-2}_{3\|3}(v)\right]dx=0\end{cases},\tag{2.61}$$

$$\left(P^{1}\right)\begin{cases}\forall\tau\in\Sigma:\int_\Omega\sqrt{a(y)}S_{ijkl}(0)(x)\,\sigma^{0,kl}\tau^{ij}dx=\\ =\int_\Omega\left[\sqrt{a(y)}E^{0}_{i\|j}\tau^{ij}+x_3\left(\sqrt{g}\right)^1(x)\,E^{-1}_{i\|j}\tau^{ij}+x_3^2\left(\sqrt{g}\right)^2(x)\,E^{-2}_{3\|3}\tau^{33}\right]dx,\\ \forall v\in V(\Omega):\int_\Omega\left[\sqrt{a(y)}\left\{\sigma^{0,ij}F^{0}_{i\|j}(v)+\sigma^{1,ij}F^{-1}_{i\|j}(v)+\sigma^{2,33}F^{-2}_{3\|3}(v)\right\}\right]dx+\\ +\int_\Omega\left[x_3\left(\sqrt{g}\right)^1(x)\left\{\sigma^{0,ij}F^{-1}_{i\|j}(v)+\sigma^{1,33}F^{-2}_{3\|3}(v)\right\}+x_3^2\left(\sqrt{g}\right)^2(x)\,\sigma^{0,33}F^{-2}_{3\|3}(v)\right]dx=0\end{cases},\tag{2.62}$$

$$\left(P^{2}\right)\begin{cases}\forall\tau\in\Sigma:\int_\Omega\left[\sqrt{a(y)}\left\{S_{ijkl}(0)\,\sigma^{1,kl}+x_3S^1_{ijkl}(x)\,\sigma^{0,kl}\right\}+x_3\left(\sqrt{g}\right)^1(x)\,S_{ijkl}(0)\,\sigma^{0,kl}\right]\tau^{ij}dx=\\ =\int_\Omega\left[x_3^3\left(\sqrt{g}\right)^3(x)\,E^{-2}_{3\|3}\tau^{33}+\sqrt{a(y)}E^{1}_{i\|j}\tau^{ij}+x_3\left(\sqrt{g}\right)^1(x)\,E^{0}_{i\|j}\tau^{ij}+x_3^2\left(\sqrt{g}\right)^2(x)\,E^{-1}_{i\|j}\tau^{ij}\right]dx,\\ \forall v\in V(\Omega):\int_\Omega\left[\sqrt{a(y)}\left\{\sigma^{3,33}F^{-2}_{3\|3}(v)+\sigma^{2,ij}F^{-1}_{i\|j}(v)+\sigma^{1,ij}F^{0}_{i\|j}(v)+\sigma^{0,ij}F^{1}_{i\|j}(v)\right\}\right]dx\\ +\int_\Omega\left[x_3\left(\sqrt{g}\right)^1(x)\left\{\sigma^{2,33}F^{-2}_{3\|3}(v)+\sigma^{1,ij}F^{-1}_{i\|j}(v)+\sigma^{0,ij}F^{0}_{i\|j}(v)\right\}\right]dx+\\ +\int_\Omega\left[x_3^2\left(\sqrt{g}\right)^2(x)\left\{\sigma^{1,33}F^{-2}_{3\|3}(v)+\sigma^{0,ij}F^{-1}_{i\|j}(v)\right\}+x_3^3\left(\sqrt{g}\right)^3(x)\,\sigma^{0,33}F^{-2}_{3\|3}(v)\right]dx=0\end{cases}\tag{2.63}$$

$$
\left(P^3\right)\left\{\begin{array}{c}
\forall\tau\in\Sigma:\int_\Omega\left[\sqrt{a\left(y\right)}\left\{S_{ijkl}\left(0\right)\sigma^{2,kl}+x_3S^1_{ijkl}\left(x\right)\sigma^{1,kl}+x_3^2S^2_{ijkl}\left(x\right)\sigma^{0,kl}\right\}\right]\tau^{ij}dx+\\
+\int_\Omega\left[x_3\left(\sqrt{g}\right)^1\left(x\right)\left\{S_{ijkl}\left(0\right)\sigma^{1,kl}+x_3S^1_{ijkl}\left(x\right)\sigma^{0,kl}\right\}+x_3^2\left(\sqrt{g}\right)^2\left(x\right)S_{ijkl}\left(0\right)\sigma^{0,kl}\right]\tau^{ij}dx=\\
=\int_\Omega\left[x_3^4\left(\sqrt{g}\right)^4\left(x\right)E^{-2}_{3\|3}\tau^{33}+x_3^3\left(\sqrt{g}\right)^3\left(x\right)E^{-1}_{i\|j}\tau^{ij}+x_3\left(\sqrt{g}\right)^1\left(x\right)E^1_{i\|j}\tau^{ij}+\sqrt{a\left(y\right)}E^2_{i\|j}\tau^{ij}\right]dx,\\
\forall v\in V\left(\Omega\right):\int_\Omega\left[\sqrt{a\left(y\right)}\left\{\sigma^{4,33}F^{-2}_{3\|3}\left(v\right)+\sigma^{3,ij}F^{-1}_{i\|j}\left(v\right)+\sigma^{2,ij}F^{0}_{i\|j}\left(v\right)\right\}\right]dx+\\
+\int_\Omega\left[\sqrt{a\left(y\right)}\left\{\sigma^{0,ij}F^{2}_{i\|j}\left(v\right)+\sigma^{1,ij}F^{1}_{i\|j}\left(v\right)\right\}\right]dx+\\
+\int_\Omega\left[x_3\left(\sqrt{g}\right)^1\left(x\right)\left\{\sigma^{3,33}F^{-2}_{3\|3}\left(v\right)+\sigma^{2,ij}F^{-1}_{i\|j}\left(v\right)+\sigma^{0,ij}F^{1}_{i\|j}\left(v\right)+\sigma^{1,ij}F^{0}_{i\|j}\left(v\right)\right\}\right]dx+\\
+\int_\Omega\left[x_3^2\left(\sqrt{g}\right)^2\left(x\right)\sigma^{0,ij}F^{0}_{i\|j}\left(v\right)+x_3^3\left(\sqrt{g}\right)^3\left(x\right)\sigma^{0,ij}F^{-1}_{i\|j}\left(v\right)+x_3^4\left(\sqrt{g}\right)^4\left(x\right)\sigma^{0,33}F^{-2}_{3\|3}\left(v\right)\right]dx=\\
=\int_\Omega\sqrt{a\left(y\right)}f^{i,2}v_idx+\int_{\Gamma_+\cup\Gamma_-}\sqrt{a\left(y\right)}h^{3,i}v_idS.
\end{array}\right. \tag{2.64}
$$

Nous énonçons maintenant quelques lemmes qu'on aura besoin dans la preuve de la proposition suivante.

**Lemme 16 :** Le premier terme $u_0$ du développement asymptotique de $u\left(\varepsilon\right)$ est indépendant de $x_3$.

**Preuve :** Voir l'étape 1 de la preuve de la proposition 14. ■

**Lemme 17 :** $F_{i\|j}\left(u,v\right)$ est la dérivée de Gâteaux du tenseur des déformations de Green- Saint-Venant au point $u$ dans la direction $v$.

**Preuve :** La dérivée de Gâteaux de $E_{i\|j}\left(u\right)$ au point $u$ dans la direction $v$ est

$$\lim_{\theta\to0}\frac{E_{i\|j}(u+\theta v)-E_{i\|j}(u)}{\theta}=$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{1}{2\,\theta}\left(\theta v_{i\|j}+\theta v_{j\|i}+\theta g^{ms}\left(u_{m\|i}v_{s\|j}+u_{m\|j}v_{s\|i}\right)+\theta^2g^{ms}v_{m\|j}v_{s\|i}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(v_{j\|i}+v_{i\|j}+g^{ms}\left(x\right)\left(u_{m\|i}v_{s\|j}+u_{m\|j}v_{s\|i}\right)\right)=F_{i\|j}\left(u,v\right).$$

■

**Lemme 18 :** $E^0_{i\|j}=0$, $\sigma^{0,ij}=0$, $\sigma^{1,i3}=\sigma^{1,3i}=0$ et $\sigma^{1,\alpha\beta}=D^{\alpha\beta\gamma\delta}\left(x\right)$ $E^1_{\gamma\|\delta}\left(u^0,u^1\right).$

**Preuve :** La deuxième équation du problème $\left(P^0\right)$ est :

$$\forall v \in V\left(\Omega\right) : \int_\Omega \sqrt{a\left(y\right)}\sigma^{0,ij} F^{-1}_{i\|j}\left(u^0, u^1, v\right) dx = 0,$$

(puisque $F^{-2}_{3\|3}\left(u^0, v\right) = 0$, $u^0$ est indépendant de $x_3$), alors :

$$\left\{\begin{array}{c} \sigma^{0,33}\left(1 + u^0_{3\|3}\right) + \sigma^{0,\gamma 3} u^0_{3\|\gamma} = 0 \\ \sigma^{0,33} a^{\gamma\delta}\left(y\right) u^0_{\gamma\|3} + \sigma^{0,\gamma 3} a^{\sigma\delta}\left(y\right) u^0_{\sigma\|\gamma} + \sigma^{0,3\delta} = 0 \end{array}\right. ,$$

admet la solution triviale :

$$\sigma^{0,33} = 0,\ \sigma^{0,\gamma 3} = \sigma^{0,3\gamma} = 0. \tag{2.65}$$

La première équation du problème $\left(P^1\right)$ (d'après (2.65)) est :

$$\forall \tau \in \Sigma : \int_\Omega \sqrt{a\left(y\right)} S_{ij\gamma\delta}\left(0\right)\left(x\right) \sigma^{0,\gamma\delta}\ \tau^{ij} dx = \int_\Omega \sqrt{a\left(y\right)} E^0_{i\|j}\left(u^0, u^1\right) \tau^{ij} dx, \tag{2.66}$$

donc :

$$\sigma^{0,\alpha\beta}\left(x\right) = D^{\alpha\beta\gamma\delta}\left(x\right) E^0_{\gamma\|\delta}\left(u^0\right), \forall x \in \Omega. \tag{2.67}$$

La deuxième équation du problème $\left(P^1\right)$ (d'après (2.65)) est :

$$\forall v \in V\left(\Omega\right) : \int_\Omega \sqrt{a\left(y\right)} \left\{\sigma^{0,\alpha\beta} F^0_{\alpha\|\beta}\left(u^0, v\right) + \sigma^{1,ij} F^{-1}_{i\|j}\left(u^0, u^1, u^2, v\right)\right\} dx = 0, \tag{2.68}$$

on prend dans (2.68) $v = \eta \in V\left(\omega\right)$, ($F^{-1}_{i\|j}\left(u^0, u^1, u^2, \eta\right) = 0$) on obtient :

$$\forall \eta \in V\left(\omega\right) : \int_\Omega \sqrt{a\left(y\right)} \sigma^{0,\alpha\beta} F^0_{\alpha\|\beta}\left(u^0, \eta\right) dx = 0, \tag{2.69}$$

on substitue l'expression de $\sigma^{0,\alpha\beta}$ dans (2.69), on obtient :

$$\forall \eta \in V\left(\omega\right) : \int_\Omega \sqrt{a\left(y\right)} D^{\alpha\beta\gamma\delta}\left(x\right) E^0_{\gamma\|\delta}\left(u^0\right) F^0_{\alpha\|\beta}\left(u^0, \eta\right) dx = 0, \tag{2.70}$$

$\digamma^{0}_{\alpha\|\beta}\left(u^{0},\eta\right)$ est la dérivée de Gâteaux de $E^{0}_{\gamma\|\delta}\left(u^{0}\right)$ au point $u^{0}$ dans la direction $\eta$ (lemme 17), alors la solution $u^{0}$ de l'équation variationnelle (2.70) est le point stationnaire de la fonctionnelle positive

$$\eta \in V(\omega) \rightarrow \int_{\omega} \sqrt{a(y)} A_{11}^{\alpha\beta\gamma\delta}(y)\, E^{0}_{\gamma\|\delta}(\eta)\, E^{0}_{\alpha\|\beta}(\eta)\, dy,$$

si nous considérons que $u^{0}$ est le minimum de la fonctionnelle précédente, alors $E^{0}_{\gamma\|\delta}\left(u^{0}\right) = 0$, donc $u^{0}$ est un champ de déplacement inextentionnel. D'après (2.67) et (2.65) $\sigma^{0,ij} = 0$ et d'après (2.66) $E^{0}_{i\|j}\left(u^{0},u^{1}\right) = 0$.

On substitue ($\sigma^{0,ij} = 0$ et $\digamma^{-2}_{3\|3}\left(u^{0},v\right) = 0$) dans la deuxième équation du problème $\left(P^{1}\right)$, on obtient :

$$\forall v \in V(\Omega) : \int_{\Omega} \sqrt{a(y)} \sigma^{1,ij}\ \digamma^{-1}_{i\|j}\left(u^{0},u^{1},v\right)\ dx = 0, \tag{2.71}$$

d'après le théorème 6, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{c} \sigma^{1,33}\left(1+u^{0}_{3\|3}\right) + \sigma^{1,\gamma 3} u^{0}_{3\|\gamma} = 0 \\ \sigma^{1,33} a^{\gamma\delta}(y)\, u^{0}_{\gamma\|3} + \sigma^{1,\gamma 3} a^{\sigma\delta}(y)\ \ u^{0}_{\sigma\|\gamma} + \sigma^{1,3\delta} = 0 \end{array}\right. ,$$

ce système admet la solution triviale suivante :

$$\sigma^{1,33} = 0,\ \sigma^{1,\gamma 3} = \sigma^{1,3\gamma} = 0. \tag{2.72}$$

D'après les résultats précédents, la première équation du problème $\left(P^{2}\right)$ devient

$$\forall \tau \in \Sigma : \int_{\Omega} \sqrt{a(y)} S_{ij\gamma\delta}(0)(x)\, \sigma^{1,\gamma\delta} \tau^{ij} dx = \int_{\Omega} \sqrt{a(y)} E^{1}_{i\|j}\left(u^{0},u^{1},u^{2}\right) \tau^{ij} dx, \tag{2.73}$$

on déduit alors :

$$\sigma^{1,\alpha\beta} = D^{\alpha\beta\gamma\delta}(x)\, E^{1}_{\gamma\|\delta}\left(u^{0},u^{1}\right), \forall x \in \Omega. \tag{2.74}$$

■

**Lemme 19 :** Le système d'équations non linéaires :

$$\begin{cases} 2E^0_{1\|3} = 2E^0_{3\|1} = u^0_{1\|3} + u^0_{3\|1} + a^{\alpha\beta} u^0_{\alpha\|1} u^0_{\beta\|3} + u^0_{3\|1} u^0_{3\|3} = 0 \\ 2E^0_{2\|3} = 2E^0_{3\|2} = u^0_{2\|3} + u^0_{3\|2} + a^{\alpha\beta} u^0_{\alpha\|2} u^0_{\beta\|3} + u^0_{3\|2} u^0_{3\|3} = 0 \\ 2\ E^0_{3\|3} = 2\ u^0_{3\|3} + a^{\alpha\beta} u^0_{\alpha\|3} u^0_{\beta\|3} + u^0_{3\|3} u^0_{3\|3} = 0 \end{cases} ,$$

admet deux solutions, on s'intérèsse à la solution suivante (on retourne dans le cas linéaire)

$$\begin{cases} u^0_{1\|3} = -\left(1 + a^{\alpha 2} u^0_{\alpha\|2}\right) u^0_{3\|1} + a^{\alpha 2} u^0_{\alpha\|1} u^0_{3\|2}, \\ u^0_{2\|3} = a^{\alpha 1} u^0_{\alpha\|2} u^0_{3\|1} - \left(1 + a^{\alpha 1} u^0_{\alpha\|1}\right) u^0_{3\|2}, \\ u^0_{3\|3} = \left[1 - a^{\alpha\beta} u^0_{3\|\alpha} u^0_{3\|\beta}\right]^{\frac{1}{2}} - 1 = \\ = a^{\alpha\beta} u^0_{\alpha\|\beta} + a^{\alpha 1} a^{\beta 2} \left(u^0_{\alpha\|1} u^0_{\beta\|2} - u^0_{\alpha\|2} u^0_{\beta\|1}\right). \end{cases}$$

**Preuve :** Soit $Z$ est un vecteur et $A$, $M$ sont des matrices définies par

$$Z\left(u^0\right) = Z = \left(u^0_{3\|\alpha}\right),\ A = \left(a^{\alpha\beta}\right),\ M\left(u^0\right) = M = \begin{pmatrix} 1 + a^{\alpha 1} u^0_{\alpha\|1} & a^{\alpha 2} u^0_{\alpha\|1} \\ a^{\alpha 1} u^0_{\alpha\|2} & 1 + a^{\alpha 2} u^0_{\alpha\|2} \end{pmatrix}.$$

Si on annule le champ de déplacement $u^0$, la matrice $M$ se réduit à la matrice d'unité.

Par conséquence, on suppose que, au moins $u^0$ dans un voisinage compatible de 0, la matrice $M$ est inversible.

Les relations $E^0_{i\|3}\left(u^0, u^1\right) = 0$ s'écrivent comme :

$$\left(u^0_{\alpha\|3}\right) = -\left(1 +\ u^0_{3\|3}\right) M^{-1} Z,$$
$$\left(1 +\ u^0_{3\|3}\right)^2 \left(1 + Z^T M^{-T} A M^{-1} Z\right) = 1.$$

On démontre maintenant que :

$$1 + Z^T M^{-T} A M^{-1} Z = \frac{1}{d^2\left(u^0\right)},\ d\left(u^0\right) = \det M\left(u^0\right).$$

Puisque $u^0$ appartient à l'espace de déplacements inextensionnels,

$$E^0_{\alpha\|\beta}\left(u^0\right) = \frac{1}{2}\left(u^0_{\alpha\|\beta} + u^0_{\beta\|\alpha} + a^{\sigma\delta}u^0_{\sigma\|\alpha}u^0_{\delta\|\beta} + u^0_{3\|\alpha}u^0_{3\|\beta}\right) = 0,$$

alors :

$$U + U^T + U^T AU + ZZ^T = 0 \text{ avec } U = \left(u^0_{\alpha\|\beta}\right).$$

En plus :

$$M = I + U^T A.$$

$$\begin{aligned} MA^{-1}M^T &= A^{-1} + U + U^T + U^T AU = A^{-1} - ZZ^T \\ &= \left(I - ZZ^T A\right) A^{-1}, \end{aligned}$$

$$MA^{-1}M^T AZ = Z - Z\left(Z^T AZ\right) = \left(1 - Z^T AZ\right) Z,$$

$$AZ = \left(1 - Z^T AZ\right) M^{-T} AM^{-1} Z,$$

$$1 + Z^T M^{-T} AM^{-T} Z = \frac{Z^T AZ}{1 - Z^T AZ} + 1 = \frac{1}{1 - Z^T AZ}.$$

$$\begin{aligned} d^2\left(u^0\right) &= \det\left(MM^T\right) = \det(A)\det\left(MA^{-1}M^T\right) \\ &= \det(A)\det\left(\left(I - ZZ^T A\right) A^{-1}\right) \\ &= \det\left(I - ZZ^T A\right) = 1 - tr\left(ZZ^T A\right) + \det\left(ZZ^T A\right). \end{aligned}$$

$\det\left(ZZ^T A\right) = 0$, puisque la matrice $ZZ^T$ est singulière et :

$$d^2\left(u^0\right) = 1 - tr\left(ZZ^T A\right) = 1 - Z^T AZ = 1 - a^{\alpha\beta}u^0_{3\|\alpha}u^0_{3\|\beta}.$$

Alors, on obtient le résultat suivant :

$$\left(1 + \ u^0_{3\|3}\right)^2 = d^2\left(u^0\right) = \left(1 + a^{\alpha\beta}u^0_{\alpha\|\beta} + a^{\alpha 1}a^{\beta 2}\left(u^0_{\alpha\|1}u^0_{\beta\|2} - u^0_{\alpha\|2}u^0_{\beta\|1}\right)\right)^2.$$

Les deux solutions dans le cas non linéaire s'obtiennent si :

$$1+\ u^0_{3\|3}=d\left(u^0\right) \text{ où } 1+\ u^0_{3\|3}=-d\left(u^0\right).$$

Mais, dans le cas linéaire on obtient la solution unique $u^0_{3\|3,lin}=0$. Mais par le retour au cas linéaire dans le modèle non linéaire, on garde seulement la solution :

$$1+\ u^0_{3\|3}=d\left(u^0\right),\ \left(u^0_{\alpha\|3}\right)=-d\left(u^0\right)M^{-1}Z.$$

On note qu'on peut aussi écrire l'expréssion de $u^0_{3\|3}$ par la forme équivalente :

$$u^0_{3\|3}=a^{\alpha\beta}u^0_{\alpha\|\beta}+a^{\alpha1}a^{\beta2}\left(u^0_{\alpha\|1}u^0_{\beta\|2}-u^0_{\alpha\|2}u^0_{\beta\|1}\right).$$

■

**Proposition 20 :** Si l'espace $Y_F(\omega)$ des déplacements inextensionnels n'est pas réduit à $\{0\}$, on suppose qu'il existe $f^2\in\left(L^2(\Omega)\right)^3$ et $h^3\in\left(L^2(\Gamma_+\cup\Gamma_-)\right)^3$ indépendant de $\varepsilon$ telles que :

$$f(\varepsilon)=\varepsilon^2f^2,\ h(\varepsilon)=\varepsilon^3h^3,$$

Alors $u^0$ est indépendant de $x_3$ et le couple $\left(u^0,\zeta^1\right)$ satisfait le problème variationnel limite de dimension deux posé sur $\overline{\omega}$ :

$$\left\{\begin{array}{c}
\text{Trouver }\left(u^0,\zeta^1\right)\in\left(V_1(\omega),V(\omega)\right)\text{ tel que pour tout }(\eta,v)\in\left(Z\left(u^0\right)(\omega),V(\omega)\right)\\
\int_\omega\sqrt{a(y)}\left\{A^{\alpha\beta\gamma\delta}_{11}(y)\widetilde{E}^{11}_{\alpha\|\beta}\left(u^0,\zeta^1\right)\widetilde{F}^{11}_{\gamma\|\delta}\left(\zeta^1,\eta\right)+A^{\alpha\beta\gamma\delta}_{12}(y)\widetilde{E}^{11}_{\alpha\|\beta}\left(u^0,\zeta^1\right)\widetilde{F}^{12}_{\gamma\|\delta}\left(u^0,\eta\right)\ \right\}dy+\\
+\int_\omega\sqrt{a(y)}\left\{A^{\alpha\beta\gamma\delta}_{21}(y)\widetilde{E}^{12}_{\alpha\|\beta}\left(u^0\right)\widetilde{F}^{11}_{\gamma\|\delta}\left(\zeta^1,\eta\right)+A^{\alpha\beta\gamma\delta}_{22}(y)\widetilde{E}^{12}_{\alpha\|\beta}\left(u^0\right)\widetilde{F}^{12}_{\gamma\|\delta}\left(u^0,\eta\right)\right\}dy=\\
=\int_\omega\sqrt{a(y)}\left\{\int_{-1}^{+1}f^{i,2}dx_3+h^{i,3}_++h^{i,3}_-\right\}\eta_i\ dy,\\
\int_\omega\sqrt{a(y)}\left\{A^{\alpha\beta\gamma\delta}_{11}(y)F^0_{\alpha\|\beta}\left(u^0,\zeta^1\right)F^0_{\gamma\|\delta}\left(u^0,v\right)+A^{\alpha\beta\gamma\delta}_{12}(y)\widetilde{E}^{12}_{\alpha\|\beta}\left(u^0\right)F^0_{\gamma\|\delta}\left(u^0,v\right)\ \right\}dy=0.
\end{array}\right. \tag{2.75}$$

Tels que :

$$
\begin{aligned}
V_1(\omega) &= \left\{\eta \in \left(W^{2,4}(\omega)\right)^3; E^0_{\alpha\|\beta}(\eta) = 0,\ \text{sur } \omega;\ \eta = \partial_N\ \eta = 0 \text{ sur } \gamma_0\right\},\\
Z\left(u^0\right)(\omega) &= \left\{\eta \in \left(W^{2,4}(\omega)\right)^3; F^0_{\alpha\|\beta}\left(u^0,\eta\right) = 0,\ \text{sur } \omega;\ \eta = \partial_N\ \eta = 0 \text{ sur } \gamma_0\right\},\\
V(\omega) &= \left\{\eta \in \left(W^{1,4}(\omega)\right)^3, \eta = 0 \text{ sur } \gamma_0\right\},\\
E^1_{\alpha\|\beta}\left(u^0,u^1\right) &= \widetilde{E}^{11}_{\alpha\|\beta}\left(u^0,\zeta^1\right) + x_3\widetilde{E}^{12}_{\alpha\|\beta}\left(u^0\right),\\
F^1_{\gamma\|\delta}(\eta) &= \widetilde{F}^{11}_{\gamma\|\delta}(\eta) + x_3\widetilde{F}^{12}_{\gamma\|\delta}(\eta),\\
h^3_-(y) &= h^3(y,-1),\ h^3_+(y) = \ h^3(y,+1),\ \forall y \in \omega,\\
u^1 &= \zeta^1 + x_3\psi^1.
\end{aligned}
$$

**Preuve :** On divise cette preuve en deux étapes.

Etape1 : L'existence des expréssions de $u^1$, $E^1_{\alpha\|\beta}$ et $F^1_{\gamma\|\delta}$.

D'après le lemme 19, le terme $u^1$ dans le développement asymptotique (2.11) est de la forme

$$u^1 = \zeta^1 + x_3\psi^1,$$

où $\zeta^1, \psi^1$ sont indépendants de $x_3$, tel que

$$\psi^1_\alpha = \partial_3 u^1_\alpha = u^0_{\alpha\|3} - b^\sigma_\alpha u^0_\sigma,\ \psi^1_3 = \partial_3 u^1_3 = u^0_{3\|3},$$

plus précisement

$$
\begin{aligned}
\psi^1_1 &= -b^\sigma_1 u^0_\sigma - \left(1 + a^{\alpha 2}u^0_{\alpha\|2}\right)u^0_{3\|1} + a^{\alpha 2}u^0_{\alpha\|1}u^0_{3\|2},\\
\psi^1_2 &= -b^\sigma_2 u^0_\sigma + a^{\alpha 1}u^0_{\alpha\|2}u^0_{3\|1} - \left(1 + a^{\alpha 1}u^0_{\alpha\|1}\right)u^0_{3\|2},\\
\psi^1_3 &= a^{\alpha\beta}u^0_{\alpha\|\beta} + a^{\alpha 1}a^{\beta 2}\left(u^0_{\alpha\|1}u^0_{\beta\|2} - u^0_{\alpha\|2}u^0_{\beta\|1}\right),
\end{aligned}
$$

et la condition $\psi^1 \in V(\omega)$ implique :

$$u^0 \in V_1(\omega) = \left\{ \eta \in \left(W^{2,4}(\omega)\right)^3 ; E^0_{\alpha\|\beta}(\eta) = 0, \text{ sur } \omega;\ \eta = \partial_N\ \eta = 0 \text{ sur } \gamma_0 \right\}.$$

On démontre que

$$E^1_{\alpha\|\beta}\left(u^0, u^1\right) = \widetilde{E}^{11}_{\alpha\|\beta}\left(u^0, \zeta^1\right) + x_3 \widetilde{E}^{12}_{\alpha\|\beta}\left(u^0\right)$$

où

$$\begin{aligned}
\widetilde{E}^{11}_{\alpha\|\beta}\left(u^0, \zeta^1\right) &= F^0_{\alpha\|\beta}\left(u^0, \zeta^1\right), \\
\widetilde{E}^{12}_{\alpha\|\beta}\left(u^0\right) &= F^0_{\alpha\|\beta}\left(u^0, \psi^1\right) - \Gamma^{k,1}_{\alpha\beta} u^0_k - \frac{1}{2} a^{ij} \left( \Gamma^{k,1}_{i\alpha} u^0_{j\|\beta} + u^0_{i\|\alpha} \Gamma^{k,1}_{j\beta} \right) u^0_k + \frac{1}{2} g^{ij,1} u^0_{i\|\alpha} u^0_{j\|\beta}.
\end{aligned}$$

$$E^1_{\alpha\|\beta}\left(u^0, u^1\right) = \frac{1}{2}\left( u^1_{\alpha\|\beta} + u^1_{\beta\|\alpha} + a^{ij}\left( u^1_{i\|\alpha} u^0_{j\|\beta} + u^0_{i\|\alpha} u^1_{j\|\beta} \right) + x_3 g^{ij,1} u^0_{i\|\alpha} u^0_{j\|\beta} \right),$$

avec

$$u^1_{i\|\alpha} = \partial_\alpha u^1_i - \Gamma^{k,0}_{i\alpha} u^1_k - x_3 \Gamma^{k,1}_{i\alpha} u^0_k,$$

comme $u^1 = \zeta^1 + x_3 \psi^1$, on obtient

$$\begin{aligned}
u^1_{i\|\alpha} &= \zeta^1_{i\|\alpha} + x_3 \widehat{\psi}^1_{i\|\alpha},\ \zeta^1_{i\|\alpha} = \partial_\alpha \zeta^1_i - \Gamma^{k,0}_{i\alpha} \zeta^1_k, \\
\widehat{\psi}^1_{i\|\alpha} &= \psi^1_{i\|\alpha} - \Gamma^{k,1}_{i\alpha} u^0_k,\ \psi^1_{i\|\alpha} = \partial_\alpha \psi^1_i - \Gamma^{k,0}_{i\alpha} \psi^1_k,
\end{aligned}$$

et

$$E^1_{\alpha\|\beta}\left(u^0, u^1\right) = F^0_{\alpha\|\beta}\left(u^0, \zeta^1\right) + x_3 \widetilde{E}^{12}_{\alpha\|\beta}\left(u^0\right),$$

tel que $\widetilde{E}^{12}_{\alpha\|\beta}\left(u^0\right)$ est indépendant de $x_3$ et

$$\widetilde{E}^{12}_{\alpha\|\beta}\left(u^0\right) = F^0_{\alpha\|\beta}\left(u^0, \psi^1\right) - \left( \Gamma^{k,1}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\left( \Gamma^{k,1}_{i\alpha} u^0_{j\|\beta} + u^0_{i\|\alpha} \Gamma^{k,1}_{j\beta} \right) \right) u^0_k + \frac{1}{2} g^{\sigma\tau,1} u^0_{\sigma\|\alpha} u^0_{\tau\|\beta}.$$

Les quantités $g^{ij,1}$ , $\Gamma^{k,1}_{ij}$ se trouvent dans le développement de $g^{ij}(\varepsilon)$ , $\Gamma^k_{ij}(\varepsilon)$ respectivement (théorème 7).

Pour $v \in W^{1,4}(\Omega)$ ,

$$F_{\alpha\|\beta}(\varepsilon)(v) = \frac{1}{2}\left(v_{\alpha\|\beta} + v_{\beta\|\alpha} + g^{ij}(\varepsilon)\left(u_{i\|\alpha}(\varepsilon)v_{j\|\beta} + v_{i\|\alpha}u_{j\|\beta}(\varepsilon)\right)\right),$$

où

$$v_{j\|\beta} = v^0_{j\|\beta} - \varepsilon x_3 \Gamma^{k,1}_{j\beta} v_k - ..., \; v^0_{j\|\beta} = \partial_\beta v_j - \Gamma^{k*}_{j\beta} v_k.$$

Pour

$$u^1_{i\|\alpha} = \zeta^1_{i\|\alpha} + x_3 \widehat{\psi}^1_{i\|\alpha}, \; \widehat{\psi}^1_{i\|\alpha} = \psi^1_{i\|\alpha} - \Gamma^{k,1}_{i\alpha} u^0_k,$$

on obtient

$$F^1_{\alpha\|\beta}(v) = \widetilde{F}^{11}_{\alpha\|\beta}\left(\zeta^1, v\right) + x_3 \widetilde{F}^{12}_{\alpha\|\beta}\left(u^0, v\right),$$

où $\widetilde{F}^{11}_{\alpha\|\beta}\left(\zeta^1, v\right)$ , $\widetilde{F}^{12}_{\alpha\|\beta}\left(u^0, v\right)$ sont données par :

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}^{11}_{\alpha\|\beta}\left(\zeta^1, v\right) &= \frac{1}{2}a^{ij}\left(\zeta^1_{i\|\alpha}v^0_{j\|\beta} + v^0_{i\|\alpha}\zeta^1_{j\|\beta}\right), \\
\widetilde{F}^{12}_{\alpha\|\beta}\left(u^0, v\right) &= -\Gamma^{k,1}_{\alpha\beta}v_k + \frac{1}{2}a^{ij}\left(\widehat{\psi}^1_{i\|\alpha}v^0_{j\|\beta} + v^0_{i\|\alpha}\;\widehat{\psi}^1_{j\|\beta} - u^0_{i\|\alpha}\Gamma^{k,1}_{j\beta}v_k - \Gamma^{k,1}_{i\alpha}v_k\;u^0_{j\|\beta}\right) + \\
&\quad + \frac{1}{2}g^{\sigma\tau,1}\left(u^0_{\sigma\|\alpha}v^0_{\tau\|\beta} + u^0_{\sigma\|\beta}v^0_{\tau\|\alpha}\right).
\end{aligned}$$

En plus $\zeta^1$ vérifie l'équation

$$\begin{gathered}
\forall v \in V(\omega) : \textstyle\int_\omega \sqrt{a(y)}\left\{A^{\alpha\beta\gamma\delta}_{11}(y)\,F^0_{\alpha\|\beta}\left(u^0, \zeta^1\right)F^0_{\gamma\|\delta}\left(u^0, v\right) + \right. \\
\left. A^{\alpha\beta\gamma\delta}_{12}(y)\,\widetilde{E}^{12}_{\alpha\|\beta}\left(u^0\right)F^0_{\gamma\|\delta}\left(u^0, v\right)\right\}\;dy = 0,
\end{gathered} \tag{2.76}$$

(d'après la deuxième équation du problème $\left(P^2\right)$, $v$ est indépendant de $x_3$ ).

Etape 2 : l'obtention du modèle limite.

La deuxième équation du problème $\left(P^3\right)$ est :

$$\begin{aligned}
\forall v \;\in\; & V(\omega) : \int_\Omega \left[\sqrt{a(y)}\left\{\sigma^{2,ij}F^0_{i\|j}(v) + \sigma^{1,ij}F^1_{i\|j}(v)\right\} + x_3\sqrt{g^1(x)}\sigma^{1,ij}F^0_{i\|j}(v)\right]dx = \\
= & \int_\Omega \sqrt{a(y)}f^{i,2}v_i dx + \int_{\Gamma_+\cup\Gamma_-}\sqrt{a(y)}h^{3,i}v_i dS,
\end{aligned}$$

on prend $v=\eta\in Z\left(u^{0}\right)(\omega)$ tel que :

$$Z\left(u^{0}\right)(\omega)=\left\{\eta\in\left(W^{2,4}(\omega)\right)^{3};F^{0}_{\alpha\|\beta}\left(u^{0},\eta\right)=0,\text{ sur }\omega;\ \eta=\partial_{N}\ \eta=0\text{ sur }\gamma_{0}\right\},$$

on obtient

$$\forall\eta\in Z\left(u^{0}\right)(\omega),\int_{\Omega}\sqrt{a(y)}\sigma^{1,ij}F^{1}_{i\|j}(\eta)\,dx=\int_{\Omega}\sqrt{a(y)}f^{i,2}\eta_{i}dx+\int_{\Gamma_{+}\cup\Gamma_{-}}\sqrt{a(y)}h^{3,i}\eta_{i}dS.$$

Alors, d'après la deuxième équation du problème $\left(P^{3}\right)$ et le lemme 18, (2.76), on obtient le problème suivant

$$\begin{cases}\text{Trouver }\left(u^{0},\zeta^{1}\right)\in\left(V_{1}(\omega),V(\omega)\right)\text{ tel que pour tout }(\eta,v)\in\left(Z\left(u^{0}\right)(\omega),V(\omega)\right)\\ \int_{\omega}\sqrt{a(y)}\left\{A^{\alpha\beta\gamma\delta}_{11}(y)\widetilde{E}^{11}_{\alpha\|\beta}\left(u^{0},\zeta^{1}\right)\widetilde{F}^{11}_{\gamma\|\delta}\left(\zeta^{1},\eta\right)+A^{\alpha\beta\gamma\delta}_{12}\widetilde{E}^{11}_{\alpha\|\beta}\left(u^{0},\zeta^{1}\right)\widetilde{F}^{12}_{\gamma\|\delta}\left(u^{0},\eta\right)\right\}dy+\\ +\int_{\omega}\sqrt{a(y)}\left\{A^{\alpha\beta\gamma\delta}_{21}(y)\widetilde{E}^{12}_{\alpha\|\beta}\left(u^{0}\right)\widetilde{F}^{11}_{\gamma\|\delta}\left(\zeta^{1},\eta\right)+A^{\alpha\beta\gamma\delta}_{22}(y)\widetilde{E}^{12}_{\alpha\|\beta}\left(u^{0}\right)\widetilde{F}^{12}_{\gamma\|\delta}\left(u^{0},\eta\right)\right\}dy=\\ =\int_{\omega}\sqrt{a(y)}\left\{\int_{-1}^{+1}f^{i,2}dx_{3}+h^{i,3}_{+}+h^{i,3}_{-}\right\}\eta_{i}\ dy,\\ \int_{\omega}\sqrt{a(y)}\left\{A^{\alpha\beta\gamma\delta}_{11}(y)F^{0}_{\alpha\|\beta}\left(u^{0},\zeta^{1}\right)F^{0}_{\gamma\|\delta}\left(u^{0},v\right)+A^{\alpha\beta\gamma\delta}_{12}(y)\widetilde{E}^{12}_{\alpha\|\beta}\left(u^{0}\right)F^{0}_{\gamma\|\delta}\left(u^{0},v\right)\right\}dy=0.\end{cases}$$

■

Lods V. & Miara B. [12] ont montrés que, le premier terme $u^{0}$ du développement asymptotique de $u(\varepsilon)$ est solution d'un problème bidimensionnel qui dépend des hypothèses sur les forces et de la géométrie de la coque $\Theta^{\varepsilon}(\omega)$, constituée d'un matériau homogène et isotrope (matériau de Saint Venant Kirchhoff). Plus précisement, lorsque l'ensemble des déplacements inextensionnels $Y_{F}(\omega)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, les foces appliquées de volume sont d'ordre 2 ($f(\varepsilon)=\varepsilon^{2}f^{2}, f^{2}$ est indépendant de $\varepsilon$) et les foces appliquées de surface sont d'ordre 3 ($h(\varepsilon)=\varepsilon^{3}h^{3}, h^{3}$ est indépendant de $\varepsilon$) , alors $u^{0}$ vérifie le problème en flexion :

$$\begin{cases}\text{Trouver }u^{0}\in V_{f}(\omega),\text{ pour tout }\eta\in Z_{f}\left(u^{0}\right)(\omega)\text{ tel que}\\ \frac{2}{3}\int_{\omega}\sqrt{a(y)}b^{\alpha\beta\gamma\delta}(y)\widetilde{E}^{1}_{\alpha\|\beta}\left(u^{0}\right)\widetilde{F}^{1}_{\gamma\|\delta}\left(u^{0},\eta\right)dy=\int_{\omega}\sqrt{a(y)}\left\{\int_{-1}^{+1}f^{i,2}dx_{3}+h^{i,3}_{+}+h^{i,3}_{-}\right\}\eta_{i}dy,\ :\end{cases}\tag{2.77}$$

où

$$
\begin{aligned}
V_f(\omega) &= \left\{\eta \in \left(W^{2,4}(\omega)\right)^3 ; E^0_{\alpha\|\beta}(\eta) = 0, \text{ sur } \omega;\ \eta = \partial_N\ \eta = 0 \text{ sur } \gamma_0\right\}, \\
Z_f\left(u^0\right)(\omega) &= \left\{\eta \in \left(W^{2,4}(\omega)\right)^3 ; F^0_{\alpha\|\beta}\left(u^0,\eta\right) = 0, \text{ sur } \omega;\ \eta = \partial_N\ \eta = 0 \text{ sur } \gamma_0\right\}, \\
\widetilde{E}^1_{\alpha\|\beta}\left(u^0\right) &= -F^0_{\alpha\|\beta}\left(u^0,\psi^1\right) + \left(\Gamma^{k,1}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\left(\Gamma^{k,1}_{i\alpha}u^0_{j\|\beta} + u^0_{i\|\alpha}\Gamma^{k,1}_{j\beta}\right)\right)u^0_k - \frac{1}{2}g^{\sigma\tau,1}u^0_{\sigma\|\alpha}u^0_{\tau\|\beta},
\end{aligned}
$$

sont les composantes covariantes du tenseur bidimensionnel de changement de courbure dont les dérivées de Gâteaux au point $u^0$ dans la direction $\eta$ sont données par :

$$
\widetilde{F}^1_{\alpha\|\beta}\left(u^0,\eta\right) = \Gamma^{k,1}_{\alpha\beta}\eta_k + \frac{1}{2}a^{ij}\left(\widehat{\psi}^1_{i\|\alpha}\eta^0_{j\|\beta} + \eta^0_{i\|\alpha}\ \widehat{\psi}^1_{j\|\beta} - u^0_{i\|\alpha}\Gamma^{k,1}_{j\beta}\eta_k - \Gamma^{k,1}_{i\alpha}\eta_k\ u^0_{j\|\beta}\right) + F^0_{\alpha\|\beta}\left(u^0,\tau(\eta)\right),
$$

où $\psi^1 = \partial_3\ u^1$ avec

$$
\begin{cases}
u^0_{1\|3} = -\left(1 + a^{\alpha 2}u^0_{\alpha\|2}\right)u^0_{3\|1} + a^{\alpha 2}u^0_{\alpha\|1}u^0_{3\|2}, \\
u^0_{2\|3} = a^{\alpha 1}u^0_{\alpha\|2}u^0_{3\|1} - \left(1 + a^{\alpha 1}u^0_{\alpha\|1}\right)u^0_{3\|2}, \\
u^0_{3\|3} = a^{\alpha\beta}u^0_{\alpha\|\beta} + a^{\alpha 1}a^{\beta 2}\left(u^0_{\alpha\|1}u^0_{\beta\|2} - u^0_{\alpha\|2}u^0_{\beta\|1}\right),
\end{cases}
$$

où

$$
\widehat{\psi}^1_{i\|\alpha} = \psi^1_{i\|\alpha} - \Gamma^{k,1}_{i\alpha}u^0_k \text{ et } v(\eta) = \widetilde{\tau} + x_3\tau(\eta) \in V(\Omega),
$$

sont les vecteurs tels que

$$
F^{-1}_{i\|j}\left(v(\eta)\right) = F^0_{i\|j}(\eta),\ \eta \in Z_f\left(u^0\right)(\omega),
$$

et où $\widetilde{\tau}$ et $\tau(\eta)$ sont les éléments de $V(\omega)$, les $\tau(\eta)$ étant définis de façon unique par les relations

$$
-\tau_1(\eta) = -b^\alpha_1\eta_\alpha - \left(1 + a^{\alpha 2}u^0_{\alpha\|2}\right)\eta^0_{3\|1} - \left(1 + a^{\alpha 2}\eta^0_{\alpha\|2}\right)u^0_{3\|1} + a^{\alpha 2}\left(u^0_{\alpha\|1}\eta^0_{3\|2} + \eta^0_{\alpha\|1}u^0_{3\|2}\right),
$$

$$
-\tau_2(\eta) = -b^\alpha_2\eta_\alpha - \left(1 + a^{\alpha 1}u^0_{\alpha\|1}\right)\eta^0_{3\|2} - \left(1 + a^{\alpha 1}\eta^0_{\alpha\|1}\right)u^0_{3\|2} + a^{\alpha 1}\left(u^0_{\alpha\|2}\eta^0_{3\|1} + \eta^0_{\alpha\|2}u^0_{3\|1}\right),
$$

$$-\tau_3(\eta) = a^{\alpha\beta}\eta^0_{\alpha\|\beta} + a^{\alpha 1}a^{\beta 2}\left(u^0_{\alpha\|1}\eta^0_{\beta\|2} + \eta^0_{\alpha\|1}u^0_{\beta\|2} - u^0_{\alpha\|2}\eta^0_{\beta\|1} - \eta^0_{\alpha\|2}u^0_{\beta\|1}\right).$$

Plus précisement Christophe C. [4] a obtenu la loi de comportement limite

$$\sigma^{\alpha\beta,1} = b^{\alpha\beta\gamma\delta}E^1_{\gamma\|\delta}\left(u^0\right) = -x_3 b^{\alpha\beta\gamma\delta}\widetilde{E}^1_{\gamma\|\delta}\left(u^0\right),$$

ainsi que les premières composantes des $\sigma^{i3}(\varepsilon)$ :

$$\sigma^{\alpha 3,2} = T^{\alpha 3,2} + a^{\alpha\gamma}u^0_{i\|\gamma}T^{i3,2} = \left(I + AU^T\right)T^2 + T^{33,2}AZ,$$

$$\sigma^{33,2} = d\left(u^0\right)T^{33,2} - Z^T\ cof\left(I + AU^T\right)T^2,$$

où

$$T^{\gamma 3,2} = -\frac{x_3^2 - 1}{2}\left\{\partial_\sigma \widetilde{T}^{\gamma\sigma,1} + \widetilde{T}^{\gamma\sigma,1}\Gamma^{\rho *}_{\sigma\rho} + \widetilde{T}^{\gamma\sigma,1}\Gamma^{\gamma *}_{\rho\sigma} - \widetilde{T}^{3\sigma,1}b^\gamma_\sigma\right\},$$

$$T^{33,2} = -\frac{x_3^2 - 1}{2}\left\{\partial_\sigma \widetilde{T}^{3\sigma,1} + \widetilde{T}^{3\sigma,1}\Gamma^{\rho *}_{\sigma\rho} + \widetilde{T}^{\gamma\sigma,1}b_{\gamma\sigma}\right\},$$

$$\widetilde{T}^{\gamma\sigma,1} = -\left\{b^{\alpha\beta\gamma\sigma} + b^{\alpha\beta\sigma\rho}a^{\delta\gamma}u^0_{\delta\|\rho}\right\}\widetilde{E}^1_{\alpha\|\beta}\left(u^0\right),$$

$$\widetilde{T}^{3\delta,1} = -b^{\alpha\beta\delta\rho}u^0_{3\|\rho}\widetilde{E}^1_{\alpha\|\beta}\left(u^0\right),$$

$$A = \begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{21} & a^{22} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u^0_{1\|1} & u^0_{1\|2} \\ u^0_{2\|1} & u^0_{2\|2} \end{pmatrix},$$

$$z = \begin{pmatrix} u^0_{3\|1} \\ u^0_{3\|2} \end{pmatrix}, \qquad T^2 = \begin{pmatrix} T^{13,2} \\ T^{23,2} \end{pmatrix},$$

$$d\left(u^0\right) = \det\ \left(I + U^T A\right).$$

Ciarlet P. G. & Daniel C. [7] ont montrés l'existence de la solution du problème bidimensionnel en flexion si $\theta \in W^{2,p}\left(\omega, \mathbb{R}^3\right)$ $(p > 2)$.

**Remarque 21 :** Roquefort A. [16] a proposé, dans cet article, d'étudier l'analyse asymptotique des coques isotrope et homogène non linéaires, en considérant le champ de déformation plutôt que le champ de déplacement qui a été utilisé par Miara B. [13] dans le même cadre, ce qui a pour effet de simplifier l'analyse asymptotique.

## 2.4 Linéarisation des modèles limites

En linéarisant les modèles précédents, on retrouve les modèles bidimensionnels de l'élasticité linéarisée (Patrick G. [15]).

Lorsque l'ensemble des déplacements inextensionnels linéarisés

$$Y_f^{lin}(\omega) = \left\{\eta \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times L^2(\omega) ;\ \gamma_{\alpha\beta}(\eta) = 0 \text{ dans } \omega \text{ et } \eta_\alpha = 0 \text{ sur } \gamma_0\right\},$$

est réduit à $\{0\}$, les forces appliquées de volume sont d'ordre 0 et les forces appliquées de surfaces sont d'ordre 1, alors $u^0$ est indépendant de $x_3$ et vérifie le problème bidimensionnel membranaire linéaire :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^0 \in V_m(\omega), \text{ tel que pour tout } \eta \in V_m(\omega), \\ \int_\omega A_{11}^{\alpha\beta\gamma\delta}(y)\ \gamma_{\alpha\beta}(\ u^0)\, \gamma_{\sigma\tau}(\ \eta) \sqrt{a(y)}dy = \int_\omega \sqrt{a(y)} \left[\int_{-1}^{+1} f^{i,0} dx_3 + h_+^{i,1} + h_-^{i,1}\right] \eta_i dy, \end{cases}$$

où

$$V_m(\omega) = \left\{\eta \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times L^2(\omega) ;\ \eta_\alpha = 0 \text{ sur } \gamma_0\right\},$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta}(\eta) &= \frac{1}{2}\left(\eta^0_{\alpha\|\beta} + \eta^0_{\beta\|\alpha}\right), \\ \eta^0_{\alpha\|\beta} &= \partial_\beta \eta_\alpha - \Gamma^{k,0}_{\alpha\beta}\eta_k. \end{aligned}$$

Si le matériau est homogène et isotrope, alors $u^0$ est indépendant de $x_3$ et vérifie le problème bidimensionnel membranaire linéaire :

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Trouver } u^0 \in V_m(\omega), \text{ tel que pour tout } \eta \in V_m(\omega), \\ 2\int_\omega b^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\alpha\beta}\left(u^0\right)\gamma_{\sigma\tau}\left(\eta\right)\sqrt{a}dy = \int_\omega \sqrt{a(y)}\left[\int_{-1}^{+1} f^{i,0}dx_3 + h_+^{i,1} + h_-^{i,1}\right]\eta_i dy. \end{array}\right. \tag{2.78}$$

Si la coque est encastrée le long de son bord latéral et la force appliquée de volume $f(\varepsilon)$, $(f(\varepsilon)(x) = \varepsilon^0 f^0(x),\ f^0 \in \left(L^2(\Omega)\right)^3)$, Ciarlet P. G. & Lods V. [8] ont montrés que $u(\varepsilon)$ converge vers la limite $u$ lorsque $\varepsilon \to 0$ dans l'espace $\left(H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times L^2(\omega)\right)$, avec $u$ est indépendant de $x_3$ et la fonction

$$\zeta = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} u\ dx_3,$$

appartient à l'espace

$$V_M(\omega) = H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times L^2(\omega),$$

et satisfait le problème bidimensionnel membranaire linéaire suivant :

$$\int_\omega b^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\alpha\beta}(\zeta)\gamma_{\sigma\tau}(\eta)\sqrt{a}dy = \int_\omega \sqrt{a(y)}\left[\int_{-1}^{+1} f^{i,0}dx_3\right]\eta_i dy,$$

pour tout $\eta \in V_M(\omega)$.

Christophe C. [4] a montré

$$\sigma^{\alpha\beta}(\varepsilon) \to \sigma^{\alpha\beta,0} = b^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\alpha\beta}\left(u^0\right) \text{ lorsque } \varepsilon \to 0 \text{ dans } L^2(\omega),$$

$$\sigma^{i3}(\varepsilon) \to 0 \text{ lorsque } \varepsilon \to 0 \text{ dans } L^2(\omega).$$

Ciarlet P. G. & Sanchez P. [11] ont montrés l'existence et l'unicité de la solution du problème bidimensionnel membranaire d'une coque linéairement élastique encastrée, dont la surface moyenne est uniformément elliptique.

Patrick G. [15] montre que, lorsque l'ensemble des déplacements inextensionnels linéarisés $Y_f^{lin}(\omega)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, les forces appliquées de volume sont d'ordre 2.

Soit $u(\varepsilon) \in V(\Omega)$ l'unique solution du problème tridimensionnel

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Trouver } u(\varepsilon) \text{ dans } V(\Omega) \text{ tel que : } \forall v \in V(\Omega) \\ \int_\Omega \sqrt{g(\varepsilon)} A^{ijkl}(\varepsilon)\, e_{k\|l}(\varepsilon)(u(\varepsilon))\, e_{i\|j}(\varepsilon)(v)\, dx = \int_\Omega \sqrt{g(\varepsilon)}\varepsilon^2 f^{i,2}\ v_i dx, \end{array}\right. \tag{2.79}$$

$$e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon)(v) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha v_\beta + \partial_\beta v_\alpha) - \Gamma^p_{\alpha\beta}(\varepsilon)\, v_p,$$

$$e_{\alpha\|3}(\varepsilon)(v) = \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha v_3 + \frac{1}{\varepsilon}\partial_3 v_\alpha\right) - \Gamma^\sigma_{\alpha 3}(\varepsilon)\, v_\sigma,$$

$$e_{\alpha\|3}(\varepsilon)(v) = \frac{1}{\varepsilon}\partial_3 v_3,$$

$$V(\Omega) = \left\{v \in \left(H^1(\Omega)\right)^3, v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\right\},$$

alors il existe $u^0$ indépendant de $x_3$, tel que $u^0 \in V_F(\omega)$ et il existe $\widetilde{u}^1 \in V_1(\omega)$ tel que en notant $\widetilde{u}^1(\varepsilon)$ la composante de $\frac{1}{\varepsilon}u(\varepsilon)$ sur $V_1(\omega)$ dans la décomposition

$$V(\omega) = V_0(\omega) \oplus V_1(\omega),$$

$$u(\varepsilon) \to u^0 \text{ lorsque } \varepsilon \to 0 \text{ dans } H^1(\Omega),$$

$$\widetilde{u}^1(\varepsilon) \to \widetilde{u}^1 \text{ lorsque } \varepsilon \to 0 \text{ dans } V_1(\omega),$$

où $\left(u^0, \widetilde{u}^1\right)$ satisfont le problème variationnel pour tout $(\eta, \chi) \in V_F(\omega) \times V_1(\omega)$ :

$$\int_\omega \sqrt{a(y)} \left\{ \left(A_{11}^{\alpha\beta\gamma\delta}(y)\, \gamma_{\gamma\delta}\left(\widetilde{u}^1\right) - A_{12}^{\alpha\beta\gamma\delta}(y)\, \rho_{\gamma\delta}\left(u^0\right)\right)\gamma_{\alpha\beta}(\chi) \right.$$
$$\left. - \left(A_{21}^{\alpha\beta\gamma\delta}(y)\, \gamma_{\gamma\delta}\left(\widetilde{u}^1\right) - A_{22}^{\alpha\beta\gamma\delta}(y)\, \rho_{\gamma\delta}\left(u^0\right)\right)\rho_{\alpha\beta}(\eta)\right\} dy = \int_\omega \sqrt{a(y)} \left[\int_{-1}^{+1} f^{i,2} dx_3\right] \eta_i dy,$$

et

$$\sigma^{i3,1} = 0,\ \sigma^{1,\alpha\beta} = D^{\alpha\beta\gamma\delta}(x)\, e^1_{\gamma\|\delta},$$

tel que $\frac{1}{\varepsilon}e_{i\|j}(\varepsilon)$ converge fortement vers $e^1_{i\|j}$ dans $L^2(\Omega)$ .

$$\begin{aligned} V_F(\omega) &= \{\eta = (\eta_i) \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times H^2(\omega), \eta_i = \partial_N \eta_3 = 0 \\ &\quad \text{sur } \gamma_0, \gamma_{\alpha\beta}(\eta) = 0 \text{ sur } \omega\}, \end{aligned}$$

$$V(\omega) = \left\{\eta = (\eta_i) \in \left(H^1(\omega)\right)^3; \eta = 0 \text{ sur } \gamma_0\right\},$$

$$V_0(\omega) = \{\eta \in V(\omega); \gamma_{\alpha\beta}(\eta) = 0 \text{ sur } \omega\},$$

$$V(\omega) = V_0(\omega) \oplus V_1(\omega),$$

$$\oplus: \text{ est la somme directe.}$$

Lorsque l'ensemble des déplacements inextensionnels linéarisés $Y_f^{lin}(\omega)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, les forces appliquées de volume sont d'ordre 2, les forces appliquées de surfaces sont d'ordre 3 et la coque est constituée d'un matériau homogène et isotrope, alors $u^0$ est indépendant de $x_3$ et vérifie le problème bidimensionnel en flexion linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Trouver } u^0 \in V_f(\omega), \text{ tel que pour tout } \eta \in V_m(\omega), \\ \frac{2}{3}\int_\omega b^{\alpha\beta\gamma\delta}\rho_{\alpha\beta}(u^0)\rho_{\sigma\tau}(\eta)\sqrt{a}dy = \int_\omega \sqrt{a(y)}\left[\int_{-1}^{+1} f^{i,2}dx_3 + h_+^{i,3} + h_-^{i,3}\right]\eta_i dy, \end{array} \right. \tag{2.80}$$

où

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha\beta}(\eta) &= \partial_{\alpha\beta}\eta_3 - \Gamma^{\sigma*}_{\alpha\beta}\partial_\sigma\eta_3 + b^\sigma_\beta\left(\partial_\alpha\eta_\sigma - \Gamma^{\gamma*}_{\alpha\sigma}\eta_\gamma\right) + b^\sigma_\alpha\left(\partial_\beta\eta_\sigma - \Gamma^{\gamma*}_{\beta\sigma}\eta_\gamma\right) + \\ &\quad + \left(\partial_\beta b^\sigma_\alpha + \Gamma^{\sigma*}_{\beta\tau}b^\tau_\alpha - \Gamma^{\tau*}_{\alpha\beta}b^\sigma_\tau\right)\eta_\sigma - c_{\alpha\beta}\eta_3, \end{aligned}$$

sont les composantes covariantes du tenseur bidimensionnel linéarisé de changement de courbure et où $(c_{\alpha\beta})$ sont les composantes covariantes de la troisième forme fondamentale de la surface $S$ définies par $c_{\alpha\beta} = b^\gamma_\alpha b_{\gamma\beta}$. Dans ce cas Ciarlet P. G. Lods V. & Miara B. [9]

ont montrés que le déplacement $u(\varepsilon)$ converge dans $\left(H^1(\omega)\right)^3$ vers $u$ lorsque $\varepsilon$ tend vers 0 et la fonction

$$\zeta = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} u \; dx_3,$$

appartient à l'espace

$$\begin{aligned} V_F(\omega) &= \left\{\eta = (\eta_i) \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times H^2(\omega), \eta_i = \partial_N \eta_3 = 0 \right. \\ & \qquad \left. \text{sur } \gamma_0,\ \gamma_{\alpha\beta}(\eta) = 0 \text{ sur } \omega \right\}, \end{aligned}$$

et satisfait le problème bidimensionnel en flexion linéaire suivant :

$$\frac{1}{3}\int_\omega b^{\alpha\beta\gamma\delta}\rho_{\alpha\beta}(\zeta)\,\rho_{\sigma\tau}(\eta)\sqrt{a}dy = \int_\omega \sqrt{a(y)}\left[\int_{-1}^{+1} f^{i,2}dx_3\right]\eta_i dy,$$

où

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha\beta}(\eta) &= \partial_{\alpha\beta}\eta_3 - \Gamma^{\sigma*}_{\alpha\beta}\partial_\sigma\eta_3 + b^\sigma_\beta\left(\partial_\alpha\eta_\sigma - \Gamma^{\gamma*}_{\alpha\sigma}\eta_\gamma\right) + b^\sigma_\alpha\left(\partial_\beta\eta_\sigma - \Gamma^{\gamma*}_{\beta\sigma}\eta_\gamma\right) + \\ & \quad + \left(\partial_\beta b^\sigma_\alpha + \Gamma^{\sigma*}_{\beta\tau}b^\tau_\alpha - \Gamma^{\tau*}_{\alpha\beta}b^\sigma_\tau\right)\eta_\sigma - c_{\alpha\beta}\eta_3, \end{aligned}$$

pour tout $\eta \in V_F(\omega)$.

Christophe C. [4] a montré que lorsque $\varepsilon \to 0$

$$\frac{1}{\varepsilon}\sigma^{\alpha\beta}(\varepsilon) \to \sigma^{\alpha\beta,1} = x_3\widetilde{\sigma}^{\alpha\beta,1} = -x_3 b^{\alpha\beta\gamma\delta}\rho_{\gamma\delta}\left(u^0\right) \text{ dans } L^2(\Omega),$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\sigma^{\alpha 3}(\varepsilon) \to \sigma^{\alpha 3,2} = -\frac{x_3^2 - 1}{2}\left[\partial_\beta\widetilde{\sigma}^{\alpha\beta,1} + \widetilde{\sigma}^{\alpha\delta,1}\Gamma^{\beta*}_{\delta\beta} + \widetilde{\sigma}^{\beta\delta,1}\Gamma^{\alpha*}_{\delta\alpha}\right] \text{ dans } H^1\left(-1,1,H^{-1}(\omega)\right),$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\sigma^{33}(\varepsilon) \to \sigma^{33,2} = -\frac{x_3^2 - 1}{2} b_{\alpha\beta}\widetilde{\sigma}^{\alpha\beta,1} \text{ dans } H^1\left(-1,1,H^{-1}(\omega)\right).$$

Par linéarisation, le problème variationnel (2.57), on obtient (voir Christophe C.

[4]) :

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Trouver } u^0 \in V_l(\omega)\text{, telque pour tout } \eta \in V_l(\omega)\text{, telque}\\ \int_\omega A^{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma_{\alpha\beta}(u^0)\gamma_{\sigma\tau}(\eta)\sqrt{a}dy - \frac{1}{2}\int_\omega \lambda\, a^{\gamma\delta}\left(a^{\rho\tau}u^0_{\rho\|\gamma}\eta^0_{\tau\|\delta} + u^0_{3\|\gamma}\eta^0_{3\|\delta}\right)\sqrt{a(y)}dy =\\ = \int_\omega \widetilde{a}^{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma_{\alpha\beta}(u^0)\gamma_{\sigma\tau}(\eta)\sqrt{a}dy - \frac{1}{2}\int_\omega \lambda\, a^{\gamma\delta}u^0_{3\|\gamma}\eta^0_{3\|\delta}\sqrt{a(y)}dy =\\ = \frac{1}{2}\int_\omega \lambda\, a^{\gamma\delta}\gamma_{\sigma\tau}(\eta)\sqrt{a(y)}dy + \int_\omega p^{i,0}\,\eta_i\sqrt{a(y)}dy,\end{array}\right.$$

tel que

$$V_l(\omega) = \left\{\eta = (\eta_i) \in \left(H^1(\omega)\right)^3, \eta_i = \partial_N\eta_3 = 0 \text{ sur } \gamma_0, \gamma_{\alpha\beta}(\eta) = 0 \text{ sur } \omega\right\},$$

où

$$\widetilde{a}^{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda a^{\alpha\beta}a^{\gamma\delta} + \left(\mu - \frac{\lambda}{2}\right)\left(a^{\alpha\gamma}a^{\beta\delta} + a^{\alpha\delta}a^{\beta\gamma}\right),$$

et on ne retrouve pas donc le modèle linéaire (2.78) de coque membranaire.

**Remarque 22 :** La matrice $\widetilde{a}$ reste définie positive pour des matériaux tels que l'acier ($\lambda = 10.10^5 Kg/\text{cm}^2$ et $\mu = 8,2.10^5 Kg/\text{cm}^2$), le fer ($\lambda = 9,9.10^5 Kg/\text{cm}^2$ et $\mu = 7,8.10^5 Kg/\text{cm}^2$), le bronz ($\lambda = 6,2.10^5 Kg/\text{cm}^2$ et $\mu = 3,8.10^5 Kg/\text{cm}^2$), le verre ($\lambda = 2,2.10^5 Kg/\text{cm}^2$ et $\mu = 2,2.10^5 Kg/\text{cm}^2$), le nickel ($\lambda = 1,3.10^5 Kg/\text{cm}^2$ et $\mu = 0,85.10^5 Kg/\text{cm}^2$).

# Chapitre 3

# LA JUSTIFICATION D'UN MODÈLE DE COQUES MINCES NON LINÉAIREMENT ÉLASTIQUES MEMBRANAIRES PAR DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE

# L'ÉNERGIE

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on effectue l'analyse asymptotique d'un modèle tridimensionnel de coques non linéairement élastiques minces membranaires, constituées d'un matériau non homogène et anisotrope. On choisit la déformation de la coque comme inconnue du problème de minimisation de l'énergie, et on applique la méthode des développements asymptotiques formels, avec l'épaisseur de la coque comme petit paramètre. On trouve le modèle bi-dimensionnel de coque membranaire.

On considère une coque $\widehat{\Omega^{\varepsilon}} = \Theta^{\varepsilon}(\Omega^{\varepsilon})$ de surface moyenne $S = \theta(\overline{\omega})$, ($\omega$ est un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^2$ de frontière $\gamma$, $\theta \in C^3\left(\overline{\omega}, \mathbb{R}^3\right)$) et d'épaisseur $2\varepsilon > 0$ ($\varepsilon$ est petit), constituée d'un matériau élastique non homogène et anisotrope.

On applique aux coques la méthode utilisée par Pantz O. [14] pour les plaques, l'originalité de ce travail étant d'obtenir l'énergie formellement en considérant la déformation comme inconnue du problème membranaire non linéaire.

## 3.2 Formulation du problème tridimensionnel

On prend les mêmes notations de la section 1.4 (chapitre 1) tels que la coque est soumise à des forces mortes volumique $\widehat{f^{\varepsilon}}$ et à des forces mortes surfacique $\widehat{h^{\varepsilon}}$ sur les faces supérieure et inférieure $\widehat{\Gamma_{+}^{\varepsilon}}$ et $\widehat{\Gamma_{-}^{\varepsilon}}$ et encastrée sur la partie $\widehat{\Gamma_{0}^{\varepsilon}}$ ($\widehat{\Gamma_{0}^{\varepsilon}} = \gamma_0 \times [-1, +1]$ $\gamma_0 \subset \gamma$), aussi la coque subit un champ de déplacement noté par $\widehat{u^\varepsilon}$, le champ de déformation associée est

$$\widehat{\varphi^\varepsilon} = I_d + \widehat{u^\varepsilon}. \tag{3.1}$$

En notant $\widehat{E^\varepsilon}$ le tenseur des déformations de Green- Saint-Venant . L'espace des déformations admissibles est (voir Ball J. M. [1]) :

$$\begin{aligned} A_d\left(\widehat{\Omega^\varepsilon}\right) \quad = \quad & \left\{\widehat{\Psi^\varepsilon} \in \left(W^{1,4}\left(\widehat{\Omega^\varepsilon}\right)\right)^3,\ \widehat{\Psi^\varepsilon} \text{ est injective sur } \widehat{\Omega^\varepsilon},\ \det\left(\widehat{\nabla^\varepsilon}\ \widehat{\Psi^\varepsilon}\right) > 0 \right. \\ & \left. \text{dans } \widehat{\Omega^\varepsilon},\ \widehat{\Psi^\varepsilon} = I_d \text{ sur } \widehat{\Gamma_0^\varepsilon}\right\}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

On peut associer à toute déformation $\widehat{\Psi^\varepsilon}$ l'énergie

$$\widehat{J^\varepsilon}\left(\widehat{\Psi^\varepsilon}\right) = \widehat{I^\varepsilon}\left(\widehat{\Psi^\varepsilon}\right) - \widehat{l^\varepsilon}\left(\widehat{\Psi^\varepsilon}\right). \tag{3.3}$$

La forme linéaire $\widehat{l^\varepsilon}$ est le travail des forces extérieures

$$\widehat{l^\varepsilon}\left(\widehat{\Psi^\varepsilon}\right) = \int_{\widehat{\Omega^\varepsilon}} \widehat{f^\varepsilon}.\widehat{\Psi^\varepsilon} d\widehat{x^\varepsilon} + \int_{\widehat{\Gamma_+^\varepsilon} \cup \widehat{\Gamma_-^\varepsilon}} \widehat{h^\varepsilon}.\widehat{\Psi^\varepsilon} d\widehat{S^\varepsilon}, \tag{3.4}$$

tandis que $\widehat{I^\varepsilon}\left(\widehat{\Psi^\varepsilon}\right)$ est l'énergie interne

$$\widehat{I^\varepsilon}\left(\widehat{\Psi^\varepsilon}\right) = \int_{\widehat{\Omega^\varepsilon}} \widehat{W^\varepsilon}\left(\widehat{x^\varepsilon}, \widehat{\nabla^\varepsilon}\widehat{\Psi^\varepsilon}\right) d\widehat{x^\varepsilon}. \tag{3.5}$$

Pour un matériau élastique non homogène et anisotrope, la densité d'énergie interne $\widehat{W^\varepsilon}$ est de la forme

$$\widehat{W^\varepsilon}\left(\widehat{x^\varepsilon}, F\right) = \frac{1}{2}\ \widehat{A_{ijkl}^\varepsilon}\ \left(\widehat{x^\varepsilon}\right)\ \widehat{E_{ij}^\varepsilon}(F)\ \widehat{E_{kl}^\varepsilon}(F) \text{ pour } F \text{ matrice } 3 \times 3, \tag{3.6}$$

où

$$\widehat{E^\varepsilon}(F) = \frac{1}{2}\left[F^T.F - I_3\right], \tag{3.7}$$

$\widehat{A^\varepsilon} = \left(\widehat{A^\varepsilon_{ijkl}}\right)$ est le tenseur de rigidité, il vérifie

$$\left\{\begin{array}{c} \widehat{A^\varepsilon_{ijkl}} \in L^\infty\left(\widehat{\Omega^\varepsilon}\right) \\ \widehat{A^\varepsilon_{ijkl}} = \widehat{A^\varepsilon_{jikl}} = \widehat{A^\varepsilon_{klij}} = \widehat{A^\varepsilon_{klji}} \\ \exists c \succ 0, \widehat{A^\varepsilon_{ijkl}}\widehat{\tau^\varepsilon_{kl}}\widehat{\tau^\varepsilon_{ij}} \geq c\widehat{\tau^\varepsilon_{ij}}\widehat{\tau^\varepsilon_{ij}}, \forall \widehat{\tau^\varepsilon_{ij}} = \widehat{\tau^\varepsilon_{ji}} \end{array}\right. . \tag{3.8}$$

Plus précisement, on a

$$\widehat{W^\varepsilon}\left(\widehat{x^\varepsilon}, \widehat{\nabla^\varepsilon}\widehat{\Psi^\varepsilon}\right) = \frac{1}{2}\,\widehat{A^\varepsilon_{ijkl}}\left(\widehat{x^\varepsilon}\right)\ \widehat{E^\varepsilon_{ij}}\left(\widehat{\Psi^\varepsilon}\right)\widehat{E^\varepsilon_{kl}}\left(\widehat{\Psi^\varepsilon}\right),$$

où

$$\widehat{E^\varepsilon}\left(\widehat{\Psi^\varepsilon}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\widehat{\nabla^\varepsilon}\widehat{\Psi^\varepsilon}\right)^T . \left(\widehat{\nabla^\varepsilon}\widehat{\Psi^\varepsilon}\right) - I_3\right]. \tag{3.9}$$

L'état d'équilibre de la coque d'épaisseur $2\varepsilon$ est décrit comme étant la solution du problème

$$\widehat{P^\varepsilon}\left(\widehat{\Omega^\varepsilon}\right)\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } \widehat{\varphi^\varepsilon} \in A_d\left(\widehat{\Omega^\varepsilon}\right), \text{ tel que} \\ \widehat{J^\varepsilon}\left(\widehat{\varphi^\varepsilon}\right) = \inf_{\widehat{\Psi^\varepsilon}\ \in\ A_d\left(\widehat{\Omega^\varepsilon}\right)}\ \widehat{J^\varepsilon}\left(\widehat{\Psi^\varepsilon}\right) \end{array}\right. \tag{3.10}$$

Dans le cas général, il n'existe pas de solution $\widehat{\varphi^\varepsilon}$ au problème variationnel présenté. Ceci tient entre autre au fait que la fonctionnelle énergie $\widehat{J^\varepsilon}$ n'est pas semi continue inférieure faible pour la topologie $W^{1,4}\left(\widehat{\Omega^\varepsilon}\ ; \mathbb{R}^3\right)$.

Le problème précédent donné sur cette coque en coordonnées cartésiennes, étant mal adapté à l'étude des coques, alors on réécrit le problème en coordonnées curvilinéaires. Les vecteurs de bases covariantes et contravariantes et les symboles de Christoffel associés, le tenseur métrique et le tenseur de courbure de la coque $\widehat{\Omega^\varepsilon}$ et de la surface moyenne $S$ sont données dans la section 1.4 (chapitre 1), le problème précédent est donné en coordonnées curvilinéaires par

$$P^{\varepsilon}\left(\Omega^{\varepsilon}\right)\begin{cases} \text{Trouver } \varphi^{\varepsilon}\in A_{d}\left(\Omega^{\varepsilon}\right) \text{ , tel que} \\ J^{\varepsilon}\left(\varphi^{\varepsilon}\right)=\inf_{\Psi^{\varepsilon}\,\in\, A_{d}\left(\Omega^{\varepsilon}\right)}\ J^{\varepsilon}\left(\Psi^{\varepsilon}\right), \end{cases} \tag{3.11}$$

où

$$J^{\varepsilon}\left(\Psi^{\varepsilon}\right)=I^{\varepsilon}\left(\Psi^{\varepsilon}\right)-l^{\varepsilon}\left(\Psi^{\varepsilon}\right), \tag{3.12}$$

$$I^{\varepsilon}\left(\Psi^{\varepsilon}\right)=\frac{1}{2}\int_{\Omega^{\varepsilon}}\sqrt{g^{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)}\ A^{ijkl,\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)\ E_{i\|j}^{\varepsilon}\left(\Psi^{\varepsilon}\right)\ E_{k\|l}^{\varepsilon}\left(\Psi^{\varepsilon}\right)\ dx^{\varepsilon}, \tag{3.13}$$

$$l^{\varepsilon}\left(\Psi^{\varepsilon}\right)=\int_{\Omega^{\varepsilon}}\sqrt{g^{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)}f^{i,\varepsilon}\Psi_{i}^{\varepsilon}dx^{\varepsilon}+\int_{\Gamma_{+}^{\varepsilon}\cup\Gamma_{-}^{\varepsilon}}\sqrt{g^{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)}h^{i,\varepsilon}\Psi_{i}^{\varepsilon}dS^{\varepsilon}, \tag{3.14}$$

$$E_{i\|j}^{\varepsilon}\left(\Psi^{\varepsilon}\right)=\frac{1}{2}\left(g^{ms,\varepsilon}\Psi_{m\|i}^{\varepsilon}\Psi_{s\|j}^{\varepsilon}-g_{ij}^{\varepsilon}\right) \tag{3.15}$$

$$v_{i\|j}^{\varepsilon}=\partial_{j}^{\varepsilon}v_{i}^{\varepsilon}-\Gamma_{ij}^{k,\varepsilon}v_{k}^{\varepsilon},\quad \text{(dérivée covariante de } v^{\varepsilon}\text{)}, \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} A_{d}\left(\Omega^{\varepsilon}\right) \quad = \quad & \Big\{\Psi^{\varepsilon}\in\left(W^{1,4}\left(\Omega^{\varepsilon}\right)\right)^{3},\ \Psi^{\varepsilon} \text{ est injective sur } \Omega^{\varepsilon},\ \det\left(\nabla^{\varepsilon}\ \Psi^{\varepsilon}\right)>0 \\ & \text{dans } \Omega^{\varepsilon},\ \Psi^{\varepsilon}=\Theta^{\varepsilon}=\theta+x_{3}^{\varepsilon}a_{3} \text{ sur } \Gamma_{0}^{\varepsilon}\Big\}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\det\left(\widehat{\nabla^{\varepsilon}}\ \widehat{\Psi^{\varepsilon}}\right)>0\Rightarrow\det\left(\nabla^{\varepsilon}\ \Psi^{\varepsilon}\right)>0,$$

(puisque $\det\left(\widehat{\nabla^{\varepsilon}}\ \widehat{\Psi^{\varepsilon}}\right)=\frac{1}{\left(g^{\varepsilon}\right)^{3}}\ \det\left(\nabla^{\varepsilon}\ \Psi^{\varepsilon}\right), g^{\varepsilon}=\det\left(g_{ij}^{\varepsilon}\right)>0$).

Tels que

$$\widehat{x^{\varepsilon}}=\Theta^{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)=\theta+x_{3}^{\varepsilon}a_{3},\forall x^{\varepsilon}\in\Omega^{\varepsilon}, \tag{3.18}$$

$$\Psi^{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)=\widehat{\Psi^{\varepsilon}}\left(\widehat{x^{\varepsilon}}\right)=\widehat{\Psi^{\varepsilon}}\circ\Theta^{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)=\Psi_{i}^{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right)g^{i,\varepsilon}\left(x^{\varepsilon}\right),\forall x^{\varepsilon}\in\Omega^{\varepsilon}, \tag{3.19}$$

$f^{\varepsilon}$, $h^{\varepsilon}$ et $A^{\varepsilon}$ sont définies dans (1.39), (1.40) et (1.42) tels que $A^{\varepsilon}=\left(A^{ijkl,\varepsilon}\right)$ vérifie les conditions (2.1).

## 3.3 Mise à l'échelle

Les solutions $\varphi^{\varepsilon}$ du problème tridimensionnel sont définies sur un ouvert $\Omega^{\varepsilon}$ dépendant de $\varepsilon$. Afin de réaliser une analyse asymptotique, on utilise la même procédure et les notations employées au paragraphe 2 du chapitre 2.

On pose

$$\begin{aligned}
\varphi(\varepsilon)(x) &= \varphi^{\varepsilon}(x^{\varepsilon}), \\
E_{i\|j}(\varepsilon)(\varphi(\varepsilon)) &= E^{\varepsilon}_{i\|j}(\varphi^{\varepsilon}), \\
J(\varepsilon)(\Psi(\varepsilon)) &= J^{\varepsilon}(\Psi^{\varepsilon}), \\
I(\varepsilon)(\Psi(\varepsilon)) &= I^{\varepsilon}(\Psi^{\varepsilon}), \\
l(\varepsilon)(\Psi(\varepsilon)) &= l^{\varepsilon}(\Psi^{\varepsilon}),
\end{aligned}$$

Le problème $P^{\varepsilon}(\Omega^{\varepsilon})$ est équivalent au problème consistant à trouver $\varphi(\varepsilon)$ telle que

$$P(\varepsilon)(\Omega)\begin{cases} \text{Trouver } \varphi(\varepsilon) \in A_d(\Omega) \text{ , tel que} \\ J(\varepsilon)(\varphi(\varepsilon)) = \inf_{\Psi(\varepsilon) \,\in\, A_d(\Omega)} J(\varepsilon)(\Psi(\varepsilon)), \end{cases} \tag{3.20}$$

où l'espace des déformations admissibles est

$$\begin{aligned}
A_d(\Omega) = &\Big\{\Psi(\varepsilon) \in \left(W^{1,4}(\Omega)\right)^3,\ \Psi(\varepsilon) \text{ est injective sur } \Omega,\ \det(\nabla(\varepsilon)\ \Psi(\varepsilon)) > 0 \\
&\text{dans } \Omega,\ \Psi(\varepsilon) = \theta + \varepsilon\ x_3 a_3 \text{ sur } \Gamma_0\Big\}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Où

$$J(\varepsilon)(\Psi(\varepsilon)) = I(\varepsilon)(\Psi(\varepsilon)) - l(\varepsilon)(\Psi(\varepsilon)), \tag{3.22}$$

$$I(\varepsilon)(\Psi(\varepsilon)) = \varepsilon\frac{1}{2}\int_{\Omega}\sqrt{g(\varepsilon)(x)}\ A^{ijkl}(\varepsilon)(x)\ \ E_{i\|j}(\varepsilon)(\Psi(\varepsilon))\ \ E_{k\|l}(\varepsilon)(\Psi(\varepsilon))\ \ dx, \qquad (3.23)$$

$$l(\varepsilon)(\Psi(\varepsilon)) = \varepsilon\int_{\Omega}\sqrt{g(\varepsilon)(x)}f^{i}(\varepsilon)\Psi_i(\varepsilon)\,dx + \int_{\Gamma_+\cup\Gamma_-}\sqrt{g(\varepsilon)(x)}h^{i}(\varepsilon)\Psi_i(\varepsilon)\,dS. \qquad (3.24)$$

Nous supposons que le tenseur de rigidité défini sur $\omega\times\left]-1,+1\right[$, $A(\varepsilon)$ est indépendant de $\varepsilon$, c'est à dire qu'il existe un tenseur $A$ indépendant de $\varepsilon$ tel que :

$$\forall\varepsilon>0, \forall x\in\overline{\Omega},\ \ A^{\varepsilon}(x_1,x_2,\varepsilon x_3) = A(x). \qquad (3.25)$$

Nous notons $A^{ijkl}(x)$ les composantes du tenseur $A(x)$ sur la base $(g_i(\varepsilon).g_j(\varepsilon).g_k(\varepsilon).g_l(\varepsilon))$. Quand $A(\varepsilon)$ vérifie la condition (3.25), nous avons les $A^{ijkl}(x)$ vérifient les propriétés (2.15).

Nous allons lors de l'analyse asymptotique identifier une loi de comportement limite.

Pour tout $x=(y,x_3)\in\overline{\Omega}$, nous pouvons décomposer $A(x)$ sur la base

$$a_i(y).a_j(y).a_k(y).a_l(y)\ \ .$$

Autrement dit, $A(x)$ s'écrit

$$A(x) = A^{ijkl}(0)\ \ (x)\ \ a_i(y).a_j(y).a_k(y).a_l(y), \qquad (3.26)$$

Nous définissons, pour $x=(y,x_3)\in\Omega$, un tenseur $D(x)$ par

$$D(x) = D^{\alpha\beta\gamma\delta}(x)\ \ a_\alpha(y).a_\beta(y).a_\gamma(y).a_\delta(y),$$

est l'inverse de la matrice $(S_{\alpha\beta\gamma\delta}(x))$, où $S=(S_{ijkl}(x))$ est le tenseur de souplesse associé, alors

$$D^{\alpha\beta\gamma\delta}(x) = A^{\alpha\beta\gamma\delta}(0)(x) - A^{\alpha\beta i3}(0)(x)\ \ d_{ij}(x)\,A^{j3\gamma\delta}(0)(x), \qquad (3.27)$$

(voir Chacha D. A. [3]), où $d(x)=(d_{ij}(x))$ est la matrice inverse de la matrice $\left(A^{i3j3}(0)(x)\right)$.

## 3.4 Procédure du développement asymptotique

On note $P(\varepsilon)(\Omega)$ le problème consistant à déterminer $\varphi(\varepsilon)$ telle que

$$\varphi(\varepsilon) \in A_d(\Omega) \text{ et } J(\varepsilon)(\varphi(\varepsilon)) = \inf_{\Psi(\varepsilon) \in A_d(\Omega)} J(\varepsilon)(\Psi(\varepsilon)),$$

où l'espace des déformations admissibles est

$$A_d(\Omega) = \Big\{\Psi(\varepsilon) \in \left(W^{1,4}(\Omega)\right)^3, \ \Psi(\varepsilon) \text{ est injective sur } \Omega, \ \det(\nabla(\varepsilon) \ \Psi(\varepsilon)) > 0$$
$$\text{dans } \Omega, \ \Psi(\varepsilon) = \theta + \varepsilon \ x_3 a_3 \text{ sur } \Gamma_0\big\}.$$

Les données du problème $P(\varepsilon)(\Omega)$ liées à la géométrie de la coque admettent les développements en puissances de $\varepsilon$ annoncées dans le théorème 7, chapitre 2.

On pose

$$\sqrt{\ g(\varepsilon)\ }\ (x) = \sqrt{a(y)} + \sum_{i=1}^{+\infty} x_3^i \left(\sqrt{\ g\ }\right)^i(x) \ \varepsilon^i, \ \forall x \in \Omega.$$

**Hypothèse 1** Les solutions $\varphi(\varepsilon)$ peuvent être développées en puissances de $\varepsilon$ par

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi^0 + \varepsilon\varphi^1 + \varepsilon^2\varphi^2 + ... \tag{3.28}$$

**Proposition 23 :** La fonctionnelle $J(\varepsilon)$ admet un développement asymptotique en puissances de $\varepsilon$.

$$J(\varepsilon)(\Psi) = \sum_{n=-3}^{\infty} J^n(\Psi) \ \varepsilon^n. \tag{3.29}$$

On repousse la démonstration de cette proposition à la section suivante. On peut alors reformuler la suite des problèmes $P(\varepsilon)$ comme une suite de problèmes "simples".

**Proposition 24 :** La solution $\varphi(\varepsilon) = \varphi^0 + \varepsilon\varphi^1 + \varepsilon^2\varphi^2 + ...$ de la suite de problèmes $P(\varepsilon)$ est telle que

$$\varphi \in \bigcap_{n=-3}^{\infty} A_{d,n},$$

où

$$A_{d,n+1} = \left\{ \Psi \in A_{d,n} : J^n(\Psi) = \inf_{\widetilde{\Psi} \in A_{d,n}} J^n\left(\widetilde{\Psi}\right) \right\},$$

et

$$A_{d,-3} = \left\{ \Psi \in \left(W^{1,4}\left(\Omega;\mathbb{R}^3\right)\right)^{\mathbb{N}} : \sum_n \Psi^n \varepsilon^n \in A_d(\Omega) \right\}.$$

On désigne par $P_n$ le problème consistant à déterminer l'ensemble des minimiseurs de $J^n$ sur $A_{d,n}$. Cette proposition signifie simplement que $\varphi(\varepsilon)$ est solution de la suite récursive des problèmes variationnels $P_n$.

**Preuve :** La démonstration s'effectue par récurrence. On note $P_n$ la proposition

$$\varphi \in \bigcap_{p=-3}^{n} A_{d,p} = A_{d,n}$$

D'après l'hypothèse 1, $P_{-3}$ est vraie. Il suffit donc de montrer que

$$P_{n-1} \Rightarrow P_n.$$

Pour tout $\Psi \in A_{d,n}$, d'après la proposition 23,

$$J(\varepsilon)(\Psi) = \sum_{p=-3}^{n-1} J^p(\Psi)\ \varepsilon^p + \varepsilon^n \left( J^n(\Psi) + \varepsilon \sum_{p=0}^{\infty} J^{n+1+p}(\Psi)\ \varepsilon^p \right). \tag{3.30}$$

De plus, pour tout $p < n$, comme $\Psi \in A_{d,p+1}$,

$$J^p(\Psi) = \inf_{\widetilde{\Psi} \in A_{d,p}} J^p\left(\widetilde{\Psi}\right). \tag{3.31}$$

On pose

$$M^n(\varepsilon) = \sum_{p=-3}^{n-1} \inf_{\widetilde{\Psi} \in A_{d,p}} J^p\left(\widetilde{\Psi}\right)\ \varepsilon^p.$$

D'après (3.30) et (3.31), pour tout $\Psi \in A_{d,n}$,

$$J(\varepsilon)(\Psi) = M^n(\varepsilon) + \varepsilon^n \left( J^n(\Psi) + \varepsilon \sum_{p=0}^{\infty} J^{n+1+p}(\Psi)\ \varepsilon^p \right). \tag{3.32}$$

On rappelle que $\varphi$ est défini par l'hypothèse 1. Supposons que $P_n$ soit vraie. Dans ce cas, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$J(\varepsilon)(\varphi) = \inf_{\Psi \in A_{d,n}} J(\varepsilon)(\Psi).$$

De (3.32), on déduit que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$J^n(\varphi) + \varepsilon \sum_{p=0}^{\infty} J^{n+1+p}(\varphi)\ \varepsilon^p = \inf_{\Psi \in A_{d,n}} \left( J^n(\Psi) + \varepsilon \sum_{p=0}^{\infty} J^{n+1+p}(\Psi)\ \varepsilon^p \right). \tag{3.33}$$

Pour tout $\alpha > 0$, il existe $\Psi_\alpha \in A_{d,n}$ tel que

$$J^n(\Psi_\alpha) \leq \inf_{\Psi \in A_{d,n}} J^n(\Psi) + \alpha.$$

D'après (3.33) on a donc pour tout $\varepsilon$

$$\begin{aligned} J^n(\varphi) + \varepsilon \sum_{p=0}^{\infty} J^{n+1+p}(\varphi)\ \varepsilon^p &\leq \left( J^n(\Psi_\alpha) + \varepsilon \sum_{p=0}^{\infty} J^{n+1+p}(\Psi_\alpha)\ \varepsilon^p \right) \\ &\leq \inf_{\Psi \in A_{d,n}} J^n(\Psi) + \alpha + \varepsilon \left( \sum_{p=0}^{\infty} J^{n+1+p}(\Psi_\alpha)\ \varepsilon^p \right), \end{aligned}$$

et faisant tendre $\varepsilon$ vers 0, il vient

$$J^n(\varphi) \leq \inf_{\Psi \in A_{d,n}} J^n(\Psi) + \alpha,$$

et

$$J^n(\varphi) \leq \inf_{\Psi \in A_{d,n}} J^n(\Psi),$$

c'est-à-dire, comme $\varphi \in A_{d,n}$

$$\varphi \in A_{d,n+1},$$

et $P_n$ est vraie. ■

### 3.4.1 Calcul des termes du développement asymptotique de l'énergie

On rappelle que $E^{\varepsilon}$ est le tenseur de déformation, et $E(\varepsilon)$ est défini par :

$$E(\varepsilon)(\Psi(\varepsilon)) = E^{\varepsilon}(\Psi^{\varepsilon})$$

et que

$$E(\varepsilon)(\Psi(\varepsilon)) = E(\varepsilon)\left(\Psi^0 + \varepsilon\Psi^1 + ...\right).$$

**Lemme 25 :** $E(\varepsilon)$ admet un développement asymptotique en puissances de $\varepsilon$

$$E(\varepsilon)(\Psi) = \sum_{n=-2}^{\infty} E^n(\Psi)\ \varepsilon^n \tag{3.34}$$

De plus, les composantes $E^n_{i\|j}$ sont de la forme

$$E^{-2}_{3\|3}(\Psi) = \frac{1}{2}\left(\partial_3\Psi_3\ \partial_3\Psi_3 + a^{\alpha\beta}(y)\ \partial_3\Psi_\alpha\ \partial_3\Psi_\beta\right), \tag{3.35}$$

$$E^{-1}_{3\|3}(\Psi) = \frac{1}{2}\left\{a^{\alpha\beta}\left(-\partial_3\Psi_\alpha\Gamma^{\rho,0}_{3\beta}\Psi_\rho - \partial_3\Psi_\beta\Gamma^{\rho,0}_{3\alpha}\Psi_\rho\right) + x_3 g^{\alpha\beta,1}\ \partial_3\Psi_\alpha\partial_3\Psi_\beta\right\}, \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned} E^0_{3\|3}(\Psi) \quad = \quad & \frac{1}{2}\left\{x_3 g^{\alpha\beta,1}\left(-\partial_3\Psi_\alpha\Gamma^{\rho,0}_{3\beta}\Psi_\rho - \partial_3\Psi_\beta\Gamma^{\rho,0}_{3\alpha}\Psi_\rho\right) + a^{\alpha\beta}\Gamma^{\rho,0}_{3\alpha}\Psi_\rho\Gamma^{\rho,0}_{3\beta}\Psi_\rho + \right. \\ & \left. + a^{\alpha\beta}\left(-\partial_3\Psi_\alpha x_3\Gamma^{\rho,1}_{3\beta}\Psi_\rho - \partial_3\Psi_\beta x_3\Gamma^{\rho,1}_{3\alpha}\Psi_\rho\right) + x_3^2 g^{\alpha\beta,2}\ \partial_3\Psi_\alpha\partial_3\Psi_\beta - 1\right\}, \end{aligned} \tag{3.37}$$

$$E^{-1}_{3\|\alpha}(\Psi) = \frac{1}{2}\left(\Psi^0_{3\|\alpha}\ \partial_3\Psi_3 + a^{\gamma\delta}(y)\ \Psi^0_{\gamma\|\alpha}\partial_3\Psi_\delta\right), \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned} E^0_{3\|\alpha}(\Psi) \quad = \quad & \frac{1}{2}\left\{-\partial_3\Psi_3 x_3\Gamma^{\rho,1}_{3\alpha}\Psi_\rho + x_3 g^{\gamma\delta,1}\Psi^0_{\gamma\|\alpha}\partial_3\Psi_\delta + \right. \\ & \left. - a^{\gamma\delta}\left(\Psi^0_{\gamma\|\alpha}\Gamma^{\rho,0}_{3\delta}\Psi_\rho + \partial_3\Psi_\delta x_3\Gamma^{k,1}_{\gamma\alpha}\Psi_k\right)\right\}, \end{aligned} \tag{3.39}$$

$$E^0_{\alpha\|\beta}(\Psi) = \frac{1}{2}\left(\Psi^0_{3\|\alpha}\ \Psi^0_{3\|\beta} + a^{\gamma\delta}(y)\ \Psi^0_{\gamma\|\alpha}\Psi^0_{\delta\|\beta} - a_{\alpha\beta}\right), \tag{3.40}$$

$$E^n_{i\|j}(\Psi) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k,l=-2}^{n} x_3^k g^{ms,k}\ \Psi^l_{m\|i}\Psi^{n-l-k}_{s\|j} - x_3^n g^n_{ij}\right), n \geq 1 \tag{3.41}$$

$$\Psi_{3\|3}^{-1} = \partial_3 \Psi_3, \Psi_{3\|3}^{k} = 0 \text{ si } k \neq -1,\ \Psi_{i\|\alpha}^{l} = \Psi_{\alpha\|i}^{l} = 0 \text{ si } l \leq -2, \tag{3.42}$$

$$\Psi_{\alpha\|3}^{-1} = \partial_3 \Psi_\alpha, \Psi_{i\|\alpha}^{-1} = 0, \Psi_{\alpha\|3}^{0} = -\Gamma_{3\alpha}^{\rho *} \Psi_\rho, \Psi_{i\|\alpha}^{0} = \partial_\alpha \Psi_i - \Gamma_{i\alpha}^{k,0} \Psi_k, \Psi_{i\|j}^{l} = -x_3^l \Gamma_{ij}^{k,l} \Psi_k, l \geq 1, \tag{3.43}$$

$g^{ij,k}$, $g_{ij}^{n}$ et $\Gamma_{ij}^{k,l}$ se trouvent dans les développements asymptotique de $g^{ij}(\varepsilon)$, $g_{ij}(\varepsilon)$ et $\Gamma_{ij}^{k}(\varepsilon)$ respectivement.

**Lemme 26 :** $I(\varepsilon)$ admet un développement asymptotique en puissances de $\varepsilon$

$$I(\varepsilon)(\Psi) = \sum_{n=-3}^{\infty} I^n(\Psi)\ \varepsilon^n, \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned} I^n(\Psi) &= \tfrac{1}{2} \int_\Omega \sqrt{a(y)}\ \textstyle\sum_{p=-2}^{n-1} \left( A^{ijkl}(0)\ E_{i\|j}^{p}(\Psi)\ E_{k\|l}^{n-1-p}(\Psi) \right)\ dx + \\ &+ \tfrac{1}{2} \int_\Omega \textstyle\sum_{q=1}^{\infty} \left( x_3^q \left( \sqrt{g(x)} \right)^q\ \sum_{p=-2}^{n-1} \left( A^{ijkl}(0)\ E_{i\|j}^{p}(\Psi)\ E_{k\|l}^{n-1-p-q}(\Psi) \right) \right)\ dx. \end{aligned} \tag{3.45}$$

**Preuve :** D'après l'équation (3.23),

$$I(\varepsilon)(\Psi) = \varepsilon \frac{1}{2} \int_\Omega \sqrt{g(\varepsilon)(x)}\ A^{ijkl}(\varepsilon)(x)\ E_{i\|j}(\varepsilon)(\Psi)\ E_{k\|l}(\varepsilon)(\Psi)\ dx,$$

Il suffit alors de remplacer $E(\varepsilon)$ par son développement asymptotique en puissances de $\varepsilon$, puis d'effectuer le changement de variable $\pi^\varepsilon$ (2.2) afin d'obtenir l'expression annoncée. ■

**Lemme 27 :** $l(\varepsilon)$ admet un développement asymptotique en puissances de $\varepsilon$

$$l(\varepsilon)(\Psi) = \sum_{n=0}^{\infty} l^n(\Psi)\ \varepsilon^n, \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned} l^n(\Psi) &= \int_\Omega \sqrt{a(y)}\ f^{n-1}.\Psi\ dx + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} \sqrt{a(y)} h^n.\Psi dS + \\ &+ \int_\Omega \textstyle\sum_{p=1}^{\infty} x_3^p \left( \sqrt{g(x)} \right)^p\ \left( f^{n-1-p}.\Psi \right)\ dx + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} \sum_{p=1}^{\infty} x_3^p \left( \sqrt{g(x)} \right)^p\ \left( h^{n-p}.\Psi \right) dS. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Tel que

$$f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} f^n \ \varepsilon^n,$$
$$h(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} h^n \ \varepsilon^n.$$

**Preuve :** On a

$$l(\varepsilon)(\Psi) = \varepsilon \int_{\Omega} \sqrt{g(\varepsilon)(x)} f^i(\varepsilon) \Psi_i dx + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} \sqrt{g(\varepsilon)(x)} h^i(\varepsilon) \Psi_i dS,$$

il suffit d'effectuer le changement de variable $\pi^{\varepsilon}$ et de remplacer $g(\varepsilon)$, $f(\varepsilon)$ et $h(\varepsilon)$ par leurs développements asymptotiques et de rassembler les termes de même degré. ■

**Proposition 28 :** La fonctionnelle $J(\varepsilon)$ admet un développement asymptotique en puissances de $\varepsilon$

$$J(\varepsilon)(\Psi) = \sum_{n=-3}^{\infty} J^n(\Psi) \ \varepsilon^n. \tag{3.48}$$

**Preuve :** Comme

$$J(\varepsilon) = I(\varepsilon) - l(\varepsilon),$$

la conclusion découle des lemmes 26 et 27. De plus,

$$J^n = I^n - l^n.$$

■

## 3.5 Résolution des premiers problèmes variationnels

Dans cette section, on résout les problèmes $P_n$ pour $n$ négatif. Les problèmes $P_{-3}$ à $P_{-1}$ sont indépendants des forces appliquées. On montre que les solutions de ces problèmes sont les éléments $\varphi$ tels que

$$\partial_3 \varphi = 0. \tag{3.49}$$

Le problème $P_0$ est le premier où des termes de forces extérieures interviennent. Sa résolution impose la condition

$$h_+^0(y) + h_-^0(y) = 0, \forall y \in \omega$$

où

$$\begin{aligned} h_+^0(y) &= h^0(y, +1), \forall y \in \omega \\ h_-^0(y) &= h^0(y, -1), \forall y \in \omega \end{aligned}$$

**Hypothèse 2**

$$h_+^0 = h_-^0 = 0.$$

### 3.5.1 Problèmes sans forces extérieures

**Proposition 29 :**

$$J^{-3}(\Psi) = \frac{1}{2} \int_\Omega \sqrt{a(y)}\ A^{3333}(0)\ E_{3\|3}^{-2}(\Psi) E_{3\|3}^{-2}(\Psi)\ dx. \tag{3.50}$$

**Preuve :** D'après la section précédente,

$$J^{-3}(\Psi) = \frac{1}{2} \int_\Omega \sqrt{a(y)}\ A^{ijkl}(0)\ E_{i\|j}^{-2}(\Psi)\ E_{k\|l}^{-2}(\Psi)\ dx,$$

d'après le lemme 25, seuls les termes $E_{3\|3}^{-2}$ sont non nuls

$$E_{3\|3}^{-2}(\Psi) = \frac{1}{2}\left(\partial_3 \Psi_3^0\ \partial_3 \Psi_3^0 + a^{\alpha\beta}(y)\ \partial_3 \Psi_\alpha^0\ \partial_3 \Psi_\beta^0\right).$$

On a donc

$$J^{-3}(\Psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sqrt{a(y)}\ A^{3333}(0)\ E^{-2}_{3\|3}(\Psi) E^{-2}_{3\|3}(\Psi)\ dx,$$

d'où la conclusion. ■

Les éléments $\Psi$ de $A_{d,-2}$ qui minimisent $J^{-3}$ sont donc les éléments $\Psi$ tels que

$$\partial_3 \Psi^0_3\ \partial_3 \Psi^0_3 + a^{\alpha\beta}(y)\ \partial_3 \Psi^0_\alpha\ \partial_3 \Psi^0_\beta = 0, \tag{3.51}$$

alors

$$a^3(y)\ \partial_3 \Psi^0_3\ \partial_3 \Psi^0_3 = 0 \Longrightarrow\ \partial_3 \Psi^0_3 = 0 \text{ sur } \Omega,$$

d'après (3.51) $\partial_3 \Psi^0_\alpha = 0$, alors

$$\partial_3 \Psi^0 = 0 \tag{3.52}$$

appartenant à

$$A_{d,-3} = \left\{ \Psi \in \left(W^{1,4}\left(\Omega; \mathbb{R}^3\right)\right)^{\mathbb{N}} : \sum_n \Psi^n \varepsilon^n \in A_d(\Omega) \right\}.$$

C'est à dire

$$A_{d,-2} = \left\{ \Psi \in \left(W^{1,4}\left(\Omega; \mathbb{R}^3\right)\right)^{\mathbb{N}} : \partial_3 \Psi^0 = 0, \left(\Psi^n = 0\ ,\ n > 1 \text{ et } \Psi^0 = \theta,\ \Psi^1 = x_3 a_3 \text{ sur } \Gamma_0\right) \right\}. \tag{3.53}$$

On vérifie aisément que pour tout $\Psi \in A_{d,-2}$,

$$E^{-2}_{3\|3}(\Psi) = E^{-1}_{3\|3}(\Psi) = E^{-1}_{3\|\alpha}(\Psi) = 0.$$

D'après les expressions de $J^{-2}$ et $J^{-1}$ , ceci implique

$$J^{-2} = 0 \text{ et } J^{-1} = 0 \text{ sur } A_{d,-2}.$$

Tout les éléments de $A_{d,-2}$ sont des minimiseurs de $J^{-2}$ sur $A_{d,-2}$. En d'autre termes, $A_{d,-1} = A_{d,-2}$ de même, $A_{d,0} = A_{d,-1}$ (d'après la définition)

$$A_{d,0} = A_{d,-1} = A_{d,-2}.$$

### 3.5.2 Résolution du problème $P_0$

De nouveau, pour tout $\Psi \in A_{d,0}$,

$$I^0 (\Psi) = 0.$$

Ainsi,

$$J^0 (\Psi) = -l^0 (\Psi) = -\int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} \sqrt{a (y)} h^0 . \Psi^0 dS = -\int_\omega \sqrt{a (y)} \left( h^0_+ + h^0_- \right) . \Psi^0 dy.$$

Comme annoncé, $J^0$ admet des minimiseurs sur $A_{d,0}$ si et seulement si

$$h^0_+ + h^0_- = 0.$$

Cette condition vérifiée, le problème $P_0$ est alors trivial

$$A_{d,1} = A_{d,0}.$$

## 3.6 Modèle membranaire non linéaire

On suppose qu'il existe deux fonctions $f^0 \in \left(L^2 (\Omega)\right)^3$ et $h^1 \in \left(L^2 (\Gamma_+ \cup \Gamma_-)\right)^3$ telles que :

$$f (\varepsilon) (x) = \varepsilon^0 f^0 (x) \text{ pour tout } x \in \Omega, \tag{3.54}$$

$$h (\varepsilon) (x) = \varepsilon^1 h^1 (x) \text{ pour tout } x \in \Gamma_+ \cup \Gamma_-, \tag{3.55}$$

et la variété des déformations inextensionnelles admissibles

$$\Psi^0(\omega) = \left\{ \psi \in \left(W^{1,4}(\omega)\right)^3,\ E^0_{\alpha\|\beta}(\psi) = 0, \quad \psi = \theta \quad \text{sur} \quad \gamma_0 \right\}$$

est réduite à la carte $\theta$ définissant la surface moyenne non déformée.

On substitue (3.54) et (3.55) dans $(J(\varepsilon))$, on obtient à l'ordre $\varepsilon^1$

$$\begin{aligned}
J^1(\Psi) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \sqrt{a(y)}\ A^{ijkl}(0)\ E^0_{i\|j}(\Psi)\ E^0_{k\|l}(\Psi)\ dx - \\
&\quad - \int_\Omega \sqrt{a(y)}\ f^0.\Psi^0\ dx - \int_{\Gamma_+\cup\Gamma_-} \sqrt{a(y)} h^1.\Psi^0 dS, \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \sqrt{a(y)}\ A^{\alpha\beta\gamma\delta}(0)\ E^0_{\alpha\|\beta}\left(\Psi^0\right)\ E^0_{\gamma\|\delta}\left(\Psi^0\right)\ dx + \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_\Omega \sqrt{a(y)} \Big\{\ A^{\alpha\beta i3}(0)\ E^0_{\alpha\|\beta}\left(\Psi^0\right)\ E^0_{i\|3}\left(\Psi^0, \Psi^1\right) + \\
&\quad + A^{j3\gamma\delta}(0)\ E^0_{j\|3}\left(\Psi^0, \Psi^1\right)\ E^0_{\gamma\|\delta}\left(\Psi^0\right) + A^{i3j3}(0)\ E^0_{i\|3}\left(\Psi^0, \Psi^1\right) E^0_{j\|3}\left(\Psi^0, \Psi^1\right) \Big\}\, dx - \\
&\quad - \int_\Omega \sqrt{a(y)}\ f^0.\Psi^0\ dx - \int_{\Gamma_+\cup\Gamma_-} \sqrt{a(y)} h^1.\Psi^0 dS.
\end{aligned}$$

Où

$$E^0_{3\|\alpha}\left(\Psi^0, \Psi^1\right) = \frac{1}{2}\left(\Psi^0_{3\|\alpha}\partial_3\Psi^1_3 + a^{\gamma\delta}\Psi^0_{\gamma\|\alpha}\partial_3\Psi^1_\delta + a^{\gamma\delta}\Psi^0_{\gamma\|\alpha}\Psi^0_{\delta\|3}\right), \tag{3.56}$$

$$E^0_{3\|3}\left(\Psi^0, \Psi^1\right) = \frac{1}{2}\left(a^{ij}\partial_3\Psi^1_i\partial_3\Psi^1_j + a^{\alpha\beta}\Psi^0_{\alpha\|3}\Psi^0_{\beta\|3} - 1\right), \tag{3.57}$$

$$\Psi^0_{\alpha\|3} = -\Gamma^{\rho,0}_{3\alpha}\Psi^0_\rho, \tag{3.58}$$

$$\Psi^0_{\alpha\|\beta} = \partial_\beta\Psi^0_\alpha - \Gamma^{k,0}_{\alpha\beta}\Psi^0_k, \tag{3.59}$$

on a

$$J^1(\Psi) = J^1_0\left(\Psi^0\right) + J^1_1\left(\Psi^0, \Psi^1\right), \tag{3.60}$$

$$J^1_0\left(\Psi^0\right) = \frac{1}{2}\int_\Omega \sqrt{a(y)}\ A^{\alpha\beta\gamma\delta}(0)\ E^0_{\alpha\|\beta}\left(\Psi^0\right)\ E^0_{\gamma\|\delta}\left(\Psi^0\right)\ dx, \tag{3.61}$$

$$J_1^1\left(\Psi^0,\Psi^1\right) = \frac{1}{2}\int_\Omega \sqrt{a\left(y\right)}\Big\{A^{\alpha\beta i3}\left(0\right)\ E^0_{\alpha\|\beta}\left(\Psi^0\right)\ E^0_{i\|3}\left(\Psi^0,\Psi^1\right)+$$
$$+A^{j3\gamma\delta}\left(0\right)\ E^0_{j\|3}\left(\Psi^0,\Psi^1\right)\ E^0_{\gamma\|\delta}\left(\Psi^0\right)+$$
$$+\ A^{i3j3}\left(0\right)\ E^0_{i\|3}\left(\Psi^0,\Psi^1\right)E^0_{j\|3}\left(\Psi^0,\Psi^1\right)\Big\}\,dx. \tag{3.62}$$

**Théorème 30 :** *Si* $\left(\varphi^0,\varphi^1,...\right)$ *est solution du problème* $P_1$*, le premier terme* $\varphi^0$ *du développement asymptotique de la déformation minimise l'énergie* $J_*^1$ *définie par*

$$J_*^1\left(\Psi\right) = \frac{1}{2}\int_\omega \sqrt{a\left(y\right)}\ A_{11}^{\alpha\beta\gamma\delta}\left(y\right)\ E^0_{\alpha\|\beta}\left(\Psi\right)\ E^0_{\gamma\|\delta}\left(\Psi\right)\ dy -$$
$$-\int_\omega \sqrt{a\left(y\right)}\left(\int_{-1}^{+1} f^0\ \left(y,x_3\right)dx_3+h_+^1+h_-^1\right).\Psi dy \tag{3.63}$$

*sur l'ensemble des déformations*

$$A_d\left(\omega\right)=\left\{\Psi\in W^{1,4}\left(\omega;\mathbb{R}^3\right),\ \Psi \text{ injective sur } \omega,\ \ \det\nabla\Psi>0,\ \ \Psi=\theta \text{ sur } \Gamma_0\right\}$$

*Où*

$$E^0_{\alpha\|\beta}\left(\phi^0\right)=\frac{1}{2}\left(\phi^0_{3\|\alpha}\phi^0_{3\|\beta}+a^{\gamma\delta}\left(y\right)\ \phi^0_{\gamma\|\alpha}\phi^0_{\delta\|\beta}-a_{\alpha\beta}\right), \tag{3.64}$$
$$A_{11}^{\alpha\beta\gamma\delta}\left(y\right)=\int_{-1}^{+1} D^{\alpha\beta\gamma\delta}\left(y,x_3\right)\ dx_3,$$

*tel que* $D^{\alpha\beta\gamma\delta}$ *données dans (3.27).*

**Proposition 31 :** Le minimum de $J_1^1\left(\Psi^0,.\right)$ à $\Psi^0$ fixé est atteint pour une fonction $\varphi^1$ vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{c} A^{\alpha\beta i3}\left(0\right)E^0_{\alpha\|\beta}\left(\Psi^0\right)+A^{i3j3}\left(0\right)E^0_{j\|3}\left(\Psi^0,\varphi^1\right)=0. \\ \varphi^1=x_3a_3 \text{ sur } \Gamma_0 \end{array}\right. \tag{3.65}$$

**Preuve :** Le minimum de $J_1^1\left(\Psi^0,.\right)$ à $\Psi^0$ fixé, alors $\varphi^1$ vérifie :

$$\left(J_1^1\left(\Psi^0,\varphi^1\right)\right)'_{\Psi^1}=0 \text{ (la dérivée de } J_1^1\left(\Psi^0,\Psi^1\right) \text{ au point } \Psi^1\text{)},$$

$$\begin{aligned}\left(J_1^1\left(\Psi^0,\Psi^1\right)\right)'_{\Psi^1} &= \frac{1}{2}\int_\Omega \sqrt{a\left(y\right)}\left\{A^{\alpha\beta i3}\left(0\right)\ E^0_{\alpha\|\beta}\left(\Psi^0\right)\left(E^0_{i\|3}\left(\Psi^0,\Psi^1\right)\right)'_{\Psi^1}+\right.\\ &+A^{j3\gamma\delta}\left(0\right)\ \left(E^0_{j\|3}\left(\Psi^0,\Psi^1\right)\right)'_{\Psi^1}\ E^0_{\gamma\|\delta}\left(\Psi^0\right)+\\ &+A^{i3j3}\left(0\right)\ \left(E^0_{i\|3}\left(\Psi^0,\Psi^1\right)\right)'_{\Psi^1}\ E^0_{j\|3}\left(\Psi^0,\Psi^1\right)+\\ &\left.+A^{i3j3}\left(0\right)E^0_{i\|3}\left(\Psi^0,\Psi^1\right)\left(E^0_{j\|3}\left(\Psi^0,\Psi^1\right)\right)'_{\Psi^1}\right\}dx,\end{aligned} \tag{3.66}$$

alors l'équation suivante

$$\left(J_1^1\left(\Psi^0,\varphi^1\right)\right)'_{\Psi^1}=0,$$

admet une première solution $\varphi^1$ vérifie

$$A^{\alpha\beta i3}\left(0\right)E^0_{\alpha\|\beta}\left(\Psi^0\right)+A^{i3j3}\left(0\right)E^0_{j\|3}\left(\Psi^0,\varphi^1\right)=0.$$

Alors

$$E^0_{j\|3}\left(\Psi^0,\varphi^1\right)=-d_{ij}\left(x\right)\ A^{\alpha\beta i3}\left(0\right)\ E^0_{\alpha\|\beta}\left(\Psi^0\right). \tag{3.67}$$

■

D'après la proposition précédente, on démontre le théorème 29.

**Preuve :** On substitue (3.67) dans $J_1^1\left(\Psi^0,\varphi^1\right)$, on obtient

$$\begin{aligned}&\inf_{\left\{\left(\Psi^0,\Psi^1,..\right):\left(\phi^0,\Psi^1,..\right)\in A_{d,1}\right\}}\left\{J_1^1\left(\phi^0,\Psi^1,..\right)\right\}=J_1^1\left(\phi^0,\varphi^1\right)=\\ &=\tfrac{1}{2}\int_\Omega\sqrt{a\left(y\right)}\ \left(-A^{\alpha\beta i3}\left(0\right)d_{ij}\left(x\right)\ A^{j3\gamma\delta}\left(0\right)\ \right)E^0_{\alpha\|\beta}\left(\phi^0\right)\ E^0_{\gamma\|\delta}\left(\phi^0\right)\ dx,\end{aligned} \tag{3.68}$$

alors

$$J_*^1\left(\phi^0\right)=\frac{1}{2}\int_\Omega\sqrt{a\left(y\right)}\ \left(A^{\alpha\beta\gamma\delta}\left(0\right)-A^{\alpha\beta i3}\left(0\right)d_{ij}\left(x\right)\ A^{j3\gamma\delta}\left(0\right)\ \right)E^0_{\alpha\|\beta}\left(\phi^0\right)\ E^0_{\gamma\|\delta}\left(\phi^0\right)\ dx-l^1\left(\phi^0\right). \tag{3.69}$$

Si

$$\phi^0 \in A_d(\omega) = \left\{ \Psi \in W^{1,4}\left(\omega; \mathbb{R}^3\right), \ \Psi \text{ injective sur } \omega, \ \det \nabla \Psi > 0, \ \Psi = \theta \text{ sur } \Gamma_0. \right\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} J_*^1\left(\phi^0\right) &= \frac{1}{2}\int_\omega \sqrt{a(y)}\, A_{11}^{\alpha\beta\gamma\delta}(y)\ E^0_{\alpha\|\beta}\left(\phi^0\right)\ E^0_{\gamma\|\delta}\left(\phi^0\right)\ dy - \\ &\quad - \int_\omega \sqrt{a(y)} \left( \int_{-1}^{+1} f^0\ (y, x_3)\, dx_3 + h^1_+ + h^1_- \right).\phi^0 dy. \qquad (3.70) \end{aligned}$$

Où

$$E^0_{\alpha\|\beta}\left(\phi^0\right) = \frac{1}{2}\left(\phi^0_{3\|\alpha}\phi^0_{3\|\beta} + a^{\gamma\delta}(y)\ \phi^0_{\gamma\|\alpha}\phi^0_{\delta\|\beta} - a_{\alpha\beta}\right),$$

$$\begin{aligned} h_+^{1,i}(y) &= h^{1,i}(y,+1), \forall y \in \omega \\ h_-^{1,i}(y) &= h^{1,i}(y,-1), \forall y \in \omega \end{aligned}$$

tel que $A_{11}^{\alpha\beta\gamma\delta}(y)$ et $D^{\alpha\beta\gamma\delta}(x)$ sont données dans (3.26) et (3.27) respectivement.

On prend $\varepsilon$ petit, on obtient $\varphi^0$ injective sur $\omega$, det $\nabla\varphi^0 > 0$ et $\varphi^0 = \theta$ sur $\Gamma_0$. ■

# Conclusion Générale

Dans ce travail, on effectue l'analyse asymptotique d'un modèle tridimensionnel de coques non linéairement élastiques, constituées d'un matériau non homogène et anisotrope. On choisit le couple composé du champ de déplacement et le tenseur des contraintes de la coque comme inconnues du problème, et on applique la méthode des développements asymptotiques formels, avec l'épaisseur de la coque comme petit paramètre. On obtient :

**1-** Dans le cas des coques inhibé, c'est-à-dire l'espace de déplacements inextensionnels est réduit à $\{0\}$et si les forces appliquées de volume sont d'ordre zéro, les forces appliquées de surface sont d'ordre 1, on obtient deux modèles formels membranaires et la loi de comportement limite.

**2-** Dans le cas des coques non inhibé, c'est-à-dire l'espace de déplacements inextensionnels n'est pas réduit à $\{0\}$et si les forces appliquées de volume sont d'ordre 2 et que les forces appliquées de surface sont d'ordre 3, d'après la méthode des développements asymptotiques formels, on obtient un problème limite couple les deux effets de membrane et de flexion et la loi de comportement limite.

D'une autre façon, on choisit la déformation de la coque comme inconnue du problème de minimisation de la fonctionnelle de l'énergie, et on applique la méthode des développements asymptotiques formels, avec l'épaisseur de la coque comme petit paramètre et en faisant des hypothèses sur les forces appliquées, on obtient le modèle bidimensionnel non linéaire de coques membranaires.

# Annexe A

# Équations d'équilibre et loi de comportement en coordonnées curvilignes

On considère un corps élastique d'épaisseur quelconque, défini sur l'ouvert $\widehat{\Omega}$ et encastré sur la partie( $\widehat{\Gamma_0} = \Theta\left(\Gamma_0\right)$) de sa frontière. Soumis à des forces de volume $\widehat{f}$ et de surface $\widehat{h}$, il subit un champ de déplacement $\widehat{u}$ et un tenseur des contraintes $\widehat{\sigma}$, solution du problème variationnel (1.19). On réécrit ce problème en coordonnées curvilignes.

**Lemme 32 :** La formulation variationnelle (1.19) s'écrit en coordonnées curvilignes :

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Trouver } (u,\sigma)\in V\times\Sigma;\text{tel que :}\\ \int_\Omega\sqrt{g(x)}S_{ijkl}(x)\,\sigma^{kl}\tau^{ij}(x)\,dx=\\ =\int_\Omega\sqrt{g(x)}E_{i\|j}(u)\,\tau^{ij}(x)\,dx,\forall\tau\in\Sigma\\ \int_\Omega\sqrt{g(x)}\sigma^{ij}F_{i\|j}(u,v)\,dx=\int_\Omega\sqrt{g(x)}f^iv_idx+\\ +\int_{\Gamma_1}\sqrt{g(x)}h^iv_i\sqrt{g^{pq}(x)\,n_p(x)\,n_q(x)}dS,\forall v\in V\end{array}\right.,\quad\text{(A.1)}$$

ou

$$\left\{\begin{array}{l}\Sigma=\left\{\tau=\left(\tau^{ij}\right)\in\left(L^2(\Omega)\right)^9,\tau^{ij}=\tau^{ji}\right\},\\ V=\left\{v\in(v_i)\in\left(W^{1,4}(\Omega)\right)^3,v=0\text{ sur }\Gamma_0\right\},\end{array}\right.$$

$$E_{i\|j}(u)=\frac{1}{2}\left(u_{i\|j}+u_{j\|i}+g^{ms}u_{m\|i}u_{s\|j}\right),$$

$$F_{i\|j}(u,v)=\frac{1}{2}\left(v_{j\|i}+v_{i\|j}+g^{ms}(x)\left(u_{m\|i}v_{s\|j}+u_{m\|j}v_{s\|i}\right)\right),$$

$$v_{i\|j}=\partial_jv_i-\Gamma_{ij}^kv_k.$$

**Preuve :** $\widehat{\Omega}=\Theta(\Omega)$, $\widehat{\Gamma_0}=\Theta(\Gamma_0)$ et $\widehat{\Gamma_1}=\Theta(\Gamma_1)$, $\widehat{u}=0$ sur $\widehat{\Gamma_0}$, $\widehat{x}=\Theta(x)$, $\Theta\in C^3\left(\overline{\Omega},\Re^3\right)$, $g_i=\partial_i\Theta$ sont linéairement indépendants en tout point de $\overline{\Omega}$, la base contravariante associée constituée de $\left\{g^1,g^2,g^3\right\}$ est définie par les relations $g_i.g^j=\delta_{ij}$. On peut alors définir les composantes covariantes $g_{ij}=g_i.g_j$ et contravariantes $g^{ij}=g^i.g^j$ du tenseur métrique. On définit également l'élément de volume $d\widehat{x}=\sqrt{g(x)}dx$ et l'élément de surface $d\widehat{S}=\det(\nabla\Theta)\|\nabla\Theta^{-T}n\|dS=\sqrt{g(x)}\sqrt{g^{ij}n_in_j}dS$, ou $g=\det(g_{ij})$ et $n_ig^i$ est la normale unitaire extérieure à la surface $\widehat{\Gamma}$, ainsi que les symboles de Christoffel $\Gamma_{ij}^p=g^p.\partial_jg_i$. On pose $\forall x\in\Omega$ :

$$\widehat{u}(\widehat{x})=u_i(x)\,g^i(x),\widehat{f}(\widehat{x})=f^i(x)\,g_i(x),\widehat{h}(\widehat{x})=h^i(x)\,g_i(x),\ \widehat{v}(\widehat{x})=v_i(x)\,g^i(x).$$

On calcule maintenant les dérivées covariantes d'un vecteur.

D'après la relation

$$\widehat{v}\left(\widehat{x}\right)=v_{i}\left(x\right)g^{i}\left(x\right),$$

on déduit que

$$\begin{aligned}\widehat{\partial_m}\widehat{v}\left(\widehat{x}\right) &= \partial_j\left(v_p\left(x\right)g^p\left(x\right)\right)\frac{\widehat{\partial_m}\ \widehat{x}}{\partial_j x}, \\ &= \partial_j\left(v_p\left(x\right)g^p\left(x\right)\right)\left(g^j\left(x\right)\right)_m, \\ &= \left(\partial_j v_p\left(x\right)g^p\left(x\right)+v_p\left(x\right)\partial_j g^p\left(x\right)\right)\left(g^j\left(x\right)\right)_m.\end{aligned}$$

De plus, en utilisant la définition des symboles de Christoffel

$$\Gamma_{ij}^{k}\left(x\right)=g^{k}\left(x\right).\partial_{j}g_{i}\left(x\right)=-\partial_{j}g^{k}\left(x\right).g_{i}\left(x\right),$$

on obtient

$$\begin{aligned}\widehat{\partial_m}\widehat{v}\left(\widehat{x}\right) &= \Big(\partial_j v_p\left(x\right)g^p\left(x\right)-\Gamma_{ij}^{p}\left(x\right)v_p\left(x\right)g^i\left(x\right)\Big)\left(g^j\left(x\right)\right)_m, \\ &= v_{i\|j}\left(x\right)g^i\left(x\right).\left(g^j\left(x\right)\right)_m,\end{aligned}$$

avec

$$v_{i\|j}=\partial_j v_i-\Gamma_{ij}^{k}v_k,$$

et par conséquence

$$\widehat{\partial_m}\widehat{v_n}\left(\widehat{x}\right)=v_{i\|j}\left(x\right)\left(g^i\left(x\right)\right)_n\left(g^j\left(x\right)\right)_m. \tag{A.2}$$

On calcule les composantes covariantes du tenseur des déformations de Green-Saint-Venant

$$\widehat{E_{ij}}\left(\widehat{u}\right)=\frac{1}{2}\Big(\widehat{\partial}_i\widehat{u}_j+\widehat{\partial}_j\widehat{u}_i+\widehat{\partial}_i\widehat{u_k}\widehat{\partial}_j\widehat{u_k}\Big),$$

d'après (A.2), on obtient

$$E_{i\|j}\left(u\right)=\frac{1}{2}\left(u_{i\|j}+u_{j\|i}+g^{ms}u_{m\|i}u_{s\|j}\right), \tag{A.3}$$

alors les composantes contravariantes du tenseur des contraintes

$$\sigma^{ij} = A^{ijkl}\left(x\right) E_{k\|l}\left(u\right), x \in \Omega. \tag{A.4}$$

$A^{ijkl}$ sont les composantes contravariantes du tenseur de rigidité.

De même, on obtient aussi

$$\digamma_{i\|j}\left(u,v\right) = \frac{1}{2}\left(v_{j\|i} + v_{i\|j} + g^{ms}\left(x\right)\left(u_{m\|i}v_{s\|j} + u_{m\|j}v_{s\|i}\right)\right). \tag{A.5}$$

$S_{ijkl}$ sont les composantes covariantes du tenseur de souplesse.

D'après (A.3), (A.4) et (A.5), on obtient alors le problème en coordonnées curvilignes (A.1). ■

Si $\widehat{\Omega}$ est la coque qui est donnée dans le paragraphe 1.4 du chapitre 1, les conditions de bord se déduisent de l'expression de la normale unitaire à $\Gamma_+ \cup \Gamma_-$, la normale à la surface $\Gamma_+$ étant donnée par $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et celle à $\Gamma_-$ par $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, alors

$$\sqrt{g^{pq}\left(x\right) n_p\left(x\right) n_q\left(x\right)} = 1, \forall x \in \Gamma_+ \cup \Gamma_-.$$

# Bibliographie

[1] BALL J. M. Convexity conditions and existence therems in nonlinear elasticity, Arch. Rational Mech. Anal. 63(4), p. 337-403, 1976/77.

[2] BREZIS H. *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Dunod, Paris, 1999.

[3] CHACHA D. A. Asymptotic analysis of nonlinear elastic plates, C. R. Mecanique 330, p. 581-586, 2002.

[4] CHRISTOPHE C. Modélisation de coques élastiques minces géométriquement non linéaires et application à la piézoélectricité, Thèse de doctorat, Université Paris 6, 2001.

[5] CIARLET P. G. *Élasticité Tridimensionnelle*, Masson, Paris New York, 1986.

[6] CIARLET P. G. *Mathematical Elasticity*, Volume 3 : Theory of shells, North Holland, Amesterdam, 2000.

[7] CIARLET P. G. & DANIEL C. A minimization problem arizing in nonlinear thin shell theory, Journées Équations Aux Dérivées Partielles, p.1-4, 1999.

[8] CIARLET P. G. & LODS V. Asymptotic analysis of linearly elastic shells, I. Justifica-

tion of Membrane shell equations , Arch. Rational Mech. Anal. 136, © Springer-Verlag 1996. P. 119-161.

[9] CIARLET P. G. LODS V. & MIARA B. Asymptotic analysis of linearly elastic shells, II. Justification of Flexural shell equations , Arch. Rational Mech. Anal. 136, p. 163-190. © Springer-Verlag 1996.

[10] CIARLET P. G. & RABIER P. *Les équations de Von Karman*, Lecture Notes in Math. Vol. 826, Spring-Verlag, Berlin 1980.

[11] CIARLET P. G. & SANCHEZ P. Un théorème d'existence et d'unicité pour les équations des coques membranaires, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 317, Série I, p. 801-805, 1993.

[12] LODS V. & MIARA B. Nonlinearly Elastic Shell Models : A Formal Asymptotic Approach II. The Flexural Model, Arch. Rational Mech. Anal. 142, p. 335-374, 1998.

[13] MIARA B. Nonlinearly Elastic Shell Models : A Formal Asymptotic Approach I. The Membrane Model, Arch. Rational Mech. Anal. 142, p. 331-353, 1998.

[14] PANTZ O. Quelques problèmes de modélisation en élasticité non linéaire, Thèse de doctorat, Université Paris 6, 2001.

[15] PATRICK G. Modélisation asymptotiques : couplage flexion-membrane, modèles incrémentaux, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier-Grenoble I, laboratoire LMC-IMAG, 1992.

[16] ROQUEFORT A. Une simplification de l'analyse asymptotique formelle des coques non linéairement élastique, Revue Romaine de Mathématiques Pures et Appliquées, 47, à paraître, 2000.

[17] SANCHEZ-HUBERT J. & SANCHEZ-PALENCIA E. *Coques élastiques minces : propriétés asymptotiques*, Masson, 1997.

**Résumé**

Dans ce travail, on effectue l'analyse asymptotique d'un modèle tridimensionnel de coques non linéairement élastiques, constituées d'un matériau non homogène et anisotrope. On choisit le couple composé du champ de déplacement et le tenseur des contraintes de la coque comme inconnue du problème, et on applique la méthode des développements asymptotiques formels, avec l'épaisseur de la coque comme petit paramètre. En faisant des hypothèses sur les forces appliquées et selon les propriétés de la variété associée des déplacements inextensionnels admissibles, on retrouve les modèles bidimensionnels non linéaires membranaire et couplé flexion-membrane et la loi de comportement limite. D'une autre façon, on choisit la déformation de la coque comme inconnue du problème de minimisation de la fonctionnelle de l'énergie, et on applique la méthode des développements asymptotiques formels, avec l'épaisseur de la coque comme petit paramètre et en faisant des hypothèses sur les forces appliquées, on obtient le modèle bidimensionnel non linéaire de coques membranaires.
**Mots-clefs:** Analyse asymptotique, Modèle de coque, Elasticité non linéaire.

**ملخص**

في هذا العمل نطبق التحليل المقارب على مسألة المرونة غير الخطية لنموذج ثلاثي البعد لجسم منحني مرن غير خطي مركب من مادة غير متجانسة و متباينة الخواص. حيث نختار الثنائية المكونة من شعاع الموضع و الكمية الموترة للضغط الخاصة بكل جسم منحني كمجهول للمسألة نطبق طريقة النشر المقارب الشكلي حيث سمك الجسم المنحني صغير جدا. نأخذ فرضيات على القوى المطبقة و خصائص مجموعة أشعة الموضع غير الممددة المقبولة نجد نموذجين ثنائيي البعد موضوعين على المساحة الوسطى غير خطيين غشائي (membranaire) و مزدوج انحناء- غشاء (couplé flexion- membrane) و قانون السلوك الحدي. من جهة أخرى و بنفس الطريقة بحيث نعتبر التشويه كمجهول لمسألة البحث عن العنصر الأصغر لدالة الطاقة و بوضع فرضيات على القوى نجد نموذج لجسم منحني غشائي (membranaire) موضوع على المساحة الوسطى (ثنائيي البعد).

**Abstract**

In this work, we consider the asymptotic analysis of a three-dimensional model of nonlinearly elastic shells, constituted by a non homogeneous and anisotropic material. We choose the couple composed of the field of displacement and the tensor of the constraints of the shell as the unknown of the problem, and we apply the method of the formal asymptotic expansions, with the thickness of the shell as small parameter. Making appropriate assumptions on the applied forces and on the properties of the associated manifold of admissible inextensionnels displacements; we find again the nonlinear bi-dimensional models membrane and coupled flexural-membrane and the law of limits behavior. In other way, we choose the deformation of the shell as unknown of the problem of minimization of the functional of energy, and we apply the method of the formal asymptotic expansions, with the thickness of the shell as small parameter and making appropriate assumptions on the applied forces, we find the nonlinear bi-dimensional model of the membranes shells.
**Key-words** Asymptotic analysis, shell model, nonlinear elasticity.

**Résumé**

Dans ce travail, on effectue l'analyse asymptotique d'un modèle tridimensionnel de coques non linéairement élastiques, constituées d'un matériau non homogène et anisotrope. On choisit le couple composé du champ de déplacement et le tenseur des contraintes de la coque comme inconnue du problème, et on applique la méthode des développements asymptotiques formels, avec l'épaisseur de la coque comme petit paramètre. En faisant des hypothèses sur les forces appliquées et selon les propriétés de la variété associée des déplacements inextensionnels admissibles, on retrouve les modèles bidimensionnels non linéaires membranaire et couplé flexion-membrane et la loi de comportement limite. D'une autre façon, on choisit la déformation de la coque comme inconnue du problème de minimisation de la fonctionnelle de l'énergie, et on applique la méthode des développements asymptotiques formels, avec l'épaisseur de la coque comme petit paramètre et en faisant des hypothèses sur les forces appliquées, on obtient le modèle bidimensionnel non linéaire de coques membranaires.
**Mots-clefs:** Analyse asymptotique, Modèle de coque, Elasticité non linéaire.

**ملخص**

في هذا العمل نطبق التحليل المقارب على مسألة المرونة غير الخطية لنموذج ثلاثي البعد لجسم منحني مرن غير خطي مركب من مادة غير متجانسة و متباينة الخواص. حيث نختار الثنائية المكونة من شعاع الموضع و الكمية الموترة للضغط الخاصة بكل جسم منحني كمجهول للمسألة نطبق طريقة النشر المقارب الشكلي حيث سمك الجسم المنحني صغير جدا. نأخذ فرضيات على القوى المطبقة و خصائص مجموعة أشعة الموضع غير الممددة المقبولة نجد نموذجين ثنائيي البعد موضوعين على المساحة الوسطى غير خطيين غشائي (membranaire) و مزدوج انحناء- غشاء (couplé flexion- membrane) و قانون السلوك الحدي. من جهة أخرى و بنفس الطريقة بحيث نعتبر التشويه كمجهول لمسألة البحث عن العنصر الأصغر لدالة الطاقة و بوضع فرضيات على القوى نجد نموذج لجسم منحني غشائي (membranaire) موضوع على المساحة الوسطى (ثنائيي البعد).

**Abstract**

In this work, we consider the asymptotic analysis of a three-dimensional model of nonlinearly elastic shells, constituted by a non homogeneous and anisotropic material. We choose the couple composed of the field of displacement and the tensor of the constraints of the shell as the unknown of the problem, and we apply the method of the formal asymptotic expansions, with the thickness of the shell as small parameter. Making appropriate assumptions on the applied forces and on the properties of the associated manifold of admissible inextensionnels displacements; we find again the nonlinear bi-dimensional models membrane and coupled flexural-membrane and the law of limits behavior. In other way, we choose the deformation of the shell as unknown of the problem of minimization of the functional of energy, and we apply the method of the formal asymptotic expansions, with the thickness of the shell as small parameter and making appropriate assumptions on the applied forces, we find the nonlinear bi-dimensional model of the membranes shells.
**Key-words** Asymptotic analysis, shell model, nonlinear elasticity.