

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Kasdi Merbah Ouargla

Faculté des Sciences et sciences de l'ingénieur
Département : Génie Mécanique et Electronique

N° /Mag/
Série : /GM/

MÉMOIRE

Pour obtenir le Diplôme de

Magister

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Thermo-Energétique

Thème

SIMULATION NUMERIQUE DE LA DYNAMIQUE DES INTERACTION FLUIDES-STRUCTURES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Sera présenté et soutenu publiquement par :

OUAFEK Toufik

Soutenance du : 04 / 06 /2009 devant le jury

N. SETTOU	Professeur Université de Kasdi Merbah OUARGLA
S. SAOULI	Professeur Université de Kasdi Merbah OUARGLA
M. KADJA	Professeur Université de Mentouri CONSTANTINE
Z. NEMOUCHI	Professeur Université de Mentouri CONSTANTINE
R. BELAKROUM	M.Assistant Université de Kasdi Merbah OUARGLA

Président
Examineur
Examineur
Rapporteur
Invité

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Kasdi Merbah Ouargla
Faculté des Sciences et sciences de l'ingénieur
Département : Génie Mécanique et Electronique

N° /Mag/
Série : /GM/

MÉMOIRE

Pour obtenir le Diplôme de

Magister

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Thermo-Energétique

Thème

SIMULATION NUMERIQUE DE LA DYNAMIQUE DES INTERACTION FLUIDES-STRUCTURES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Sera présenté et soutenu publiquement par :

OUAFEK Toufik

Soutenance du : 04 /06 /2009 devant le jury

N. SETTOU	Professeur Université de Kasdi Merbah OUARGLA	Président
S. SAOULI	Professeur Université de Kasdi Merbah OUARGLA	Examinateur
M. KADJA	Professeur Université de Mentouri CONSTANTINE	Examinateur
Z. NEMOUCHI	Professeur Université de Mentouri CONSTANTINE	Rapporteur
R. BELAKROUM	M.Assistant Université de Kasdi Merbah OUARGLA	Invité

Dédicace

A MA MERE,

A MON PERE,

A MA FEMME,

A MES ENFANTS,

A TOUS MES FRERES ET SOEURS,

A L' ESPRIT DE TOUS MES ANCETRES,

A TOUS MES AMIS,

A TOUS MES ENSEIGNANTS,

JE DEDIE CE MODESTE TRAVAIL

Remerciements

Il est difficile de remercier ceux dont l'aide et l'influence ont été déterminants sans paraître vouloir les associer aux échecs et aux carences car un travail, surtout en sciences appliquées, n'est jamais l'œuvre d'une seule personne. Il est souvent le résultat d'une dure expérience d'un concours de circonstances favorables et de l'aide directe ou indirecte de nombreuses autres personnes.

Je voudrais pourtant en précisant que tous les défauts de cet ouvrage sont les miens, témoigner ma reconnaissance à mon encadreur Mr Zoubir NEMOUCHI et mon co-encadreur Rassim BELAKROUM qui m'ont réservés de leurs temps précieux pour me donner le goût des interactions fluides-structures et la rigueur de la recherche scientifique.

Je suis profondément reconnaissant à la direction de la faculté des sciences et des sciences de l'ingénieur (université de Ouargla), au département de Génie Mécanique et électronique et particulièrement à MM DJERBAOUI Ahmed, SETOU Noureddine et SAOULI Salah, ainsi qu'à tous les enseignants de notre promo de magistère 2005-2006

Je tiens à remercier encore une fois de plus Mr SETOU Noureddine d'avoir accepté d'être président du jury et MM SAOULI Salah et KADJA Mahfoud comme étant membres.

En outre, je remercie mes collègues de ma promo spécialement BELAHIA Hocine, mes collègues de Sonelgaz service transport gaz Hassi Méssaoud et en particulier BOUDJADJA Bachir pour ses conseils et aides.

Par ailleurs, je remercie plus particulièrement et du fond du cœur ma femme, sans qui ce projet n'aurait jamais abouti, puisqu'elle est l'instigatrice morale, surtout pendant les périodes de doute.

Enfin, je remercie dieu Allah le tout puissant d'avoir été à mes côtés tout le long de ce travail. Il m'a donné la foi, la volonté et le courage de poursuivre mes études malgré mes grandes responsabilités (la famille, la vie et le travail).

Introduction

1. Historique et intérêt :

Les problèmes d'interaction fluide structure se sont posés très tôt aux ingénieurs en particulier avec le développement de l'aéronautique. C'est sous l'aspect aéroélasticité que ces travaux ont été menés. Les outils de calcul de l'époque ne permettaient qu'une modélisation simplifiée où les efforts du fluide sur la structure étaient modélisés au préalable de l'étude de la vibration de la structure. C'est avec le développement des outils de calcul numérique en parallèle avec l'augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs que des algorithmes de couplage entre l'écoulement du fluide et le mouvement de la structure se sont développés dans les années 70. Ces algorithmes étaient tributaires de l'efficacité des schémas de résolution des équations de la structure d'une part et de ceux du fluide d'autre part, qui n'ont cessé de connaître des améliorations et qui sont pour une grande partie encore du domaine de la recherche, en particulier en ce qui concerne les grandes déformations pour les structures et les écoulements turbulents pour les fluides. L'usage des algorithmes de couplage fluide/structure dans l'industrie est récent, elle a fait naître la nécessité de développement d'algorithmes efficaces et rapides. Cela nécessite des développements de méthodes sur plusieurs niveaux : le bon formalisme pour écrire d'une manière compatible les équations de la structure et du fluide, la description de l'interface entre les deux milieux continus, les algorithmes de couplage entre le fluide et la structure (transmissions des conditions cinématique et des efforts), les techniques de maillage et de « remaillage ».

Depuis quelques temps on peut voir émerger un certain nombre de problèmes en Mécanique des structures, qui se démarquent assez nettement des simulations habituelles où le chargement de la structure dû au fluide est approché par des modèles empiriques. Dans ces nouvelles simulations, le fluide intervient par la résolution des équations hydrodynamiques, équations de Navier-Stokes, permettant de déterminer le chargement sur la structure.

Actuellement de multiples problèmes d'interaction fluide structure nouveaux sont posés par :

* l'environnement :

- transport des produits toxiques fluides
- ballonnement, écoulement autour des pales d'éoliennes l'industrie

* automobile :

- dynamique de gonflement des Airbags
- Ballonnement de fluide dans les réservoirs

* l'industrie aéronautique :

- problèmes d'impact d'oiseaux
- impact d'hélicoptère dans l'eau

* l'industrie maritime :

- problèmes d'impact de bateau, 'Slamming'
- ballonnement dans les cuves de méthane

* l'industrie nucléaire:

- rupture de tubes Générateurs de vapeur par vibration induite par les écoulements biphasiques eau vapeur
- accidents sévères : dépressurisations réponses aux séismes (flambage de bidons de stockage)
- modes de vibration de coeurs de réacteurs

* et la recherche en biomécanique :

- déformations des vaisseaux sanguins en liaison avec le battement cardiaque
- Ecoulement dans les faisceaux sanguins

Bien sûr, diverses sous disciplines sont aussi abordées depuis longtemps, citons par exemple, dans le domaine aéronautique, le phénomène du flottement des avions qui est un couplage fluide-structure externe en présence d'écoulement. Plus récemment, les études de réduction de bruit, par exemple à l'intérieur des véhicules (automobiles, trains, avions, hélicoptères, etc.), ont suscité les analyses vibroacoustiques et ont engendré des recherches spécifiques sur le comportement à moyennes et hautes fréquences dans les structures.

2. Revue bibliographique :

Les coques sont des structures très performantes, largement utilisées depuis longtemps. Les publications concernant aussi bien leur comportement statique que dynamique sont abondantes.

Aron, en 1874 a été le premier à présenter une formulation d'une théorie des coques minces, en partant des équations générales de l'élasticité. Il a été suivi par Love 1888, et sa théorie est communément appelée « approximation de Love ».

Depuis ce temps et jusqu'à nos jours, les chercheurs n'ont pas cessé d'examiner et de réexaminer la théorie élastique des coques minces.

Un nombre important de problèmes d'engineering concerne les structures renfermant un fluide. La présence de ce dernier altère le comportement de la structure en mouvement et les déformations de la structure sont à l'origine de la modification des charges transmises par le fluide. Dans ce cas, on parle de **système couplé** et ce type de problème est appelé **interaction fluide-structure**.

Le problème de l'interaction dynamique entre le fluide en mouvement et les déformations élastiques des parois des réservoirs est d'un intérêt fondamental dans un nombre important d'applications (aérospatiale, industrie pétrolière et installation nucléaire, génie civil ...etc).

Une des anciennes études des effets dynamiques sur les récipients a porté sur la réponse sismique des réservoirs encastrés au sol. Ce travail a été réalisé dans les années 40 et 50 par Jacobson [1] et Jacobson et Ayre [2]. Dans ces investigations le réservoir a été considéré rigide et la réponse dynamique du fluide a été observée. Un traitement mathématique rigoureux de ce problème a été développé pour le cas des petits déplacements du liquide. Il s'agissait de trouver une expression du potentiel de vitesse du liquide satisfaisant l'équation de Laplace et les conditions aux limites appropriées à la surface du liquide et à l'interface fluide-coque.

Baron et Skalak [3] présentent une étude mathématique du problème en étudiant des réservoirs simplement supportés sur une extrémité et libre à l'autre. Le mode de déformation de la coque vide a été utilisé comme coordonnée généralisée du système coque-fluide. Cette méthode est purement mathématique est d'une application très difficile pour des conditions aux limites beaucoup plus complexes.

Pour analyser les structures, il est de coutume de travailler avec un système mécanique équivalent avec un degré de liberté. Housner [4,5] a développé en 1963 un modèle simplifié largement utilisé dans les applications du génie civil pour la prédiction des effets sismiques des réservoirs, rectangulaires et cylindriques, de stockage des liquides. La pression hydrodynamique est divisée en deux composantes :

- Une pression impulsive due à la partie liquide en contact avec la coque,
- Une pression convective due à la partie du liquide en oscillation (mouvement de vagues, balottement) dans le réservoir.

Ainsi, le modèle de Housner consiste en deux masses et un ressort attaché au réservoir rigide. Les valeurs des paramètres de ce modèle mécanique dépendent des dimensions du réservoir et de la densité et la hauteur du liquide.

Le séisme d'Alaska de 1964 a causé des dégâts trop importants aux réservoirs de conception moderne. Ceci est à l'origine de l'accélération des recherches dans ce domaine en vue de mieux appréhender leur comportement. L'effet de la **flexibilité** des parois sur la réponse sismique des réservoirs a été introduit. D'autre part le développement de la micro informatique, et la mise au point de nouveaux algorithmes de résolution des problèmes d'engineering par les méthodes numériques a permis aux chercheurs et ingénieurs intéressés par le sujet de proposer d'autres approches et contributions pour l'analyse de ces structures en utilisant notamment la méthode des éléments finis.

L'une des premières études dans ce sens, est celle de Edwards en 1969 [6] utilisant la méthode des élément finis. Il a calculé les contraintes et les déplacements induits par les séismes dans les réservoirs cylindriques remplis de liquides dont le rapport de la hauteur au rayon est inférieur à 1.

Une approche similaire a été développée par Hsiung et Weingarten [7] pour analyser le comportement des coques cylindriques minces, à symétrie axiale, en vibration libre, partiellement remplies de liquide. Le liquide est discrétisé en éléments annulaires à section rectangulaire. Deux simplifications ont été introduites, la première suppose que la masse de coque est négligeable et la seconde suppose que les mouvements de la surface libre sont sans effet.

Shabane et Nash [8] utilisent la même démarche pour étudier la réponse sismique des réservoirs cylindriques par la méthode des éléments finis.

Une généralisation de cette méthode a été établie par Balendra et Nash [9] en incluant un dôme au sommet du réservoir. L'effet du ballottement a été négligé et en conséquence le problème se réduit à celui d'un réservoir cylindrique vide

avec une matrice masse augmentée d'une masse ajoutée représentant l'effet du liquide contenu dans le réservoir.

Une approche différente pour la solution du problème de l'effet de flexibilité des parois a été développée par Veletsos [10]. Elle présente une simple procédure pour l'évaluation des forces hydrodynamiques induites dans les réservoirs à liquide. Les hypothèses considérées dans ce modèle sont :

- Le réservoir se comporte comme un oscillateur à un seul degré de liberté,
- Les vibrations s'effectuent dans un mode donné, et
- Les sections circulaires restent circulaires durant la vibration.

Le moment de renversement, l'effort tranchant à la base, la magnitude et la distribution des forces hydrodynamique ont été évaluées pour différents modes de vibration. Par la suite Veletsos et Yang [11] utilisent la théorie des coques de Flûgee pour l'analyse des réservoirs. Les composantes de déplacement en un point arbitraire de la coque ont été exprimées en terme du mode de vibration naturelle d'une poutre cantilever avec rigidité flexionnelle, et de cisaillement. L'effet du liquide contenu est considéré en supposant qu'une partie de la masse de ce liquide est attachée à la coque. Il a été constaté que, pour les réservoirs avec rigidités réelles, les forces impulsives sont considérablement plus grandes que celles trouvées pour les réservoirs rigides. La même observation a été confirmée par Kana et Dodge [12].

Une autre approche d'analyse des réservoirs en vibration a été développée par Wu, Mouzakis, Nash et Colonell [13]. Une solution analytique du problème a été obtenue par une procédure itérative. Cependant l'hypothèse prise dans cette analyse suppose que les formes de vibration des réservoirs sont difficiles à justifier notamment dans le cas des réservoirs longs. Aussi, les fréquences naturelles et les formes modales des modes $\cos(n\theta)$ ont été évaluées en négligeant l'effet de la précontrainte dû à la pression hydrostatique.

Les recherches dans ce domaine se sont poursuivies [14-20] et ont conduit à une meilleure connaissance du comportement de ce type de problème.

3. Objectif de la présente étude :

L'objet de la présente étude est la simulation numérique de la dynamique des réservoirs (rigides ou élastiques) contenant des fluides (compressibles ou incompressibles) et présentant des surfaces libre ou non. Notre étude concerne le cas des petits déplacements dit encore vibrations harmoniques à l'état plan.

La discrétisation des équations régissant le phénomène sera réalisée en se basant sur la méthode des éléments finis de Galerkin. Une procédure itérative devra être mise en œuvre afin de résoudre le problème des deux milieux fluide et solide couplés par le biais des conditions aux frontières.

Le cas test qu'on projette d'étudier est celui d'un réservoir élastique de forme rectangulaire contenant un fluide compressible.

En fin, l'établissement d'un code pour la simulation numérique du cas test projeté, et obtention des premiers résultats.

4. Plan de l'étude :

La présente étude est divisée en 4 chapitres, une introduction et une conclusion et perspectives.

Dans l'introduction une revue bibliographique des travaux et recherches effectués dans ce domaine est présentée.

Le chapitre 1 est consacré à la théorie de base pour la modélisation mécanique et numérique efficace des vibrations linéaires de structures élastiques couplées à des fluides internes.

La méthode de résolution du problème de l'interaction fluide-structure étant numérique, on trouve dans le chapitre 2 un développement de la méthode utilisée.

Le chapitre 3 établit les équations finales discrétisées développe les méthodes d'intégration numérique, le maillage ainsi que l'algorithme de calcul et résolution du système final.

Les premiers résultats du cas appliqué à savoir l'élasto-acoustique sont présentés et discutés au niveau du chapitre 4.

Enfin, Les conclusions et perspectives générales de cette étude sont dégagées.

Chapitre 1

Formulation mathématique des interactions Fluides-structures

Il s'agit de décrire les méthodes permettant une modélisation mécanique et numérique efficace des vibrations linéaires de structures élastiques couplées à des fluides internes – vibrations libres, réponse à des sollicitations extérieures – effectivement mises en œuvre dans le domaine aérospatial ou autres. Ces problèmes concernent par exemple :

- Les vibrations hydroélastiques des lanceurs à propergols liquides et de ballonnement dans les lanceurs et les satellites, intervenant dans les études de stabilité (contrôle d'attitude, ...) et les études d'environnement vibratoire des charges utiles (satellites, planeur hypersonique en phase de lancement).
- Les vibrations élastoacoustiques intervenant dans l'étude de l'environnement acoustique des satellites et des charges vibratoires sur les équipements provenant du bruit des moteurs.

1.1. Vibrations des structures élastiques :

Nous nous intéressons ici aux oscillations de « faible amplitude » autour d'une position « moyenne ». En pratique, comme position moyenne, on considère en général soit :

- une position d'équilibre, ou encore
- une « configuration de référence ». Par exemple, les vibrations d'un lanceur sont envisagées par rapport au mouvement moyen du lanceur sur sa trajectoire.

Cette partie est consacrée à des rappels sur la modélisation des vibrations de structures élastiques, en termes de déplacement u , dans un cadre variationnel propice à l'application de la méthode des éléments finis et à l'utilisation de techniques de projection modale.

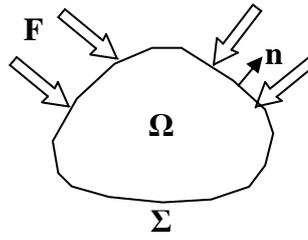


Figure 1.1. Configuration géométrique

1.1.1. Equations de l'élastodynamique :

On désigne par Ω le domaine borné occupé par la structure à l'équilibre et par n , la normale unitaire extérieure à la surface enveloppante $\partial\Omega$ de Ω (Fig. 1.1).

On désigne par $u(M, t)$ le déplacement, à l'instant t , d'une particule située en $M \in \Omega$ à l'équilibre. On désigne par x_1, x_2, x_3 les coordonnées cartésiennes de M , et par u_1, u_2, u_3 les composantes de u . On utilisera en outre la notation $A_{,j} = \partial A / \partial x_j$, ainsi que la convention d'Einstein pour les sommations sur les indices répétés.

On se place dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire.

Les contraintes dans l'état d'équilibre sont négligées, et les déplacements u supposés infinitésimaux. Dans ces conditions, le tenseur des contraintes de Cauchy σ_{ij} est relié au tenseur des déformations linéarisées ε_{ij} par la loi de comportement :

$$\sigma_{ij} = a_{ijkh} \varepsilon_{kh} \quad (1.1)$$

ε_{ij} est relié à u par :

$$\varepsilon_{kh} = \frac{1}{2} (u_{k,h} + u_{h,k}) \quad (1.2)$$

Donc :

$$\sigma_{ij}(u) = a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u) = \frac{1}{2} a_{ijkh} (u_{k,h} + u_{h,k}) \quad (1.3)$$

Dans ces conditions, u vérifie l'équation de l'élastodynamique :

$$\sigma_{ij,j}(u) - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1.4)$$

où ρ désigne la masse volumique à l'équilibre. Dans le cas de déplacements $u_\Sigma(M, t)$ donnés sur une partie Σ de $\partial\Omega$, on a la condition aux limites :

$$u = u_\Sigma \quad \text{sur } \Sigma \quad (1.5)$$

Dans le cas d'une densité superficielle de forces $F(M, t)$ donnée sur $\partial\Omega/\Sigma$, on a la condition aux limites :

$$\sigma_{ij}(u)n_j = F_i \quad \text{sur } \partial\Omega/\Sigma \quad (1.6)$$

Enfin, les équations précédentes doivent être complétées par les conditions initiales de Cauchy qui consistent à se donner $u(M, 0)$ et $\left. \frac{\partial u(M, t)}{\partial t} \right|_{t=0}$ dans Ω .

1.1.2. Formulation variationnelle de la réponse à des forces données :

On considère une structure Ω , fixée sur une partie Σ de sa frontière, et soumise à des forces de densité superficielle $F(M, t)$ sur $\partial\Omega/\Sigma$. Dans ces conditions, u vérifie le problème aux limites :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}(u) - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= 0 & \text{dans } \Omega & \quad (a) \\ \sigma_{ij}(u)n_j &= F_i & \text{sur } \partial\Omega/\Sigma & \quad (b) \\ u_i &= 0 & \text{sur } \Sigma & \quad (c) \\ &+ \text{conditions} & \text{initiales} & \end{aligned} \quad (1.7)$$

1.1.2.1. Formulation variationnelle :

On procède formellement par la méthode des fonctions-tests. On considère une solution de (1.7).

1. Dans un premier temps, on introduit l'espace C des fonctions $v(M)$, $M \in \Omega$. « suffisamment » régulières.

En multipliant (1.7a) par une fonction-test quelconque $v \in C$ indépendante du temps, puis en intégrant sur le domaine Ω , et enfin en appliquant la formule de Green suivante :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} v_i dx = \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j v_i d\sigma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} v_{i,j} dx \quad (1.8)$$

$d\sigma$ représente une surface élémentaire.

On obtient :

$$\int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}(u)n_j v_i d\sigma - \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u)v_{i,j} dx - \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} v_i dx = 0 \quad (1.9)$$

2. Dans un deuxième temps, on utilise la condition aux limites (1.2), ainsi que la symétrie de σ_{ij} qui permet de remplacer $\sigma_{ij} v_{i,j}$ par $\sigma_{ij}(1/2)(v_{i,j}+v_{j,i})=\sigma_{ij}\varepsilon_{i,j}(v)$, ce qui conduit à :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)dx + \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} v_i dx = \int_{\partial\Omega/\Sigma} F_i v_i d\sigma + \int_{\Sigma} \sigma_{ij} n_j v_i d\sigma \quad (1.10)$$

3. On introduit enfin l'espace $C^0 \subset C$ des $v \in C$ nuls sur Σ :

$$C^0 = \{v \in C \mid v = 0 \quad \text{sur } \Sigma\} \quad (1.11)$$

Pour des fonctions-tests $v \in C^0$, la propriété variationnelle (1.10) devient :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)dx + \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} v_i dx = \int_{\partial\Omega/\Sigma} F_i v_i d\sigma \quad u \in C^0, \forall v \in C^0 \quad (1.12)$$

La formulation variationnelle de (1.7) s'énonce alors :

Trouver $u \in C^0$ tel que la propriété (1.12) soit vérifiée $\forall v \in C^0$.

*-Cas d'une structure libre ($\Sigma=\emptyset$)-

Les équations et la formulation variationnelle s'écrivent :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}(u) - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= 0 \quad \text{dans } \Omega & (a) \\ \sigma_{ij}(u)n_j &= F_i \quad \text{sur } \partial\Omega/\Sigma & (b) \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)dx + \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} v_i dx = \int_{\partial\Omega} F_i v_i d\sigma \quad u \in C, \forall v \in C \quad (1.14)$$

1.2. Equations linéarisées des petits mouvements de fluides parfaits

Cette partie est consacrée au rappel des équations linéarisées décrivant les petits mouvements d'un fluide parfait.

Après une introduction des fluctuations eulérienne p et lagrangienne p_l utilisées dans la dérivation des conditions de surface libre, nous établirons les équations générales en fonction de p et du potentiel des déplacements φ dans les deux cas suivants :

- Fluide incompressible pesant,
- Fluide compressible en l'absence d'effets de gravité.

1.2.1. Equations dynamiques linéarisées :

Notations	Configuration	équilibre	Instant t
	Position de la particule	M	M'
	Domaine fluide	Ω_f	Ω'_f
	Surface libre	Γ	Γ'
	Surface de contact avec la paroi	$\Sigma = \partial \Omega_f / \Gamma$	$\Sigma' = \partial \Omega'_f / \Gamma'$
	Masse volumique	ρ_f	ρ'_f
	Pression	$P_0(M)$	$P(M', t)$

1.2.1.1. Equations d'Euler

On a d'après l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho'_f \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho'_f g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (1.15)$$

avec τ_{ij} : tenseur des contraintes visqueuses (pour plus de détail, [34])

Le fluide idéal est par définition dénué de viscosité et le tenseur des contraintes visqueuses disparaît.

On a dans ce cas :

$$\rho'_f \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho'_f g_i \quad (1.16)$$

ou

$$\rho'_f \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho'_f \vec{g} - \nabla P \quad (1.17)$$

Donc, la dynamique d'un fluide parfait (ou idéal) est régie par l'équation d'Euler :

$$\nabla P = \rho'_f (\vec{g} - \vec{\gamma}^f) \quad , \text{ dans } \Omega'_f \quad (1.18)$$

Où $\gamma^f(M', t)$ est l'accélération instantanée en $M' \in \Omega'_f$, et $\vec{g} = -g i_z$ est l'accélération de la pesanteur (i_z vecteur unitaire vertical, et g supposé constant). A l'équilibre, la pression hydrostatique P_0 est solution de l'équation classique :

$$\nabla P_0 = -\rho_f g i_z \quad \text{ dans } \Omega_f \quad (1.19)$$

1.2.1.2. Linéarisation

La linéarisation consiste à déduire des équations (1.18) et (1.19), les équations satisfaites, dans le domaine d'équilibre Ω_f , par les variations des différentes grandeurs par rapport à leur valeur d'équilibre. Dans le cas présent, on s'intéresse au champ de déplacement et aux variations de pression.

Hypothèse de linéarisation - On envisage des mouvements de faible amplitude autour d'un état d'équilibre, dans un repère galiléen. L'hypothèse des petits mouvements consiste à considérer le déplacement et les variations de pression – ainsi que leurs dérivées en espace et en temps – comme des infiniment petits équivalents.

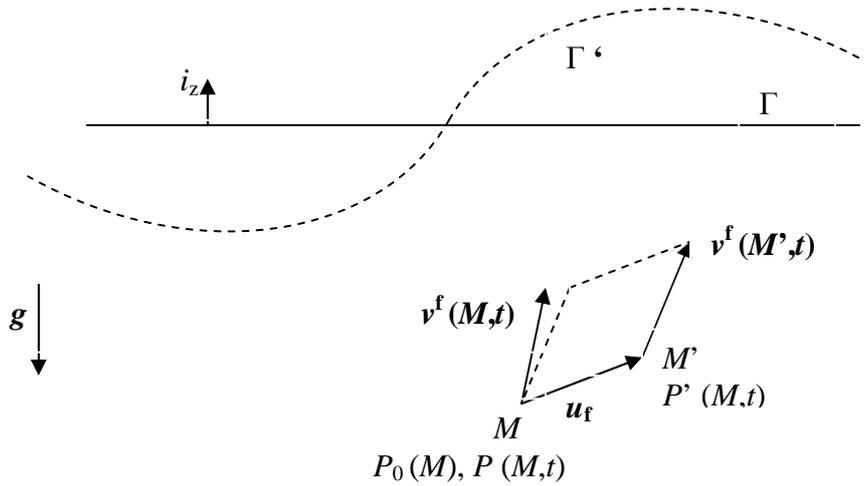


Figure 1.2. Configuration géométrique

1.2.1.3. Champ de déplacement du fluide u_f

On désigne par $u_f(M,t)$ le déplacement de la particule située en M au repos. Si $M' \in \Omega'_f$ désigne sa position instantanée, on a donc (Fig. 1.2.) :

$$M' = M + u_f(M,t), \quad \forall M \in \Omega_f \quad (1.20)$$

1.2.1.4. Fluctuations eulérienne p et lagrangienne p_l de pression

Si $P(M',t)$ désigne la pression instantanée en M' , on conviendra d'appeler fluctuation eulérienne de pression $p(M,t)$ et fluctuation lagrangienne de pression $p_l(M,t)$, les quantités définies, respectivement, en tout point M du domaine d'équilibre Ω_f par :

$$p(M,t) = P(M,t) - P_0(M) \quad (1.21)$$

$$p_l(M,t) = P(M',t) - P_0(M) \text{ où } M' = M + u_f(M,t) \quad (1.22)$$

Remarques

* $p(M,t)$, dont la définition fait intervenir la valeur instantanée de la pression en un point du domaine d'équilibre Ω_f , n'est défini en toute rigueur, que pour $M \in \Omega_f \cap \Omega'_f$. Toutefois, puisque u^f est supposé infinitésimal, on peut considérer que (1.21) définit p en tout point intérieur à Ω_f .

* En revanche, $p_l(M,t)$ est défini en tout point M du domaine d'équilibre (pour des mouvements d'amplitude quelconque).

1.2.1.5.Relation entre p_l et p

On peut comparer p_l et p qui sont définis dans le même domaine Ω_f . En effectuant le développement limité de la différence entre (1.22) et (1.21), on obtient, au second ordre près en u^f :

$$p_l - p = \rho_f g u_z^f, \quad \forall M \in \Omega_f \quad (1.23)$$

1.2.1.6.Equations d'Euler Linéarisées

Dans les deux situations suivantes :

1. Fluide incompressible, homogène, en présence de gravité,
2. Fluide compressible, homogène, en l'absence de gravité.

p et u^f vérifient l'équation d'Euler linéarisée :

$$\nabla p = -\rho_f \frac{\partial^2 u^f}{\partial t^2} \quad \text{dans } \Omega_f \quad (1.24)$$

(Démonstration au niveau livre interaction fluide –structure, [31])

1.2.1.7.Condition d'incompressibilité linéarisée

On rappelle que l'incompressibilité se traduit classiquement par la condition $\text{div } v^f(M', t) = 0$ en tout point de Ω'_f . En appliquant cette condition en tout point $M \in \Omega_f \cap \Omega'_f$, et en utilisant (1.20) on obtient la condition linéarisée (démonstration au niveau livre Candal, [34]) :

$$\text{div } u^f = 0 \quad \text{dans } \Omega_f. \quad (1.25)$$

1.2.1.8.Loi de comportement d'un fluide compressible non pesant

On définit pour commencer la fluctuation lagrangienne ρ_l de masse volumique, d'une manière analogue à (1.22) selon :

$$\rho_l(M, t) = \rho'_f(M', t) - \rho_f, \quad \text{avec } M' = M + u_f(M, t) \quad (1.26)$$

La loi de comportement relie alors p_l et ρ_l selon :

$$p_l = c^2 \rho_l \quad (1.27)$$

D'autre part, l'équation de conservation de la masse peut s'écrire $\rho'_f J = \rho_f$ où J est le jacobien de la transformation $M \rightarrow M'$. Pour u^f infinitésimal, on rappelle que $J \approx 1 + \text{div } u^f$, ce qui permet d'écrire d'après (1.26) :

$$\rho_l = -\rho_f \text{div } u^f \quad \text{dans } \Omega_f. \quad (1.28)$$

En reportant (1.28) dans (1.27) on obtient alors la loi de comportement reliant p_l et u_f . En se rappelant que, lorsque les effets de gravité sont négligés, $\rho_l = p$, on a donc :

$$p = -\rho_f c^2 \operatorname{div} u^f \quad (1.29)$$

1.2.1.9. Condition de glissement à la paroi

Elle est donnée par :

$$u^f \cdot n = u^s \cdot n \quad \text{sur } \Sigma \quad (1.30)$$

Cas particulier d'une paroi fixe – Dans ce cas, (1.30) devient :

$$u^f \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (1.31)$$

1.2.1.10. Condition de surface libre

On considère le cas d'un fluide pesant présentant une surface libre en contact avec un milieu à pression (atmosphérique) constante P_{atm} (Fig. 1.3). On néglige les effets de tension superficielle.

On peut donc écrire $P(M',t) = P_{\text{atm}}$ sur la surface libre instantanée Γ' , ce qui d'après (1.22) s'écrit :

$$p_l(M,t) = 0 \quad \forall M \in \Gamma \quad (1.32)$$

Compte tenu de la relation (1.23), (1.32) conduit donc à :

$$p = \rho_f g u_z^f \quad \text{sur } \Gamma \quad (1.33)$$

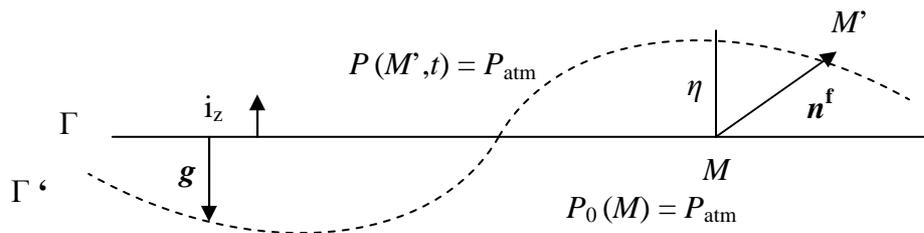


Figure 1.3. Condition de surface libre

1.2.2. Potentiel des déplacements φ :

On considère ici des petits mouvements harmoniques, pour lesquelles les différentes grandeurs étudiées varient sinusoidalement autour de leur valeur d'équilibre. On a donc :

$$u^f(M,t) = u^f(M) \cos \omega t \quad , \quad p(M,t) = p(M) \cos \omega t \quad (1.34)$$

L'équation d'Euler linéarisée (1.24) devient :

$$\nabla p - \rho_f \omega^2 u^f = 0 \quad (1.35)$$

1.2.2.1. Définition de φ

Pour $\omega \neq 0$, on voit d'après (1.35) que $u^f = \nabla\left(\frac{p}{\rho_f \omega^2}\right)$, autrement dit que

$\varphi = \frac{p}{\rho_f \omega^2}$ est un potentiel de déplacement particulier défini, d'une manière

unique par :

$$p = \rho_f \omega^2 \varphi \quad (1.36)$$

L'équation (1.35) se réduisant alors à :

$$u^f = \nabla \varphi \quad (1.37)$$

1.2.3. Equations générales en (p, φ) :

Condition d'incompressibilité

En remplaçant u^f par $\nabla \varphi$ dans (1.25) on trouve que φ vérifie l'équation de Laplace :

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega_f. \quad (1.38)$$

1.2.3.1. Loi de comportement d'un fluide compressible non pesant

En remplaçant u^f par $\nabla \varphi$ dans (1.29) on obtient :

$$p = -\rho_f c^2 \Delta \varphi \quad \text{dans } \Omega_f. \quad (1.39)$$

1.2.3.2. Condition de glissement à la paroi

En remplaçant u^f par $\nabla \varphi$ dans (1.30) on obtient :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = u^s \cdot n \quad \text{sur } \Sigma \quad (1.40)$$

Cas particulier d'une paroi fixe

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (1.41)$$

1.2.3.3. Condition de surface libre

En remplaçant u^f par $\nabla \varphi$ dans (1.33) on obtient :

$$p = \rho_f g \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \text{sur } \Gamma \quad (1.42)$$

1.3. Modes de ballonnement :

Dans cette partie nous nous intéressons aux vibrations harmoniques d'un liquide parfait incompressible contenu dans un réservoir, présentant une surface libre Γ , en présence de gravité et en l'absence de tension superficielle.

Citons, à titre d'exemple d'application, l'étude du ballonnement de liquides dans les lanceurs sollicités par des vents et des rafales, dans les cuves de réacteurs nucléaires, et dans des citernes de transport de liquides cryogéniques. Ainsi que d'autres problèmes généraux de ballonnement rencontrés dans le domaine aérospatial.

1.3.1. Réponse harmonique à un déplacement de paroi u_n :

On envisage de calculer la réponse harmonique d'un fluide parfait homogène incompressible contenu dans une cavité occupant un domaine borné Ω_f , présentant une surface libre Γ , et soumis à un déplacement de paroi u^s imposé sur Σ , de composante normale $u^s \cdot n = u_N$, et de pulsation ω (Fig.1.4 (a)).

Equations en p, φ :

$$\begin{aligned} \nabla p &= \rho_f \omega^2 \nabla \varphi && \text{dans } \Omega_F && \text{(a)} \\ \Delta \varphi &= 0 && \text{dans } \Omega_F && \text{(b)} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= u_N && \text{sur } \Sigma = \partial \Omega_F && \text{(c)} \\ p &= \rho_f g \frac{\partial \varphi}{\partial z} && \text{sur } \Gamma && \text{(d)} \\ l(\varphi) &= 0 && \text{avec } l(1) \neq 0 && \text{(e)} \end{aligned} \quad (1.43)$$

où $l(\varphi)$ est une relation linéaire arbitraire permettant d'assurer l'unicité de φ .

-(1.43a) traduit l'équation d'Euler linéarisée pour des déplacements dérivant d'un potentiel.

-(1.43b) traduit l'incompressibilité du fluide.

-(1.43c) est la condition de glissement (où on a posé $u^s \cdot n = u_N$).

-(1.43d) est la condition de surface libre.

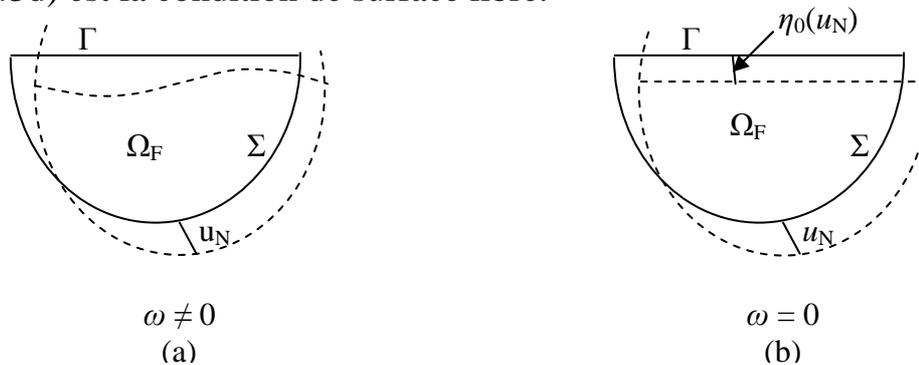


Figure 1.4 Liquide soumis à un déplacement de paroi

*-Solution pour $\omega = 0$:

Pour $\omega = 0$, et u_N donné, (3.1a) s'écrit $\nabla p = 0$, qui conduit à une valeur constante p_0 de p qu'on peut calculer en fonction de u_N . Auparavant montrons qu'il existe une relation entre p et u_N (indépendante de ω). En intégrant (1.43b) dans Ω_f , et en tenant compte de (1.43c) et (1.43d), on obtient en effet :

$$\int_{\Gamma} p d\sigma = -\rho_f g \int_{\Sigma} u_N d\sigma \quad (1.44)$$

Cette relation permet de déterminer la valeur de p_0 :

$$p_0 = -\frac{\rho_f g}{\text{Aire}(\Gamma)} \int_{\Sigma} u_N d\sigma \quad (1.45)$$

1.3.1.1. Problème aux limites en φ :

L'objectif est ici d'une part d'éliminer p , et d'autre part de parvenir à une formulation conduisant à un problème limite bien posé pour $\omega = 0$. On sait que les équations (1.43) équivalent – conformément à une deuxième définition de φ – à :

$$p = \rho_f \omega^2 \varphi + \pi \quad (a)$$

$$l(\varphi) = 0 \quad \text{avec} \quad l(1) \neq 0 \quad (b) \quad (1.46)$$

ou π est une constante et $l(\varphi)$ une relation linéaire arbitraire.

*-Relation entre p , φ et u_N :

En reportant (1.46a) dans (1.44), on trouve :

$$\pi = -\frac{\rho_f \omega^2}{\text{Aire}(\Gamma)} \int_{\Gamma} \varphi d\sigma - \frac{\rho_f g}{\text{Aire}(\Gamma)} \int_{\Sigma} u_N d\sigma \quad (1.47)$$

d'où l'expression suivante de p en fonction de φ et u_N :

$$p = \rho_f \omega^2 \left(\varphi - \frac{1}{\text{Aire}(\Gamma)} \int_{\Gamma} \varphi d\sigma \right) - \frac{\rho_f g}{\text{Aire}(\Gamma)} \int_{\Sigma} u_N d\sigma \quad (1.48)$$

On note que φ et $\varphi + \text{constante}$ donnent une même valeur de p .

Dans ce qui suit on choisit :

$$l(\varphi) = \int_{\Gamma} \varphi d\sigma \quad (1.49)$$

En reportant (1.48) dans (1.43a), on obtient le problème aux limites suivant en φ :

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \quad (a)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = u_N \quad \text{sur } \Sigma \quad (b)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\omega^2}{g} \varphi - \frac{1}{\text{Aire}(\Gamma)} \int_{\Sigma} u_N d\sigma \quad \text{sur } \Gamma \quad (c) \quad (1.50)$$

$$\int_{\Gamma} \varphi d\sigma = 0 \quad (d)$$

Sachant que d'après (1.48), (1.50d), (1.45), p est donnée par :

$$p = \rho_f \omega^2 \varphi - \frac{\rho_f g}{\text{Aire}(\Gamma)} \int_{\Sigma} u_N d\sigma \quad (= \rho_f \omega^2 \varphi + p^0) \quad (1.51)$$

1.3.2. Formulation variationnelle en φ des modes de ballonnement :



Figure 1.5. Mode de ballonnement

1.3.2.1. Problème spectral aux limites :

On appelle mode de ballonnement, les solutions du problème spectral déduit de (1.50) pour $u_N = 0$ (condition de paroi fixe). En posant :

$$\lambda = \frac{\omega^2}{g} \quad (1.52)$$

Le problème spectral aux limites s'écrit (Fig.1.5) :

trouver λ et $\varphi \neq 0$ tels que :

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega_F \quad (a)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (b)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \lambda \varphi \quad \text{sur } \Gamma \quad (c) \quad (1.53)$$

et

$$\int_{\Gamma} \varphi d\sigma = 0 \quad (d)$$

1.3.3. Analyse modale de la réponse vibratoire du liquide :

1.3.3.1. Formulation variationnelle de la réponse à un déplacement u_N imposé

On envisage la réponse harmonique du liquide à un mouvement de paroi donné, d'amplitude normale u_N sur Σ , et de pulsation ω .

On part des équations (1.50), et on introduit l'espace admissible C des fonctions régulières définies dans Ω_F , et C^* le sous-espace de C constitué des fonctions à moyenne nulle sur Γ :

$$C^* = \left\{ \varphi \in C \mid \int_{\Gamma} \varphi d\sigma = 0 \right\} \quad (1.54)$$

En multipliant (1.50a) par une fonction test $\delta\varphi \in C^*$, en intégrant dans Ω_F , puis en appliquant la formule de Green (1.55),

$$\int_{\Omega_F} \Delta \varphi \delta\varphi dx = \int_{\partial\Omega_F} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \delta\varphi d\sigma - \int_{\Omega_F} \nabla \varphi \cdot \nabla \delta\varphi dx \quad (1.55)$$

et en tenant compte de (1.50b) et (1.50c), on obtient la formulation variationnelle du problème :

Pour ω et u_N donnés, trouver $\varphi \in C^*$ tel que :

$$\int_{\Omega_F} \nabla \varphi \cdot \nabla \delta\varphi dx - \frac{\omega^2}{g} \int_{\Gamma} \varphi \delta\varphi d\sigma = \int_{\Sigma} u_N \delta\varphi d\sigma \quad \forall \delta\varphi \in C^* \quad (1.56)$$

1.4. Vibrations hydroélastiques en présence de gravité :

On s'intéresse ici au cas des vibrations couplées d'une structure élastique contenant un liquide incompressible en tenant compte des effets de gravité.

Citons à titre d'exemple d'application, dans le domaine aérospatial, le contrôle d'attitude des lanceurs qui nécessite la prise en compte simultanée des ballottements d'ergols et des vibrations de flexion des lanceurs.

Notons que la gravité intervient en tant que force de rappel agissant sur la surface libre et ce par l'effet des précontraintes induit à l'équilibre dans la structure.

1.4.1. Structure soumise à un champ de pression et à la gravité :

Les notations sont celles de la Fig.1.6

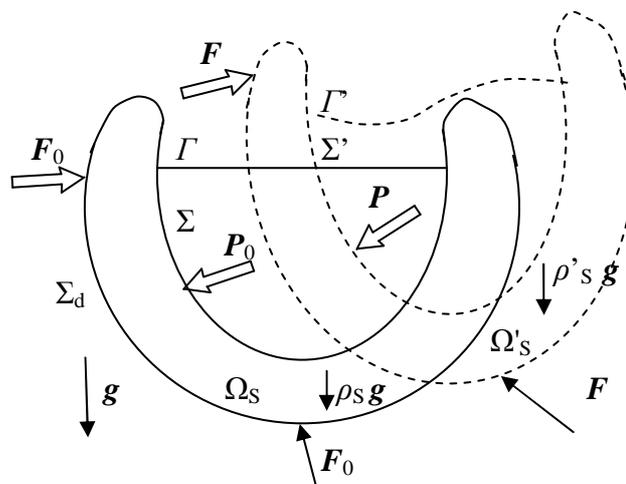


Figure 1.6 Configuration d'équilibre et configuration déformée

Configuration	équilibre	Instant t
Position de la particule solide (resp. liquide)	M_S (resp. M_F)	M'_S (resp. M'_F)
Domaine structure (resp. fluide)	Ω_S (resp. Ω_F)	Ω'_S (resp. Ω'_F)
Surface libre du liquide	Γ	Γ'
Surface de contact structure-liquide	$\Sigma = \partial \Omega_F / \Gamma$	$\Sigma' = \partial \Omega'_F / \Gamma'$
Normale extérieure à la structure	n	n'
Élément d'aire (matériel)	$d\sigma$	$d\sigma'$
Masse volumique structure	ρ_S	ρ'_S
Tenseur des contraintes de Cauchy	σ_{ij}^0	σ_{ij}
Action de pression du liquide	$P_0 d\sigma$	$P d\sigma'$
Forces extérieures	$F_0 d\sigma$	$F d\sigma'$

Pour linéariser les équations, on procède de la manière suivante:

On écrit, sous forme de principe de puissances virtuelles, les équations dynamiques dans l'état actuel $d\sigma'$, ainsi que les équations d'équilibre dans Ω_S .

On effectue ensuite un « transport lagrangien par images réciproques » du principe des puissances virtuelles dans Ω'_S , afin de ramener à une formulation du problème dans le domaine d'équilibre Ω_S .

On établit enfin les équations des petits mouvements par linéarisation,[31].

1.4.1.1.Principe des puissances virtuelles :

*-Etat actuel : Pour tout « champ de vitesses virtuelles cinématiquement admissible » $v(M')$ défini dans Ω'_S on a :

$$\int_{\Omega'_S} \sigma_{ij} v_{i,j} dx' + \int_{\Omega'_S} \rho'_S \gamma' \cdot v dx' = - \int_{\Sigma} (Pn' d\sigma') \cdot v - \int_{\Omega'_S} \rho'_S g v_z dx' + \int_{\partial\Omega'_S / \Sigma} (F d\sigma') \cdot v \quad (1.57)$$

où γ' est le vecteur d'accélération dans l'état actuel, $v_z = v \cdot i_z$ est la composante verticale de v , et où F désigne la densité superficielle des forces extérieures données sur $\Sigma'_d = \partial \Omega'_S / \Sigma'$.

*-Etat d'équilibre : Pour tout $v_0(M)$ cinématiquement admissible défini dans Ω_S , on a :

$$\int_{\Omega_S} \sigma_{ij}^0 v_{i,j}^0 dx = - \int_{\Sigma} (P_0 n d\sigma) \cdot v^0 - \int_{\Omega_S} \rho_S g v_z^0 dx + \int_{\partial\Omega_S / \Sigma} (F_0 d\sigma) \cdot v^0 \quad (1.58)$$

où P_0 est la pression exercée par le fluide sur Σ (qui vérifie l'équation $\nabla P_0 = - \rho_f g i_z$ (1.19) dans le domaine fluide), $v_z^0 = v^0 \cdot i_z$ la composante verticale de v_0 et F_0 la densité superficielle des forces extérieures (ces forces « équilibrent » les forces de gravité sur la structure et de pression du liquide sur $\Sigma_d = \partial \Omega_S / \Sigma$).

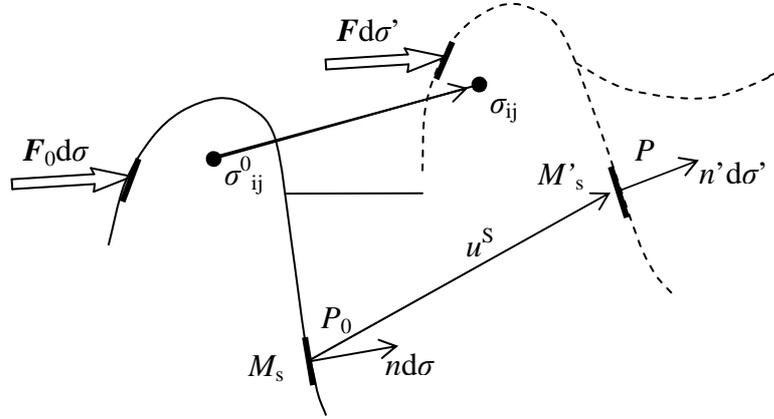


Figure 1.7 Transport lagrangien

Avec ces notations, chaque terme de (1.57) se transforme de la manière suivante :

1- Le premier terme devient :

$$\int_{\Omega'_s} \sigma_{ij} v_{i,j} dx' = \int_{\Omega_s} \theta_{ij} v_{i,j}^* dx \quad (1.59)$$

où θ_{ij} est le tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff de première espèce (tenseur non symétrique de Boussinesq) défini par :

$$\theta_{ik} = J \sigma_{ij}^* \frac{\partial x_k}{\partial x'_j} \quad (1.60)$$

Ce résultat s'obtient en utilisant $(dx')^* = J dx$ et en notant d'autre part

$$\text{que } (v_{i,j})^* = \frac{\partial v_i^*}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x'_j}.$$

2- Le deuxième terme devient :

$$\int_{\Omega'_s} \rho'_s \gamma' \cdot v dx' = \int_{\Omega_s} \rho_s \frac{\partial^2 u^s}{\partial t^2} \cdot v^* dx \quad (1.61)$$

Ce résultat découle d'une part de l'égalité $(\rho'_s dx')^* = \rho_s dx$ (qui traduit la conservation de la masse), et d'autre part que $\gamma'^* = \frac{\partial^2 u^s(M_s, t)}{\partial t^2}$.

3- Le premier terme du second membre de (1.57) s'écrit :

$$\int_{\Sigma'} (Pv)^* \cdot (n' d\sigma') = \int_{\Sigma} P^* v^* \cdot (nd\sigma)^* \quad (1.62)$$

où $P^*(M_s, t) = P(M'_s, t)$ est la pression instantanée vue par la particule solide située en M_s à l'équilibre.

$P^*(M_s, t)$ est donc l'image réciproque (sur Σ) de la trace sur Σ' de $P(M'_s, t)$.

4- Le deuxième terme du second membre s'écrit :

$$\int_{\Omega'_s} \rho'_s g v_z dx' = \int_{\Omega_s} \rho_s g v_z^* dx \quad (1.63)$$

Ce résultat découle du fait que $(\rho'_s dx')^* = \rho_s dx$ (conservation de la masse), et en notant d'autre part que g est constant.

5- Le dernier terme du second membre s'écrit :

$$\int_{\partial\Omega'_s / \Sigma'} (Fd\sigma') \cdot v = \int_{\partial\Omega_s / \Sigma} (Fd\sigma)^* \cdot v^* \quad (1.64)$$

On peut maintenant comparer les équations dynamiques ramenées dans Ω_s aux équations d'équilibre (1.58) s'écrivent respectivement :

$$\int_{\Omega_s} \theta_{ij} v_{i,j}^* dx + \int_{\Omega_s} \rho_s \frac{\partial^2 u^s}{\partial t^2} \cdot v^* dx = - \int_{\Sigma} P^* v^* \cdot (nd\sigma)^* - \int_{\Omega_s} \rho_s g v_z^* dx + \int_{\Sigma_d} (Fd\sigma)^* \cdot v^* \quad (a)$$

$$\int_{\Omega_s} \sigma_{ij}^0 v_{i,j}^* dx = - \int_{\Sigma} P_0 v^* \cdot (nd\sigma) - \int_{\Omega_s} \rho_s g v_z^* dx + \int_{\Sigma_d} (F_0 d\sigma) \cdot v^* \quad (b) \quad (1.65)$$

1.4.1.2. Linéarisation :

On commence par faire la différence des équations (1.65a) et (1.65b), ce qui conduit à l'équation (1.66) suivante :

$$\int_{\Omega_s} (\theta_{ij} - \sigma_{ij}^0) v_{i,j}^* dx + \int_{\Omega_s} \rho_s \frac{\partial^2 u^s}{\partial t^2} \cdot v^* dx = - \int_{\Sigma} [P^* (nd\sigma)^* - P_0 (nd\sigma)] \cdot v^* + \int_{\Sigma_d} [(Fd\sigma)^* - (F_0 d\sigma)] \cdot v^* \quad (1.66)$$

On note que les termes de volume dus à la gravité n'interviennent plus.

On introduit la densité superficielle de forces \tilde{F} sur Σ_d définie par :

$$\tilde{F} d\sigma = (Fd\sigma)^* - (F_0 d\sigma) \quad (1.67)$$

où \tilde{F} représente la variation des forces appliquées par rapport à l'état d'équilibre, supposée donnée (infinitésimale).

Dans ces conditions, la linéarisation de (1.66) conduit à :

$$\int_{\Omega_s} a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u^s) \varepsilon_{ij}(v^*) dx + \int_{\Omega_s} \sigma_{hj}^0 u_{i,h}^s v_{i,j}^* dx + \int_{\Omega_s} \rho_s \frac{\partial^2 u^s}{\partial t^2} \cdot v^* dx + \int_{\Sigma} P_0 n_l(u^s) \cdot v^* d\sigma + \int_{\Sigma} p^s v^* \cdot nd\sigma = \int_{\Sigma_d} \tilde{F} \cdot v^* d\sigma \quad (1.68)$$

Remarques :

- Le premier terme coïncide avec le terme de raideur mécanique.
- Le deuxième terme provient de la prise en compte, dans la structure, des précontraintes à l'équilibre.

*-Expression de p^S en fonction de p et de u^S :

Dans (1.68), $\int_{\Sigma} p^S v^* \cdot n d\sigma$ traduit les actions de pression du liquide sur Σ .

Les équations de base du liquide faisant intervenir la fluctuation eulérienne p (éq.(1.21)), p^S s'exprime en fonction de p et de u^S par :

$$p^S = p - \rho_F g i_z \cdot u^S \quad \text{sur } \Sigma \quad (1.69)$$

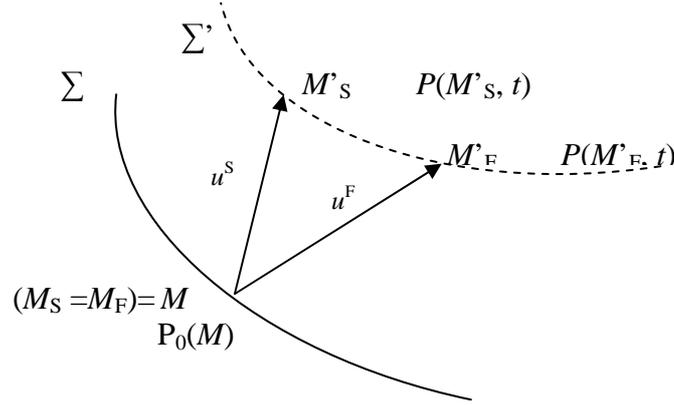


Figure 1.8 Contact liquide-structure

1.4.1.3. Formulation variationnelle :

En portant (1.69) dans (1.68), et en remplaçant P_0 par sa valeur $P_0 = -\rho_F g z$, (z désignant la cote de $M \in \Sigma$ par rapport à un point origine situé sur Γ), on obtient la propriété variationnelle suivante reliant le déplacement u^S à la pression p du liquide :

$$\underbrace{\int_{\Omega_S} a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u^S) \varepsilon_{ij}(v^*) dx}_{k_E} + \underbrace{\int_{\Omega_S} \sigma_{hj}^0 u_{i,h}^S v_{i,j}^* dx}_{k_G} + \int_{\Omega_S} \rho_S \frac{\partial^2 u^S}{\partial t^2} \cdot v^* dx \quad (1.70)$$

$$- \underbrace{\rho_F g \int_{\Sigma} [z n_i(u^S) \cdot v^* + i_z \cdot u^S v^* \cdot n] d\sigma}_{k_{\Sigma}} = \int_{\Sigma_d} \tilde{F} \cdot v^* d\sigma - \int_{\Sigma} p v^* \cdot n d\sigma$$

1.4.1.4. Opérateur symétrique d'élastogravité :

Le premier membre de (1.70) fait intervenir, outre le terme d'inertie, l'opérateur d'élastogravité $\hat{k}(u^S, v^*)$ défini comme la somme des trois contributions suivantes :

1. k_E est la forme bilinéaire symétrique de raideur élastique usuelle,
2. k_G est la forme bilinéaire symétrique dite de « rigidité géométrique », qui met en jeu les précontraintes σ_{ij}^0 provenant, d'une part des termes de

gravité, et d'autres part de la pressurisation interne éventuelle des réservoirs,

3. k_Σ est une forme bilinéaire fonction des déplacements sur Σ , dont nous allons établir la symétrie.

Dans le cas d'une structure élancées (poutre, plaques, coques), il suffit de remplacer la forme bilinéaire k_E et k_G par les expressions variationnelles correspondantes.

On peut écrire k_Σ sous la forme symétrique explicite suivante :

$$k_\Sigma(u, v) = -\frac{1}{2} \rho_f g \left\{ \int_\Sigma [zn_I(u) \cdot v + u_z v_N] d\sigma + \int_\Sigma [zn_I(v) \cdot u + v_z u_N] d\sigma \right\} \quad (1.71)$$

1.4.1.5. Formulation variationnelle dans le cas harmonique :

On se place dans le cas harmonique en posant $u^s(M, t) = u(M) \cos \omega t$.

En désignant par C_u l'espace des u admissible, et en utilisant les notations précédentes, la formulation variationnelle (1.70) s'écrit en régime harmonique, pour $u \in C_u$ et $\forall \delta u \in C_u$ (on a remplacé v par la notation δu) :

$$\hat{k}(u, \delta u) - \omega^2 \int_{\Omega_s} \rho_s u \cdot \delta u dx - \int_\Sigma p \delta u \cdot n^F d\sigma = \int_{\Sigma_d} \tilde{F} \cdot \delta u d\sigma \quad (1.72)$$

où $n^F (= -n)$ est la normale unitaire extérieure au domaine Ω_F , et où on a posé :

$$\hat{k} = (k_E + k_G + k_\Sigma) \quad (1.73)$$

1.4.2. Formulation dissymétrique en (u, φ) :

On obtient la formulation variationnelle du problème couplé, en récapitulant :

1. la propriété variationnelle (1.56) de la réponse du liquide « à une déformation de paroi »,
2. et la propriété variationnelle (1.72) de la réponse de la structure « soumise à la pression p du liquide » - en remplaçant p par son expression

$$p = \rho_f \omega^2 \varphi - \frac{\rho_f g}{\text{Aire}(\Gamma)} \int_\Sigma u \cdot n^F d\sigma \quad (\text{éq. (1.51)}).$$

La formulation variationnelle du problème couplé s'écrit donc : Pour ω et \tilde{F} donnés, trouver $(u, \varphi) \in C_u \times C_\varphi^*$ tels que : $\forall (\delta u, \delta \varphi) \in C_u \times C_\varphi^*$, on ait :

$$\begin{aligned} k^0(u, \delta u) - \omega^2 \int_{\Omega_s} \rho_s u \cdot \delta u dx - \omega^2 \int_\Sigma \rho_f \varphi \delta u \cdot n^F d\sigma &= \int_{\Sigma_d} \tilde{F} \cdot \delta u d\sigma \quad (a) \\ \int_{\Omega_F} \rho_f \nabla \varphi \cdot \nabla \delta \varphi dx - \omega^2 \int_\Gamma \frac{\rho_f}{g} \varphi \delta \varphi d\sigma - \int_\Sigma \rho_f u \cdot n^F \delta \varphi d\sigma &= 0 \quad (b) \end{aligned} \quad (1.74)$$

$$\text{où on a posé :} \quad k^0 = \tilde{k}(u, \delta u) + \kappa_B^0(u, \delta u) \quad (1.75)$$

avec :

$$\kappa_B^0(u, \delta u) = \frac{\rho_F g}{\text{Aire}(\Gamma)} \left(\int_{\Sigma} u \cdot n^F d\sigma \right) \left(\int_{\Sigma} \delta u \cdot n^F d\sigma \right) \quad (1.76)$$

1.5. Vibrations élasto-acoustiques

Nous examinons ici le problème intérieur des vibrations harmoniques d'une structure élastique contenant un fluide compressible non pesant, avec ou sans surface libre. A titre d'exemple d'application, citons :

- les problèmes d'environnement vibroacoustique qui concernent aussi bien les charges utiles de lanceurs, que les passagers d'avions ou de véhicules automobile,
- l'étude de l'influence de la compressibilité des liquides sur les vibrations hydroélastiques (par exemple, dans le cas des réservoirs d'hydrogène liquide des lanceurs).

1.5.1. Formulation variationnelle dissymétrique en (u, p) :

Nous négligeons dans cette partie les effets dus à la pesanteur. Dans ces conditions, la pression et la masse volumique du fluide à l'équilibre sont constantes (le milieu fluide est supposé homogène). De plus, les fluctuations lagrangienne et eulérienne de pression et de masse volumique coïncident.

Nous commençons par rappeler une formulation classique du problème de réponse du système couplé élasto-acoustique à des forces appliquées sur la structure.

Le problème aux limites correspondant s'écrit, en posant $\lambda = \omega^2$:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}(u) + \omega^2 \rho_s u_i &= 0 & \text{dans } \Omega_s & \quad (a) \\ \sigma_{ij}(u) n_j^s &= F_i^d & \text{dans } \partial\Omega_s / \Sigma & \quad (b) \\ \sigma_{ij}(u) n_j^s &= pn_i & \text{sur } \Sigma & \quad (c) \\ \frac{\partial p}{\partial n} &= \omega^2 \rho_f u \cdot n & \text{sur } \Sigma & \quad (d) \\ \Delta p + \frac{\omega^2}{c^2} p &= 0 & \text{dans } \Omega_f & \quad (e) \end{aligned} \quad (1.77)$$

- (1.77a) est l'équation de l'élastodynamique (éq. (1.13a), on néglige les termes de précontraintes dus à la pressurisation).
- (1.77b) est la condition aux limites traduisant la densité superficielle des forces F_i^d appliquées sur la structure.
- (1.77c) traduit l'action de forces de pression exercée par le fluide sur la structure $\sigma_{ij} n_j^s = -pn_i^s = pn_i$, n désignant la normale extérieure au fluide.

- (1.77d) et (1.77e) sont respectivement la condition de glissement du fluide sur Σ , et l'équation classique d'Helmholtz de l'acoustique linéaire.

On applique la méthode des fonctions-tests. On procède en deux étapes, en traitant successivement les équations relatives à la structure (« soumis aux actions de pression de fluide »), puis les équations relatives au fluide (« soumise à un déplacement de la paroi Σ ») (Fig. 1.9).

Dans un premier temps, on introduit l'espace C_u des fonctions régulières définies dans Ω_S . En multipliant l'équation (1.77a) par une fonction $\delta u \in C_u$ quelconque, puis en appliquant la formule de Green (éq.(1.55)), et enfin en tenant compte de (1.77bc), on parvient, pour $u \in C_u$ et $\forall \delta u \in C_u$, à :

$$\int_{\Omega_S} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(\delta u) dx - \omega^2 \int_{\Omega_S} \rho_S u \cdot \delta u dx - \int_{\Sigma} p u \cdot \delta u d\sigma = \int_{\partial\Omega_S/\Sigma} F^d \cdot \delta u d\sigma \quad (1.78)$$

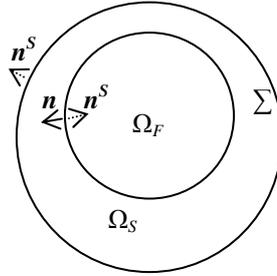


Figure 1. 9. Structure élastique contenant un gaz

qui s'interprète comme la formulation variationnelle du problème de réponse harmonique de la structure aux actions de pression du fluide.

Dans une deuxième étape, on considère l'espace C_p des p réguliers dans Ω_F . On multiplie l'équation (1.77e) par δp puis on intègre sur Ω_F ; en appliquant la formule de Green (1.55) et en tenant compte de (1.77d), on parvient (après division par ρ_F) à la propriété suivante de $p \in C_p$ vérifiée $\forall \delta p \in C_p$:

$$\frac{1}{\rho_F} \int_{\Omega_F} \nabla p \cdot \nabla \delta p dx - \frac{\omega^2}{\rho_F c^2} \int_{\Omega_F} p \delta p dx - \omega^2 \int_{\Sigma} u \cdot n^F \delta p d\sigma = 0 \quad (1.79)$$

et qui s'interprète comme la formulation variationnelle du problème de réponse harmonique de fluide à un mouvement de paroi.

La formulation variationnelle du problème consiste, pour ω et F^d donnés, à trouver, $(u, p) \in C_u \times C_p$ vérifiant (1.78) et (1.79).

Chapitre 2

Méthode des éléments finis

2-1-Introduction à la méthode des éléments finis

2.1.1. Généralités :

L'évolution actuelle de technologie amène l'ingénieur à réaliser des projets de plus en plus complexes, coûteux, et soumis à des contraintes de sécurité de plus en plus sévères. Nous pensons bien sûr aux projets spatiaux, aéronautiques et nucléaires dans lesquels la sécurité est vitale. D'autres types de projets d'envergure sont liés à notre environnement : contrôle de la pollution thermique, acoustique ou chimique, aménagement des cours d'eau, gestion des nappes souterraines, prévision météorologique. Pour dominer ces projets, l'ingénieur a besoin de modèles qui lui permettent de simuler le comportement de systèmes physiques complexes. Il peut ainsi prévoir l'influence de ces décisions au moment de la conception du système.

Les sciences de l'ingénieur (mécanique des solides et des fluides, thermique...) permettent de décrire le comportement de systèmes physiques grâce à des équations aux dérivées partielles. La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées aujourd'hui pour résoudre effectivement ces équations. Elle nécessite l'utilisation intensive de l'ordinateur. C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique : problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires, définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions. De plus elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes souvent rencontrés dans la pratique par l'ingénieur.

La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques. Elle fait appel aux trois domaines suivants :

- Sciences de l'ingénieur pour construire les équations aux dérivées partielles.
- Méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques.
- Programmation et informatique pour exécuter efficacement les calculs sur l'ordinateur.

2.1.2. Evolutions de la méthode :

Depuis une cinquantaine d'années la mécanique des structures permet l'analyse des assemblages de barres et poutres. Le comportement de chaque élément de barre ou de poutre est représenté par une matrice de rigidité élémentaire construite grâce aux hypothèses de la résistance des matériaux. A partir des matrices élémentaires, nous construisons un système d'équations algébriques en utilisant des conditions de continuité des déplacements et d'équilibre des forces aux points de jonction des éléments ou nœuds. La résolution du système d'équations correspondant à des sollicitations données conduit aux déplacements de tous les nœuds de la structure. L'apparition des ordinateurs et les besoins de l'industrie aéronautique ont provoqué un développement rapide de la mécanique des structures entre 1950 et 1960. Turner, Clough, Martin et Topp introduisent en 1956 le concept d'élément fini : ils représentent un milieu continu élastique à deux dimensions par un assemblage de panneaux triangulaires sur lesquels les déplacements sont supposés varier linéairement. Le comportement de chaque panneau est caractérisé par une matrice de rigidité élémentaire. A partir de ces matrices, la technique classique de la mécanique des structures conduit à la solution, c'est-à-dire aux déplacements en tout point du milieu continu.

Soulignons également le travail de Argyris et Kelsey qui systématise l'utilisation de la notion d'énergie dans l'analyse des structures. En fait les idées de base de la méthode des éléments finis apparaissent déjà dans Courant, Hrennicoff et McHenry.

Dès 1960 la méthode des éléments finis subit un développement rapide dans plusieurs directions :

- La méthode est formulée, à partir de considérations énergétiques et variationnelles, sous la forme générale des résidus pondérés.

- De nombreux auteurs créent des éléments de haute précision et des éléments à côtés curvilignes ou isoparamétriques.
- La méthode des éléments finis est reconnue comme un outil général de résolution d'équations aux dérivées partielles. Elle est donc utilisée pour résoudre des problèmes non linéaires et non stationnaires dans le domaine des structures ainsi que dans d'autres domaines : mécanique des sols et des roches, mécanique des fluides, thermique, etc.
- Une base mathématique de la méthode des éléments finis est construite à partir de l'analyse fonctionnelle.

A partir de 1967, de nombreux livres sont publiés, en langue anglaise, sur la méthode des éléments finis. Signalons en particulier les trois éditions très répandues du livre de Zienkiewicz. A l'heure actuelle seules sont disponibles en français des traductions des ouvrages de Zienkiewicz, seconde édition, de Gallagher, de Rockey et al., ainsi que les ouvrages de Absi et d'Imbert. D'autres part plusieurs revues sont consacrées principalement à la méthode des éléments finis.

2.1.3. Etat actuel :

La méthode des éléments finis est maintenant très répandue dans les industries, en particulier en construction aéronautique, aérospatiale, navale et nucléaire. Elle se développe en ce moment dans les applications de la mécanique des fluides : étude de la marée, des transports de sédiments, étude des phénomènes de pollution thermique ou chimique, des interactions fluide-structure. De nombreux programmes généraux de calcul sont disponibles pour utiliser industriellement la méthode des éléments finis, principalement dans le domaine de la mécanique des solides. Par contre, ils sont très rares dans le domaine de la mécanique des fluides et surtout dans l'interaction fluide-structure.

Pour que la méthode des éléments finis soit efficace dans les applications industrielles, il faut utiliser des programmes d'assistance à la préparation des données et à l'interprétation des résultats. Ces pré- et post-processeurs se développent rapidement en ce moment ; ils utilisent les techniques de l'informatique graphique et interactive.

2.2. Approximation par éléments finis :

2.2.1. La méthode d'approximation nodale :

Commençons tout d'abord par la méthode d'approximation nodale.

Elle consiste à chercher une fonction approchée de $u : u(x) = u(x, a_1, \dots, a_n)$ donnant une erreur assez petite : $e(x) = u(x) - u_{\text{ex}}(x)$ ($u_{\text{ex}}(x)$ étant la valeur exacte de u).

$u(x)$ est le plus souvent linéaire en a_i et s'écrit sous la forme :

$$u(x) = \langle P_1(x) \dots P_n(x) \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{Bmatrix}$$

où $P_i(x)$ sont des fonctions connues linéairement indépendantes, et a_i sont les paramètres de l'approximation.

Ce sont au fait (les a_i) les valeurs exactes de u_{ex} aux n points appelés noeuds de coordonnées x_1, \dots, x_n , tel que : $u(x_i) = u_{\text{ex}}(x_i) = u_i$
(Dans ce cas c'est une approximation non nodale).

et alors, si on utilise les u_i on peut écrire que : $u(x) = \langle N \rangle \{ u_i \}$

$$\text{tel que : } N_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

(Dans ce cas c'est une approximation nodale).

Précisons ici quelques termes :

- a_i sont les paramètres généraux de l'approximation.
- u_i sont les paramètres nodaux ou variables nodales de l'approximation.
- $P_i(x)$ sont les fonctions de base de l'approximation.
- $N_i(x)$ sont les fonctions d'interpolation de l'approximation.

2.2.2. De l'approximation nodale à l'approximation par éléments finis :

La construction d'une fonction approchée $u(x)$ est difficile lorsque le nombre n de noeuds et donc de paramètres u_i devient important. Le problème se complique encore si le domaine V a une forme complexe et si la fonction $u(x)$ doit satisfaire des conditions aux limites sur la frontière de V .

La méthode d'approximation nodale par sous-domaines simplifie la construction de $u(x)$ et s'adapte très bien au calcul sur ordinateur.

Elle consiste à :

- identifier un ensemble de sous-domaines V^e du domaine V ;
- définir une fonction approchée $u^e(x)$ différente sur chaque sous-domaine V^e par la méthode d'approximation nodale. Chaque fonction $u^e(x)$ peut dépendre des variables nodales d'autres sous-domaines.

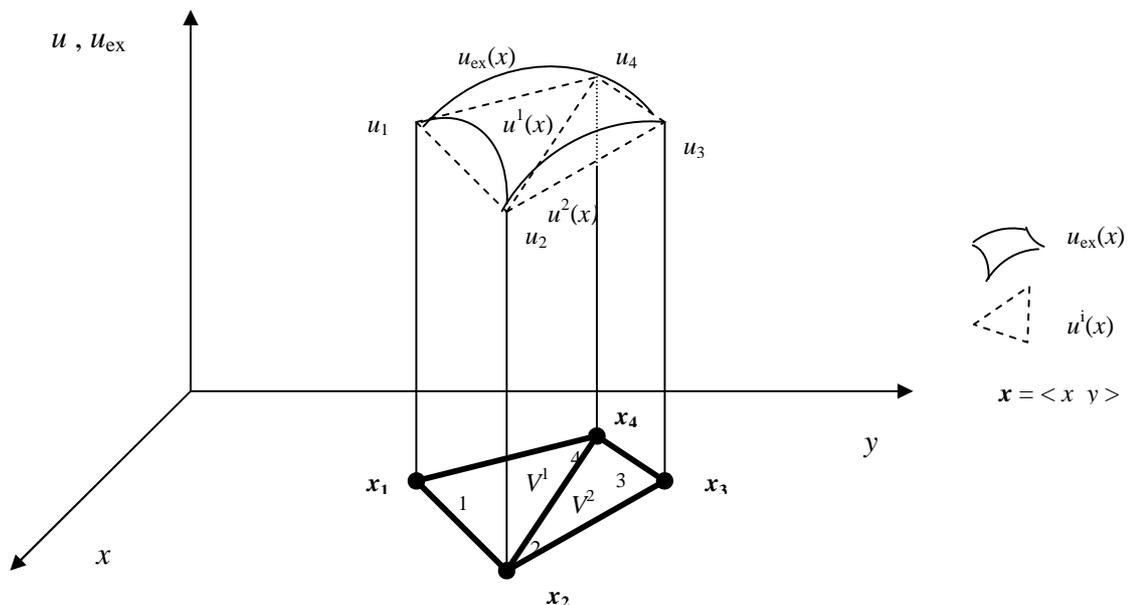
Définitions :

- Les sous-domaines V^e sont appelés des éléments.
- Les points en lesquels la fonction approchée $u^e(x)$ coïncide avec la fonction exacte $u_{ex}(x)$ sont les nœuds d'interpolation ou points nodaux.
- Les coordonnées x_i de ces nœuds sont les coordonnées nodales.
- Les valeurs $u_i = u^e(x_i) = u_{ex}(x_i)$ sont les variables nodales.

L'approximation par éléments finis présente deux aspects distincts :

- Il faut tout d'abord définir analytiquement la géométrie de tous les éléments, ce qui est plus ou moins compliqué selon leurs formes.
- Il faut ensuite construire les fonctions d'interpolation $N_i(\mathbf{x})$ correspondant à chaque élément.

2.2.3.Exemple d'approximation linéaire à deux dimensions par éléments finis :



Définition de la géométrie des éléments :

Nœuds : 1, 2, 3, 4.

Coordonnées nodales : $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$.

Domaine complet V : quadrilatère 1 – 2 – 3 – 4.

Éléments V^1 : triangle 1 – 2 – 4
 V^2 : triangle 2 – 3 – 4.

Construction des fonctions approchées $u^e(\mathbf{x})$:

Variables nodales : u_1, u_2, u_3, u_4 .

Fonctions approchées $u^e(\mathbf{x})$ linéaires en x sur chaque élément.

élément 1 (domaine V^1) :

$$u^1(\mathbf{x}) = N_1(\mathbf{x}) u_1 + N_2(\mathbf{x}) u_2 + N_3(\mathbf{x}) u_4$$

$u^1(\mathbf{x})$ est une fonction linéaire en x et y qui prend les valeurs u_1, u_2, u_4 aux points $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4$. Cette fonction est nulle en dehors du domaine V^1 .

élément 2 (domaine V^2) :

$$u^2(\mathbf{x}) = N_1(\mathbf{x}) u_2 + N_2(\mathbf{x}) u_3 + N_3(\mathbf{x}) u_4.$$

2.2.4. Définition de la géométrie des éléments :**2.2.4.1. Nœuds géométriques :**

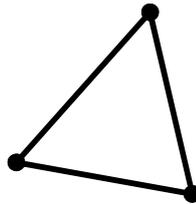
Nous choisissons un ensemble de \bar{n} points, sur le domaine V , qui servira à définir la géométrie des éléments. Ces points, appelés nœuds géométriques, peuvent éventuellement coïncider avec les nœuds d'interpolation. Puis nous remplaçons le domaine V par un ensemble d'éléments V^e de forme relativement simples. Chaque élément V^e doit être défini analytiquement de manière unique en fonction des coordonnées des nœuds géométriques qui appartiennent à cet élément, c'est-à-dire qui sont situés sur V^e et sur sa frontière.

2.2.4.2. Forme d'éléments classiques :

Il existe plusieurs formes d'éléments classiques correspondant à des domaines à une, deux ou trois dimensions.

Chaque élément est identifié par un nom précisant sa forme ainsi que par le type de courbe ou de surface qui en forme la frontière.

A partir de maintenant nous nous limiterons à l'élément utilisé dans notre étude. Il s'agit du cas de deux dimensions et à l'élément triangulaire linéaire à trois nœuds définis ci-dessous :

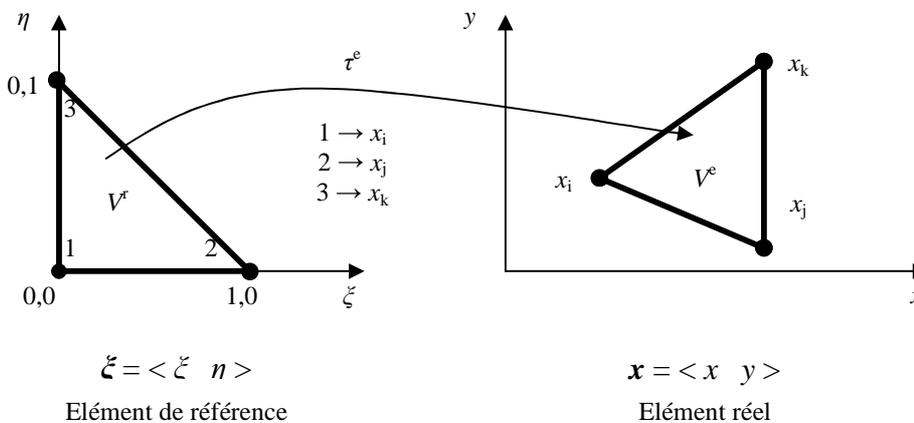


linéaire (3 nœuds)

Notre cas : Triangulaire linéaire à trois noeuds

2.2.4.3. Eléments de référence :

De manière à simplifier la définition analytique des éléments de forme complexe, introduisons la notion d'éléments de référence : un élément de référence V^r est un élément de forme très simple, repéré dans un espace de référence, qui peut être transformé en chaque élément réel V^e par une transformation géométrique τ^e . Par exemple dans le cas d'un triangle :



La transformation τ^e définit les coordonnées \mathbf{x}^e de chaque point de l'élément réel à partir des coordonnées ξ du point correspondant de l'élément de référence

$$\tau^e : \xi \rightarrow \mathbf{x}^e = \mathbf{x}^e(\xi). \tag{2.1}$$

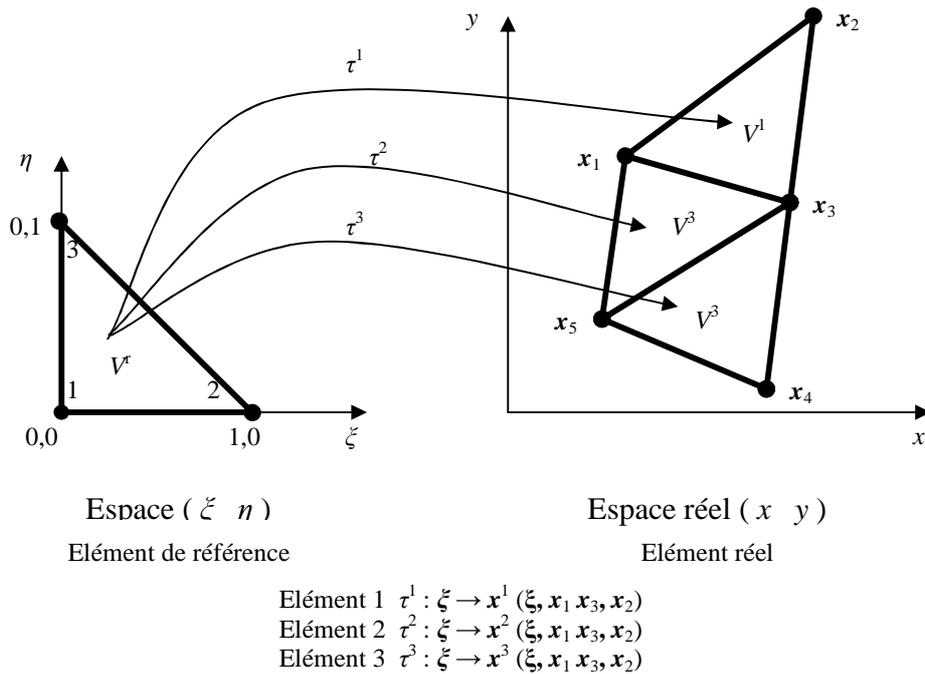
La transformation τ^e dépend de la forme et de la position de l'élément réel, donc des coordonnées des nœuds géométriques qui le définissent.

Il y a donc une transformation τ^e différente pour chaque élément réel :

$$\tau^e : \xi \rightarrow \mathbf{x}^e = \mathbf{x}^e(\xi, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k, \dots). \tag{2.2}$$

où $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k, \dots$ sont les coordonnées des nœuds géométriques qui appartiennent à l'élément e .

Soulignons qu'un même élément de référence V^r (par exemple un triangle à 3 nœuds) se transforme en tous les éléments réels V^e de même type (triangles à 3 nœuds) par des transformations τ^e différentes :



A partir de maintenant, pour simplifier la notation, l'indice supérieur e , caractéristique d'un élément, sera supprimé. Nous utiliserons une transformation τ linéaire par rapport aux coordonnées $\{\mathbf{x}_n\}$ des nœuds géométriques de l'élément réel V^e :

$$\tau : \xi \rightarrow \mathbf{x}(\xi) = [\bar{N}(\xi)] \{\mathbf{x}_n\}. \tag{2.3}$$

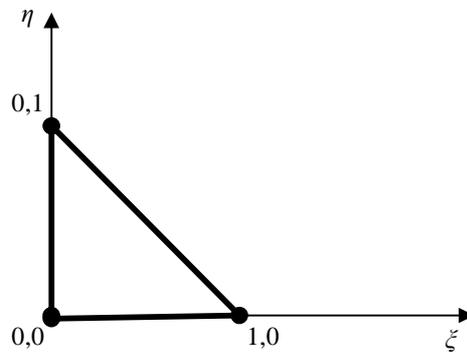
De plus les fonctions de transformation sont choisies identiques pour les trois coordonnées :

$$\begin{aligned}x(\xi) &= [\bar{N}(\xi)] \{x_n\} \\y(\xi) &= [\bar{N}(\xi)] \{y_n\} \\z(\xi) &= [\bar{N}(\xi)] \{z_n\}\end{aligned}$$

Grâce à la transformation géométrique τ nous remplaçons la définition analytique de chaque élément V^e dans l'espace des \mathbf{x} par la définition analytique, plus simple, de son élément de référence V^r dans l'espace des ξ . Par la suite nous travaillerons systématiquement dans l'espace des ξ et nous utiliserons des fonctions $u(\xi)$ à la place des fonctions $u(\mathbf{x})$, la relation entre ξ et \mathbf{x} étant définie par la relation (2.3). les fonctions $u(\xi)$ et $u(\mathbf{x})$ sont différentes, mais prennent la même valeur en des points qui se correspondent dans la transformation. Nous avons : $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}(\xi))$, ce que nous noterons par simplicité $u(\mathbf{x}) = u(\xi)$.

2.2.4.4. Formes d'éléments de référence classiques :

Nous présentons ci-dessous la forme et la définition analytique de l'élément de référence correspondant aux éléments de notre cas :



Élément de référence
Triangulaire
linéaire (3 nœuds)

$$V^r : \begin{cases} \xi + \eta \leq 1 \\ \xi \geq 0 \\ \eta \geq 0 \end{cases}$$

2.2.5. Approximation sur un élément de référence :

2.2.5.1. Expression de la fonction approchée $u(\mathbf{x})$:

Nous choisissons sur le domaine V un ensemble de n nœuds d'interpolation de coordonnées \mathbf{x}_i , confondus ou non avec les nœuds géométriques. Sur chaque élément V^e nous utilisons une approximation nodale de la fonction exacte $u_{\text{ex}}(\mathbf{x})$:

$$u_{\text{ex}}(\mathbf{x}) \approx u(\mathbf{x}) = \langle N_1(\mathbf{x}) \quad N_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad N_{n_e}(\mathbf{x}) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{Bmatrix} = \langle N(\mathbf{x}) \rangle \{ u_n \} \quad (2.4)$$

ou : \mathbf{x} appartient à V^e ,

u_1, u_2, \dots, u_{n_e} sont les valeurs de u_{ex} aux n_e nœuds d'interpolation de l'élément, ou variables nodales,

$N(\mathbf{x})$ sont les fonctions d'interpolation sur l'élément réel.

Remplaçons l'approximation sur l'élément réel par l'approximation correspondante sur l'élément de référence :

$$u_{\text{ex}}(\xi) \approx u(\xi) = \langle N(\xi) \rangle \{ u_n \} \quad (2.5)$$

avec (2.3) :

$$\tau : \xi \rightarrow \mathbf{x}(\xi) = [\bar{N}(\xi)] \{ \mathbf{x}_n \}.$$

ou : $\{ u_n \}$ sont les variables nodales de l'élément,

$\langle N(\xi) \rangle$ sont les fonctions d'interpolation sur l'élément de référence.

2.2.6. Construction des fonctions $N(\xi)$ et $\bar{N}(\xi)$:

Les fonctions de transformation géométrique $\bar{N}(\xi)$ et les fonctions d'interpolation sur l'élément de référence $N(\xi)$ ont les mêmes propriétés. Elles peuvent parfois être construites directement à partir de polynômes souvent classiques de type Lagrange ou Hermite ; cependant il n'existe pas de technique manuelle systématique pour les construire. Seule l'expérience a permis de trouver les fonctions $N(\xi)$ correspondant à un certain nombre d'éléments classiques.

Nous proposerons dans les paragraphes suivants une méthode numérique générale valable pour tous les types d'éléments.

2.2.6.1. Méthode générale de construction :

2.2.6.1.a) Choix de la base polynomiale :

Exprimons $u(\xi)$ sur l'élément de référence sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions connues indépendantes $P_1(\xi), P_2(\xi), \dots$, qui sont le plus souvent des monômes indépendants. Le choix des fonctions $P_i(\xi)$ est l'une des opérations de base de la méthode des éléments finis :

$$u(\xi) = \langle P_1(\xi) \ P_2(\xi) \ \dots \ \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n_d} \end{Bmatrix} = \langle P(\xi) \rangle \{ a \} \quad (2.6)$$

L'ensemble des fonctions $P(\xi)$ constitue la base polynomiale de l'approximation. Son nombre de termes doit être égal au nombre de variables nodales ou nombre de degrés de liberté n_d de l'élément.

Pour construire les fonctions de transformation géométrique \bar{N} , choisissons de la même manière des expressions de x de la forme :

$$\begin{aligned} x(\xi) &= \langle \bar{P}(\xi) \rangle \{ a_x \} \\ y(\xi) &= \langle \bar{P}(\xi) \rangle \{ a_y \} \\ z(\xi) &= \langle \bar{P}(\xi) \rangle \{ a_z \} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Le nombre de fonctions $\bar{P}(\xi)$ et de coefficients $\{ a_x \}, \{ a_y \}$ et $\{ a_z \}$ est égal au nombre \bar{n}^e de nœuds géométriques de l'élément.

Définitions :

- Les coefficients $\{ a \}$ sont appelés variables généralisées de l'élément par opposition aux variables nodales $\{ u_n \}$.
- La relation $u(\xi) = \langle P(\xi) \rangle \{ a \}$ définit l'approximation généralisée par opposition à l'approximation nodale $u(\xi) = \langle N(\xi) \rangle \{ u_n \}$.
- Les coefficients $\{ a_x \}, \{ a_y \}, \{ a_z \}$ sont appelés parfois coordonnées généralisées de l'élément par opposition aux coordonnées nodales $\{ x_n \}, \{ y_n \}, \{ z_n \}$ des nœuds géométriques.

2.2.6.1.b) Relations entre variables généralisées et variables nodales :

Exprimons qu'en chaque nœud d'interpolation de coordonnées $\{ \xi_i \}$, la fonction $u(\xi)$ prend la valeur nodale $u_i = u_{ex}(\xi_i)$:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{n_d} \end{Bmatrix} = \{u_n\} = \begin{bmatrix} \langle P_1(\xi_1) & P_2(\xi_1) & \dots & P_{n_d}(\xi_1) \rangle \\ \langle P_1(\xi_2) & P_2(\xi_2) & \dots & P_{n_d}(\xi_2) \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle P_1(\xi_{n_d}) & P_2(\xi_{n_d}) & \dots & P_{n_d}(\xi_{n_d}) \rangle \end{bmatrix} \{a\}$$

$$\{u_n\} = [P_n] \{a\} \quad (2.8)$$

soit en inversant la matrice nodale $[P_n]$ d'ordre n_d

$$\{a\} = [P_n]^{-1} \{u_n\} \quad (2.9)$$

Pour passer de (2.8) à (2.9) il ne faut pas que $[P_n]$ soit singulière. Si $[P_n]$ est singulière, cela implique qu'il n'est pas possible d'exprimer d'une manière unique les paramètres $\{a\}$ de la relation (2.6) en fonction des variables nodales $\{u_n\}$. Ceci dépend du choix de la base polynomiale et des coordonnées $\{\xi_i\}$ des nœuds de l'élément de référence. Puisque $[P_n]$ est indépendante de la géométrie de l'élément réel, la propriété de singularité de $[P_n]$ est une caractéristique de l'élément de référence et non de l'élément réel.

De la même manière, nous écrivons les relations (2.7) aux nœuds géométriques :

$$\begin{aligned} \{x_n\} &= [\overline{P}_n] \{a_x\} \\ \{y_n\} &= [\overline{P}_n] \{a_y\} \\ \{z_n\} &= [\overline{P}_n] \{a_z\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

soit après inversion de $[\overline{P}_n]$:

$$\begin{aligned} \{a_x\} &= [\overline{P}_n]^{-1} \{x_n\} \\ \{a_y\} &= [\overline{P}_n]^{-1} \{y_n\} \\ \{a_z\} &= [\overline{P}_n]^{-1} \{z_n\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.2.6.1.c) Expressions des fonctions N et \bar{N} :

Reportons (2.9) dans (2.6) :

$$u(\xi) = \langle P(\xi) \rangle [P_n]^{-1} \{u_n\}$$

$$\text{soit : } u(\xi) = \langle N(\xi) \rangle \{u_n\} \quad (2.12)$$

$$\text{d'où : } \langle N(\xi) \rangle = \langle P(\xi) \rangle [P_n]^{-1}$$

Nous obtenons de la même manière dans le cas des fonctions \bar{N} :

$$\begin{aligned} x(\xi) &= \langle \bar{N}(\xi) \rangle \{x_n\} \\ y(\xi) &= \langle \bar{N}(\xi) \rangle \{y_n\} \\ z(\xi) &= \langle \bar{N}(\xi) \rangle \{z_n\} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\text{où : } \langle N(\xi) \rangle = \langle \bar{P}(\xi) \rangle [\bar{P}_n]^{-1}$$

2.2.6.1.d) Dérivation de la fonction $u(\xi)$:

Par dérivation de (2.12), nous obtenons :

$$\begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,\zeta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \langle P_{,\xi} \rangle \\ \langle P_{,\eta} \rangle \\ \langle P_{,\zeta} \rangle \end{Bmatrix} [P_n]^{-1} \{u_n\} = \begin{Bmatrix} \langle N_{,\xi} \rangle \\ \langle N_{,\eta} \rangle \\ \langle N_{,\zeta} \rangle \end{Bmatrix} \{u_n\} = [B_\xi] \{u_n\} \quad (2.14)$$

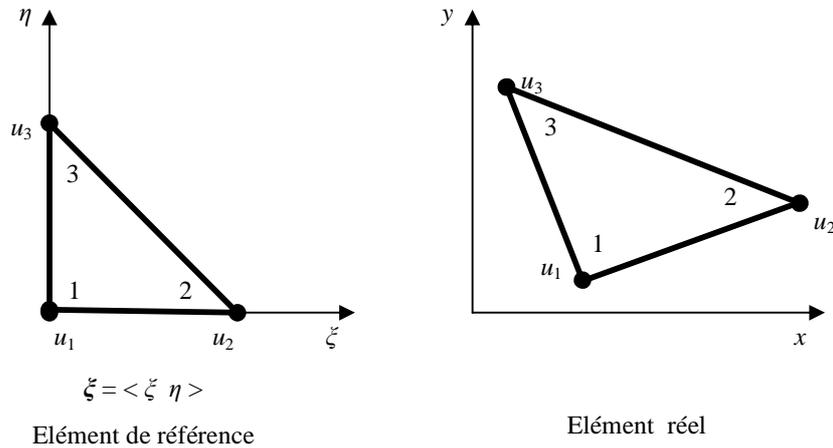
2.2.6.1.e) Résumé des opérations de construction de $\langle N \rangle$:

- Choix de la base polynomiale $\langle P(\xi) \rangle$
- Evaluation de la matrice $[P_n] = [P_j(\xi_i)] : i, j = 1, 2, \dots, n_d$
- Inversion de la matrice nodale $[P_n]$
- Calcul de $\langle N \rangle$ aux points ξ désirés :

$$\langle N(\xi) \rangle = \langle P(\xi) \rangle [P_n]^{-1}$$

Il est important de noter que ces opérations ne doivent être effectuées qu'une seule fois pour l'ensemble des éléments réels qui possèdent le même élément de référence.

2.2.6.2. Construction des fonctions $N(\xi)$ d'un élément triangulaire linéaire à 3 nœuds :



Les nœuds géométriques et les nœuds d'interpolation sont confondus :

$$\langle P \rangle = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \rangle \quad (2.15)$$

$$\{\xi_n\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{\eta_n\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

$$[P_n] = \begin{bmatrix} \langle P(\xi_1) \rangle \\ \langle P(\xi_2) \rangle \\ \langle P(\xi_3) \rangle \end{bmatrix}; \quad [P_n]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Expression de $\langle N \rangle$:

$$\langle N \rangle = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \rangle = \langle P \rangle [P_n]^{-1}$$

$$\langle N \rangle = \langle 1 - \xi - \eta \quad \xi \quad \eta \rangle \quad (2.18)$$

L'élément est isoparamétrique :

$$\langle \bar{N} \rangle \equiv \langle N \rangle$$

$$x(\xi, \eta) = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

et

$$y(\xi, \eta) = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}$$

(2.19)

2.2.7. Transformation des opérateurs de dérivation :

2.2.7.1. Généralités :

Les équations du problème physique étudié sont écrites sur le domaine réel, donc sur les éléments réels ; elles font intervenir des fonctions inconnues u_{ex} et leurs dérivées en x : $\frac{\partial u_{ex}}{\partial x}$, $\frac{\partial u_{ex}}{\partial y}$ etc. Comme l'approximation (2.4) sur l'élément réel est souvent compliquée nous utilisons systématiquement l'approximation (2.5) sur l'élément de référence :

$$u_{ex}(\xi) \approx u(\xi) = \langle N(\xi) \rangle \{ u_n \} \quad (2.20)$$

Associée à la transformation (2.3) :

$$\begin{aligned} \tau : \xi &\rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi) = [\bar{N}(\xi)] \{ \mathbf{x}_n \}. \\ \mathbf{x} &= \langle x \quad y \quad z \rangle \\ \xi &= \langle \xi \quad \eta \quad \zeta \rangle \end{aligned} \quad (2.21)$$

La transformation τ étant bijective :

$$\tau^{-1} : \quad \mathbf{x} \rightarrow \xi = \xi(\mathbf{x}) \quad (2.22)$$

Bien que τ^{-1} existe toujours, elle n'est facile à construire explicitement que si τ est linéaire. Déjà pour l'élément triangulaire quadratique à 6 nœuds, la construction de

τ^{-1} est compliquée. Si nous disposons explicitement de (2.20) pour obtenir l'approximation sur l'élément réel :

$$u(\xi(\mathbf{x})) = \langle N(\xi(\mathbf{x})) \rangle \{ u_n \} = \langle N(\mathbf{x}) \rangle \{ u_n \} = u(\mathbf{x}).$$

En fait cette expression n'est pas utilisée pour les éléments compliqués, car nous travaillons sur l'élément de référence. Toutes les expressions qui impliquent des dérivées de u en x, y, z sont transformées en dérivées en ξ, η, ζ grâce à la matrice de transformation dite matrice jacobienne $[J]$.

2.2.7.2. Dérivées premières :

Utilisons la dérivation en chaîne pour calculer les dérivées en ξ d'une fonction à partir de ses dérivées en \mathbf{x} :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (2.23a)$$

ce que nous noterons :

$$\{\partial_\xi\} = [J]\{\partial_x\} \quad (2.23b)$$

où $[J]$ est la matrice jacobienne de la transformation géométrique. Les termes $[J]$ s'obtiennent aisément par dérivation de (2.21). De la même manière, les dérivées en \mathbf{x} d'une fonction s'obtiennent à partir des dérivées en ξ :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (2.24a)$$

soit

$$\{\partial_x\} = [j]\{\partial_\xi\} \quad (2.24b)$$

En portant (2.24b) dans (2.23b) nous obtenons :

$$[j] = [J]^{-1} \quad (2.25)$$

C'est la matrice $[j]$ qui est utilisée en pratique puisque nous devons exprimer les dérivées de u en x, y, z à partir des dérivées de u en ξ, η, ζ . Comme les termes de $[j]$ sont des dérivées de la relation (2.22) qui n'est pas connue explicitement, nous utilisons donc l'expression (2.25) pour calculer $[j]$ à partir des termes de $[J]$. Nous avons supposé la transformation τ bijective, par conséquent l'inverse de $[J]$ existe en tout point de l'élément de référence.

2.2.7.2.a) Expression de $[j] = [J]^{-1}$

Nous présentons les formes explicites de l'inverse de $[J]$ à une, deux et trois dimensions :

- Une dimension :

$$[J] = J_{11}; \quad [j] = [J]^{-1} = \frac{1}{J_{11}} \quad (2.26)$$

- Deux dimensions :

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}; \quad [j] = [J]^{-1} = \frac{1}{\det(J)} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$\det(J) = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}$$

- Trois dimensions :

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}$$

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det(J)} \begin{bmatrix} J_{22}J_{33} - J_{32}J_{23} & J_{13}J_{32} - J_{12}J_{33} & J_{12}J_{23} - J_{13}J_{22} \\ J_{31}J_{23} - J_{21}J_{33} & J_{11}J_{33} - J_{13}J_{31} & J_{21}J_{13} - J_{23}J_{11} \\ J_{21}J_{32} - J_{31}J_{22} & J_{12}J_{31} - J_{32}J_{11} & J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$\det(J) = J_{11}(J_{22}J_{33} - J_{32}J_{23}) + J_{12}(J_{31}J_{23} - J_{21}J_{33}) + J_{13}(J_{21}J_{32} - J_{31}J_{22})$$

2.2.7.2.b) Calcul des termes de $[J]$:

Les termes de $[J]$ sont obtenus d'après (2.23a) par dérivation par rapport à ξ de la relation (2.3) que nous réécrivons sous la forme :

$$\langle x \ y \ z \rangle = \langle \bar{N}(\xi) \rangle \{ \{x_n\} \ \{y_n\} \ \{z_n\} \} \quad (2.29)$$

$\{x_n\}$ $\{y_n\}$ $\{z_n\}$ étant les coordonnées x , y et z des nœuds géométriques de l'élément. La matrice jacobienne s'écrit :

$$[J] = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \langle x \ y \ z \rangle = \begin{bmatrix} \langle \bar{N}_{,\xi} \rangle \\ \langle \bar{N}_{,\eta} \rangle \\ \langle \bar{N}_{,\zeta} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{x_n\} \\ \{y_n\} \\ \{z_n\} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

$(3 \times \bar{n}^e) \quad (\bar{n}^e \times 3)$

Elle est donc le produit de deux matrices, l'une contenant les dérivées en ξ des fonctions de transformation géométrique, et l'autre les coordonnées des \bar{n}^e nœuds géométriques de l'élément.

2.2.7.2.c) Transformation d'une intégrale :

Le changement de variables (2.21) permet de passer de l'intégration d'une fonction f sur l'élément réel V^e à une intégration plus simple sur l'élément de référence V^r :

$$\int_{V^e} f(x) dx dy dz = \int_{V^r} f(x(\xi)) \det(J) d\xi d\eta d\zeta \quad (2.31)$$

$\det(J)$ étant le déterminant de la matrice jacobienne $[J]$. En effet l'élément de volume dV est le produit mixte :

$$dV = (d\bar{x} \times d\bar{y}) \cdot d\bar{z} \quad (2.32)$$

En repère cartésien orthonormé :

$$d\bar{x} = dx \cdot \vec{i}; \quad d\bar{y} = dy \cdot \vec{j}; \quad d\bar{z} = dz \cdot \vec{k} \quad (2.33)$$

où $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont les vecteurs unitaire portés par les axes. Alors :

$$dV = dx \ dy \ dz \quad (2.34)$$

Dans le repère curviligne (ξ, η, ζ) :

$$dV = (d\vec{\xi} \times d\vec{\eta}) \cdot d\vec{\zeta} \quad (2.35)$$

Les composantes de ces vecteurs dans un repère cartésien sont :

$$\begin{aligned} d\vec{\xi} &= (J_{11}\vec{i} + J_{21}\vec{j} + J_{31}\vec{k})d\xi \\ d\vec{\eta} &= (J_{12}\vec{i} + J_{22}\vec{j} + J_{32}\vec{k})d\eta \\ d\vec{\zeta} &= (J_{13}\vec{i} + J_{23}\vec{j} + J_{33}\vec{k})d\zeta \end{aligned} \quad (2.36)$$

Le produit mixte s'écrit donc :

$$dV = \det(J)d\xi d\eta d\zeta \quad (2.37)$$

2.2.7.3. Dérivées secondes :

Cherchons maintenant à exprimer les dérivées secondes en \mathbf{x} à partir des dérivées premières et secondes en ξ . En dérivant la relation (2.24a) par rapport à \mathbf{x} , nous obtenons la relation suivante entre les dérivées secondes en \mathbf{x} et en ξ :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \end{Bmatrix} = [T_1] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} + [T_2] \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \zeta} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (2.38a)$$

que nous noterons :

$$\{\partial^2_x\} = [T_1]\{\partial_\xi\} + [T_2]\{\partial^2_\xi\} \quad (2.38b)$$

2.2.7.3.a) Calcul de $[T_1]$:

La matrice $[T_1]$ fait intervenir des dérivées en ξ des termes de $[j]$ définis par (2.24a). $[T_1]$ s'annule si $[J]$ est constante, c'est-à-dire si les fonctions $\bar{N}(\xi)$ sont linéaires. Comme nous ne disposons pas en général d'une expression explicite de $[j]$, nous proposons une méthode pour évaluer $[T_1]$ sans utiliser de dérivées de $[j]$.

En dérivant (2.23) par rapport à ξ nous obtenons :

$$\{\partial^2_\xi\} = [C_1]\{\partial_x\} + [C_2]\{\partial^2_x\} \quad (2.39a)$$

ou en utilisant (2.24b) (puisque $\{\partial_x\} = [J]\{\partial_\xi\}$) :

$$\{\partial^2_\xi\} = [C_1][j]\{\partial_\xi\} + [C_2]\{\partial^2_x\} \quad (2.39b)$$

Reportons (2.39b) dans (2.38b) :

$$\{\partial_x^2\} = ([T_1] + [T_2][C_1][j])\{\partial_\xi\} + [T_2][C_2]\{\partial_x^2\}$$

D'où les deux relations :

$$[T_2][C_2] = [I] \quad \text{donc} \quad [T_2] = [C_2]^{-1} \quad (2.40a)$$

$$[T_1] + [T_2][C_2][j] = 0 \quad \text{donc} \quad [T_1] = -[T_2][C_2][j] \quad (2.40b)$$

Les matrices $[T_1]$ et $[C_1]$ sont données explicitement par (2.41) et (2.42) avec $[I]$ est la matrice unité.

2.2.7.3.b) Calcul de $[T_2]$ et $[C_1]$:

La matrice $[T_2]$ définie par (2.38b) s'exprime directement en fonction des termes de $[j]$ données par (2.25) et (2.30) :

$$[T_2] = \begin{bmatrix} j_{11}^2 & j_{12}^2 & j_{13}^2 & 2j_{11}j_{12} & 2j_{12}j_{13} & 2j_{13}j_{11} \\ j_{21}^2 & j_{22}^2 & j_{23}^2 & 2j_{21}j_{22} & 2j_{22}j_{23} & 2j_{23}j_{21} \\ j_{31}^2 & j_{32}^2 & j_{33}^2 & 2j_{31}j_{32} & 2j_{32}j_{33} & 2j_{33}j_{31} \\ j_{11}j_{21} & j_{12}j_{22} & j_{13}j_{23} & j_{11}j_{22} + j_{12}j_{21} & j_{12}j_{23} + j_{13}j_{22} & j_{11}j_{23} + j_{13}j_{21} \\ j_{21}j_{31} & j_{22}j_{32} & j_{23}j_{33} & j_{21}j_{32} + j_{22}j_{31} & j_{22}j_{33} + j_{23}j_{32} & j_{21}j_{33} + j_{23}j_{31} \\ j_{31}j_{11} & j_{32}j_{12} & j_{33}j_{13} & j_{31}j_{12} + j_{32}j_{11} & j_{32}j_{13} + j_{33}j_{12} & j_{31}j_{13} + j_{33}j_{11} \end{bmatrix} = [C_2]^{-1} \quad (2.41)$$

La matrice $[C_1]$ définie par (2.39a) s'écrit :

$$[C_1] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \langle J_{11} & J_{12} & J_{13} \rangle \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \langle J_{21} & J_{22} & J_{23} \rangle \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \langle J_{31} & J_{32} & J_{33} \rangle \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \langle J_{11} & J_{12} & J_{13} \rangle + \frac{\partial}{\partial \xi} \langle J_{21} & J_{22} & J_{23} \rangle \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \langle J_{21} & J_{22} & J_{23} \rangle + \frac{\partial}{\partial \eta} \langle J_{31} & J_{32} & J_{33} \rangle \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \langle J_{31} & J_{32} & J_{33} \rangle + \frac{\partial}{\partial \zeta} \langle J_{11} & J_{12} & J_{13} \rangle \right) \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Précisons que l'expression de $[C_2]$ est identique à celle de $[T_2]$ si nous remplaçons dans $[T_2]$ les termes de $[j]$ par les termes correspondants de $[J]$.

A deux dimensions nous obtenons :

$$[T_2] = \begin{bmatrix} j_{11}^2 & j_{12}^2 & 2j_{11}j_{12} \\ j_{21}^2 & j_{22}^2 & 2j_{21}j_{22} \\ j_{11}j_{21} & j_{12}j_{22} & j_{11}j_{22} + j_{12}j_{21} \end{bmatrix} \quad (2.43a)$$

$$[C_1] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \langle J_{11} & J_{12} \rangle \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \langle J_{21} & J_{22} \rangle \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \langle J_{11} & J_{12} \rangle + \frac{\partial}{\partial \xi} \langle J_{21} & J_{22} \rangle \right) \end{bmatrix} \quad (2.43b)$$

2.2.7.3.c) Fonctions $N(\xi)$ et $\partial N / \partial \xi$ d'un élément triangulaire linéaire à 3 nœuds :

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \langle 1 - \xi - \eta & \xi & \eta \rangle \\ \langle \partial N / \partial \xi \rangle &= \langle -1 & 1 & 0 \rangle \\ \langle \partial N / \partial \eta \rangle &= \langle -1 & 0 & 1 \rangle \end{aligned} \quad (2.44)$$

Chapitre 3

Discrétisation et intégration numérique

3.1. Vibrations des structures élastiques :

3.1.1. Cas de la structure libre ($\Sigma=\emptyset$):

Les équations et la formulation variationnelle s'écrivent (d'après (1.13) et (1.14)) :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}(u) - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= 0 & \text{dans } \Omega & \quad (a) \\ \sigma_{ij}(u)n_j &= F_i & \text{sur } \partial\Omega/\Sigma & \quad (b) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)dx + \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} v_i dx = \int_{\partial\Omega} F_i v_i d\sigma \quad u \in C, \forall v \in C \quad (3.2)$$

* Discrétisation : méthodes de Ritz-Galerkin et des éléments finis :

On utilise la méthode de Ritz-Galerkin, qui consiste à rechercher une solution approchée de (1.14) dans un sous-espace C^h de dimension finie N de C .

Si e_j ($j=1,\dots,N$) désigne une base de ce sous-espace vectoriel, son élément générique $u^h \in C^h$ peut s'écrire sous la forme $u^h = \sum_{j=1}^N \xi_j e_j$.

La satisfaction d'une propriété variationnelle faisant intervenir des formes bilinéaires et linéaires dans ce sous espace, conduit alors à des équations matricielles.

Dans le cas particulier de la méthode des éléments finis, on rappelle que ξ_j coïncide avec la valeur de u^h au nœuds d'un maillage (dans le cas d'une interpolation de Lagrange) - u^h étant défini par interpolation à partir des valeurs nodales U_j appelées degrés de liberté.

*-Matrices de masse et de raideur, vecteur force –

Dans la suite U (resp. V) désigne le vecteur de \mathfrak{R}^N de composantes U_j (resp. V_j) et V^T le transposé de V . Les expressions discrétisées des formes bilinéaires et linéaires intervenant dans la formulation variationnelle (3.2) conduisent aux matrices de masse M (symétrique, inversible), de raideur K (symétrique, singulière), et vecteur force F , définis respectivement par :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho u \cdot v dx &\Rightarrow V^T M U & (a) \\ \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) dx &\Rightarrow V^T K U & (b) \\ \int_{\partial\Omega} F \cdot v d\sigma &\Rightarrow V^T F & (c) \end{aligned} \quad (3.3)$$

La forme discrétisée (3.2) s'écrit donc :

$$\begin{aligned} V^T M \ddot{U} + V^T K U &= V^T F \quad \forall V & (a) \\ \downarrow & & (3.4) \\ M \ddot{U} + K U &= F & (b) \end{aligned}$$

On est donc ramené à la solution d'un système d'équations différentielles couplé de grande taille.

3.1.2. Cas d'une structure fixée sur Σ :

Les équations et la formulation variationnelle s'écrivent (d'après (1.12)) :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) dx + \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} v_i dx = \int_{\partial\Omega/\Sigma} F_i v_i d\sigma \quad u \in C^0, \forall v \in C^0 \quad (3.5)$$

Les composantes de U et de V correspondant aux nœuds du maillage situés sur Σ sont nulles.

Les matrices K et M de la structure fixée sur Σ , se déduisent donc de celles de la structure libre par suppression des lignes et des colonnes correspondant aux nœuds de liberté fixés (dans ce cas, K est inversible).

3.1.3. Réponse harmonique à des forces :

On suppose $F(M,t) = F(M) \cos \omega t$ et on envisage les solutions $u(M,t) = u(M) \cos \omega t$ de (3.1) (ou (3.2), (3.4)).

Le problème aux limites, la formulation variationnelle, et les équations matricielles, s'écrivent alors, pour ω et F donnés :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}(u) + \rho \omega^2 u_i &= 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma_{ij}(u) n_j &= F_i & \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) dx - \omega^2 \int_{\Omega} \rho u \cdot v dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot v d\sigma \quad u \in C, \forall v \in C \quad (3.7)$$

$$KU - \omega^2 MU = F \quad (3.8)$$

- En pratique, il s'agit de résoudre (3.8) pour ω et F donnés, ce qui suppose que la valeur de ω ne soit « pas trop élevée » (la finesse du maillage utilisé doit permettre de rendre compte de l'échelle spatiale des phénomènes étudiés, pour la valeur de ω considérée).

3.2. Discrétisation pour l'analyse modale de la réponse vibratoire du liquide :

l'équation (1.56) est la formulation variationnelle de la réponse à un déplacement u_N imposé (pour envisager la réponse harmonique du liquide à un mouvement de paroi donné, d'amplitude normale u_N sur Σ , et de pulsation ω) est donnée par :

Pour ω et u_N donnés, trouver $\varphi \in C^*$ tel que :

$$\int_{\Omega_F} \nabla \varphi \cdot \nabla \delta\varphi dx - \frac{\omega^2}{g} \int_{\Gamma} \varphi \delta\varphi d\sigma = \int_{\Sigma} u_N \delta\varphi d\sigma \quad \forall \delta\varphi \in C^* \quad (3.9)$$

Si U désigne le vecteur des valeurs nodales de u , (3.9) s'écrit sous forme discrétisée :

$$F\Phi - \frac{\omega^2}{g} S\Phi = C^T U \quad \text{avec} \quad L^T \Phi = 0 \quad (3.10)$$

où $\delta\Phi^T C^T U$ discrétise $\int_{\Sigma} u_N \cdot \delta\varphi d\sigma$, et où $L^T \Phi = 0$ discrétise la liaison $\int_{\Gamma} \varphi d\sigma = 0$.

3.3. Discrétisation des vibrations hydroélastique en présence de gravité :

3.3.1. Formulation dissymétrique en (u, φ) :

D'après l'équation (1.74) la formulation variationnelle du problème couplé s'écrit donc :

Pour ω et \tilde{F} donnés, trouver $(u, \varphi) \in C_u \times C_\varphi^*$ tels que :

$\forall (\delta u, \delta\varphi) \in C_u \times C_\varphi^*$, on ait :

$$k^0(u, \delta u) - \omega^2 \int_{\Omega_s} \rho_s u \cdot \delta u dx - \omega^2 \int_{\Sigma} \rho_F \varphi \delta u \cdot n^F d\sigma = \int_{\Sigma_d} \tilde{F} \cdot \delta u d\sigma \quad (a)$$

$$\int_{\Omega_F} \rho_F \nabla \varphi \cdot \nabla \delta\varphi dx - \omega^2 \int_{\Gamma} \frac{\rho_F}{g} \varphi \delta\varphi d\sigma - \int_{\Sigma} \rho_F u \cdot n^F \delta\varphi d\sigma = 0 \quad (b) \quad (3.11)$$

où on a posé :

$$k^0 = \tilde{k}(u, \delta u) + \kappa_B^0(u, \delta u) \quad (3.12)$$

avec :

$$\kappa_B^0(u, \delta u) = \frac{\rho_F g}{\text{Aire}(\Gamma)} \left(\int_{\Sigma} u \cdot n^F d\sigma \right) \left(\int_{\Sigma} \delta u \cdot n^F d\sigma \right) \quad (3.13)$$

Structure matricielle du problème discrétisé :

On désigne par U le vecteur des N_u valeurs nodales de u , et par Φ le vecteur des N_ϕ valeurs nodales de ϕ . Les matrices correspondant aux diverses formes bilinéaires et linéaires intervenant dans (3.11), sont définies par :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_s} a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u) \varepsilon_{ij} \delta(u) dx &\Rightarrow \delta U^T K_E U & (a) \\ \int_{\Omega_s} \sigma_{ij}^0 u_{l,i} \delta u_{l,j} dx &\Rightarrow \delta U^T K_G U & (b) \\ k_{\Sigma}(u, \delta u) &\Rightarrow \delta U^T K_{\Sigma} U & (c) \\ \frac{\rho_F g}{\text{Aire}(\Gamma)} \left(\int_{\Sigma} u \cdot n^F d\sigma \right) \left(\int_{\Sigma} \delta u \cdot n^F d\sigma \right) &\Rightarrow \delta U^T K_b^0 U & (d) \\ \int_{\Omega_s} \rho_s u \cdot \delta u dx &\Rightarrow \rho U^T M U & (e) \\ \int_{\Sigma_d} \tilde{F} \cdot \delta u d\sigma &\Rightarrow \delta U^T F & (f) \end{aligned} \quad (3.14)$$

avec en outre

$$\int_{\Sigma} \rho_F \delta u \cdot n^F d\sigma \Rightarrow \delta U^T C \Phi \quad \left| \int_{\Sigma} \rho_F \delta \phi u \cdot n^F d\sigma \Rightarrow \delta \Phi^T C^T U \quad (3.15)$$

Enfin la discrétisation de (3.11b) introduit les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_F} \rho_F \nabla \phi \cdot \nabla \delta \phi dx &\Rightarrow \delta \Phi^T F \Phi & (a) \\ \int_{\Gamma} \frac{\rho_F}{g} \phi \delta \phi d\sigma &\Rightarrow \delta \Phi^T S \Phi & (b) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Par conséquent, la matrice K^0 discrétisant k^0 défini en (3.12) s'écrit :

$$K^0 = K_E + K_G + K_{\Sigma} + K_B^0 \quad (3.17)$$

Sous forme discrétisée, la formulation variationnelle (3.11) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} K^0 & 0 \\ -C^T & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \Phi \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M & C \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{F} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

où Φ est soumis à la liaison $\int_{\Gamma} \phi d\sigma = 0$ discrétisée.

3.4. Discrétisation des vibrations élasto-acoustiques :

3.4.1. Formulation dissymétrique en (u,p) :

Nous rappelons que le problème aux limites correspondant aux vibrations élasto-acoustiques exprimé en (u,p) (voir chapitre 1 partie 1.5.1, éq.(1.77)) est donné par, en posant $\lambda = \omega^2$:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij,j}(u) + \omega^2 \rho_s u_i &= 0 & \text{dans } \Omega_s & \quad (a) \\
 \sigma_{ij}(u) n_j^s &= F_i^d & \text{dans } \partial\Omega_s / \Sigma & \quad (b) \\
 \sigma_{ij}(u) n_j^s &= p n_i & \text{sur } \Sigma & \quad (c) \\
 \frac{\partial p}{\partial n} &= \omega^2 \rho_F u \cdot n & \text{sur } \Sigma & \quad (d) \\
 \Delta p + \frac{\omega^2}{c^2} p &= 0 & \text{dans } \Omega_F & \quad (e)
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

La formulation variationnelle dissymétrique en (u,p) du problème consiste, pour ω et F^d donnés, à trouver, $(u, p) \in C_u \times C_p$ vérifiant (1.78) et (1.79) suivantes :

$$\int_{\Omega_s} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(\delta u) dx - \omega^2 \int_{\Omega_s} \rho_s u \cdot \delta u dx - \int_{\Sigma} p u \cdot \delta u d\sigma = \int_{\partial\Omega_s / \Sigma} F^d \cdot \delta u d\sigma \tag{3.20}$$

$$\frac{1}{\rho_F} \int_{\Omega_F} \nabla p \cdot \nabla \delta p dx - \frac{\omega^2}{\rho_F c^2} \int_{\Omega_F} p \delta p dx - \omega^2 \int_{\Sigma} u \cdot n^F \delta p d\sigma = 0 \tag{3.21}$$

Discrétisation par éléments finis :

Les matrices correspondant aux diverses formes bilinéaires ou linéaires intervenant dans la formulation variationnelle ((3.20), (3.21)) sont définies par :

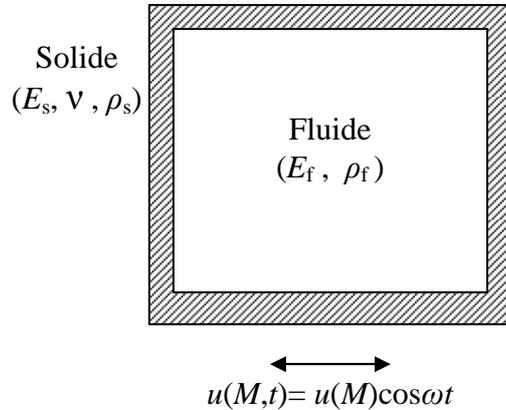
$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_s} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij} \delta(u) dx &\Rightarrow \delta U^T K U & (a) \\
 \int_{\Omega_s} \rho_s u \cdot \delta u dx &\Rightarrow \delta U^T M U & (b) \\
 \frac{1}{\rho_F} \int_{\Omega_F} \nabla p \cdot \nabla \delta p dx &\Rightarrow \delta p^T F p & (c) \\
 \frac{1}{\rho_F c^2} \int_{\Omega_F} p \delta p dx &\Rightarrow \delta p^T K_p p & (d) \\
 \int_{\Sigma} p \delta u \cdot n d\sigma &\Rightarrow \delta U^T C p & (e) \\
 \int_{\partial\Omega_s / \Sigma} F^d \cdot \delta u d\sigma &\Rightarrow \delta U^T F^d & (f)
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Les équations variationnelles (8.2) et (8.3) s'écrivent sous forme discrétisée :

$$\begin{bmatrix} K & -C \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M & 0 \\ C^T & K_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^d \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

3.5. Application - vibrations élasto-acoustiques - :

Problème étudié :



3.5.1. Modélisation mathématique :

Nous supposons que toutes les variables sont des fonctions harmoniques en fonction du temps, ce qui ramène le problème au calcul des amplitudes seulement.

3.5.1.a. Domaine fluide :

Dans le domaine fluide, on suppose que l'écoulement est irrotationnel, ce qui nous permet l'introduction du potentiel de déplacement " φ "

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.24)$$

avec v_x et v_y sont les composantes du vecteur déplacement.

Dans ce cas l'équation régissant l'écoulement d'un fluide considéré compressible s'écrit :

$$\rho_f \omega^2 \varphi + E_f \Delta \varphi = 0 \quad (3.25)$$

avec E_f est le module d'élasticité du fluide donné par :

$$E_f = \rho_f c^2 \quad (3.26)$$

Démonstration de l'équation (3.25) :

D'après les équations (1.35), (1.37) et (1.39) on a respectivement :

$$\nabla p - \rho_f \omega^2 u^f = 0 \quad (3.27)$$

$$u^f = \nabla \varphi \quad (3.28)$$

$$p = -\rho_f c^2 \Delta \varphi \quad \text{dans } \Omega_f \quad (3.29)$$

de (3.28) et (3.27) on aura :

$$\begin{aligned} \nabla p - \rho_f \omega^2 \nabla \varphi &= 0 \quad \Rightarrow \\ p - \rho_f \omega^2 \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

de (3.29) et (3.30) on aura :

$$\begin{aligned} -\rho_f c^2 \Delta \varphi - \rho_f \omega^2 \varphi &= 0 \quad \Rightarrow \\ \rho_f \omega^2 \varphi + E_f \Delta \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

avec $E_f = \rho_f c^2$

3.5.1.b. Domaine solide :

Dans le domaine solide, on utilise l'équation de Navier pour l'état plan de contrainte (en deux dimensions), donnée par :

$$\begin{aligned} -\rho_s \omega^2 U + \frac{E_s}{1-\nu^2} (U_{,x} + \nu W_{,y})_{,x} + \frac{E_s}{2(1+\nu)} (U_{,y} + V_{,x})_{,y} &= 0 \\ -\rho_s \omega^2 V + \frac{E_s}{1-\nu^2} (V_{,y} + \nu U_{,x})_{,y} + \frac{E_s}{2(1+\nu)} (U_{,y} + V_{,x})_{,x} &= 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Sachant que :

$$\sigma_{ij} = \frac{E_s}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

et :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

où U, V sont les composantes du déplacement dans les directions x, y .

3.5.1.c. Les conditions à l'interface :

* A l'interface les déplacements doivent être continus :

$$\vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{n} - \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} \cdot \vec{n} = 0 \quad (3.35)$$

\vec{n} est le vecteur normal à la frontière.

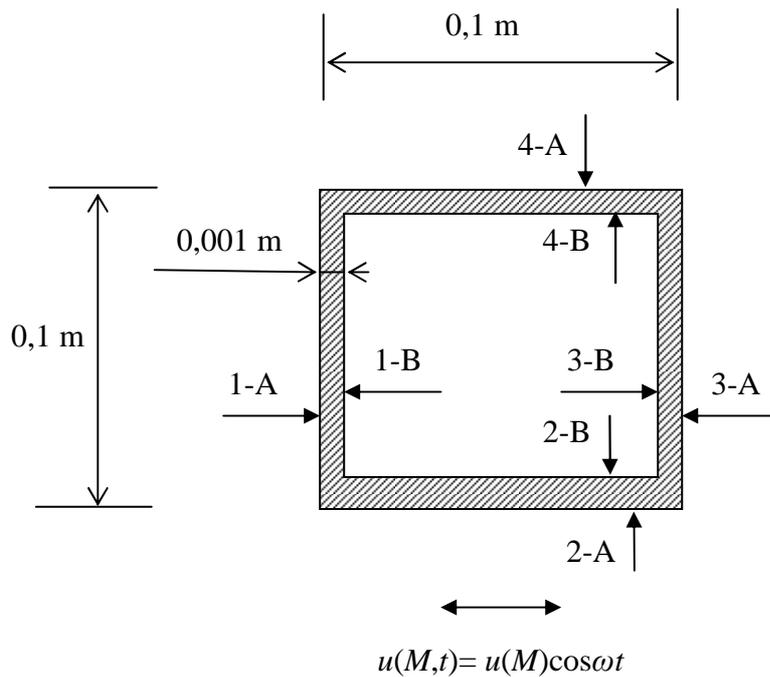
* La pression dans le domaine fluide est donnée par (selon l'équation (3.30)) :

$$p = \rho_f \omega^2 \varphi \quad (3.36)$$

* Les forces à l'interface (équilibre) :

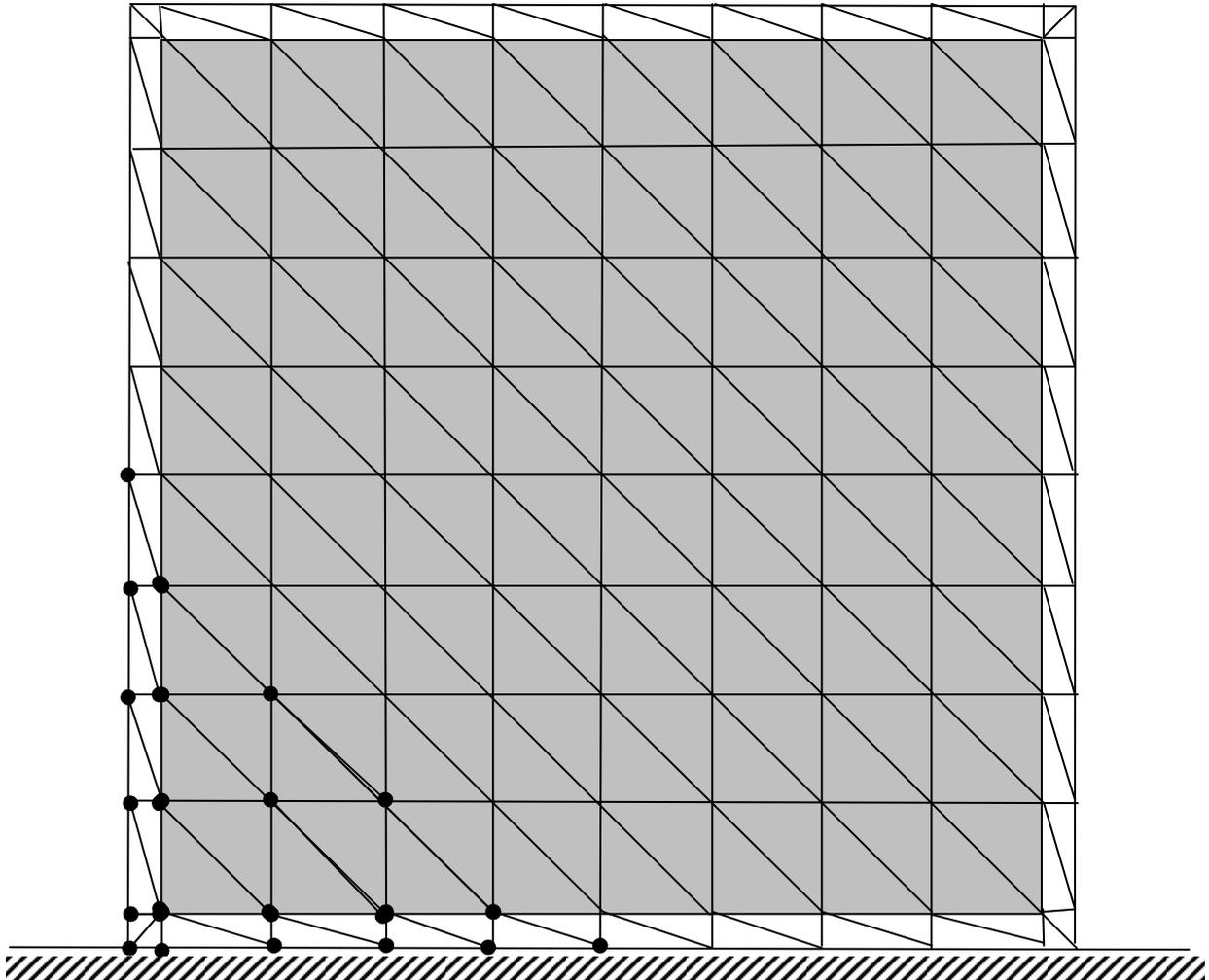
$$[\sigma] \cdot \vec{n} + \rho_f \omega^2 \varphi \cdot \vec{n} = 0 \quad (3.37)$$

3.5.2. Problème étudié :



Données :

$$\begin{aligned} E_f &= 10^5 \text{ [N / m}^2 \text{]} \\ \rho_f &= 1 \text{ [kg / m}^3 \text{]} \\ E_s &= 1,5 \cdot 10^8 \text{ [N / m}^2 \text{]} \\ \rho_s &= 3000 \text{ [kg / m}^3 \text{]} \\ \nu &= 0,3. \end{aligned}$$

Maillage :

On choisissant un pas = 1×10^{-3} m, on aura :

Domaine fluide :

- le nombre total d'éléments domaine fluide est $100 \times 100 \times 2 = 20\,000$ éléments
- Le nombre total de nœuds domaine fluide est $101 \times 101 = 10\,201$ nœuds

Domaine structure :

- le nombre d'éléments par sègment est $101 \times 2 = 202$ éléments
- le nombre total de nœuds par sègment est $102 \times 2 = 204$ noeuds
- le nombre total d'élément domaine structure est $202 \times 4 = 808$ éléments
- le nombre total de nœuds domaine structure est $204 \times 4 = 816$ noeuds

3.6. Méthodes numérique :

La mise en œuvre effective de la méthode des éléments finis nécessite l'utilisation de méthodes numériques variées pour construire les matrices élémentaires et résoudre les systèmes d'équations algébriques qui en résultent.

Parmi ces méthodes on utilise les méthodes d'intégration numérique dont on détaillera, par la suite, la méthode d'intégration de Gauss.

3.6.1. Intégration numérique :

Dans la méthode des éléments finis, la matrice élémentaire $[k]$ et le vecteur des sollicitations élémentaires $\{f\}$ s'exprime sous forme d'intégrales à une, deux ou trois dimensions, définies sur l'élément réel V^e :

$$\begin{aligned} [k] &= \int_{V^e} [B_\delta]^T [D][B] dV \\ \{f\} &= \int_{V^e} \{N\} f_v dV + \int_{S_f^e} \{N\} f_s dS \end{aligned} \quad (3.38a)$$

Sur l'élément de référence, ces intégrales deviennent :

$$\begin{aligned} [k] &= \int_{V^r} [B_\delta(\xi)]^T [D(\xi)][B(\xi)] \det(J(\xi)) dV^r \\ \{f\} &= \int_{V^r} \{N(\xi)\} f_v \det(J(\xi)) dV^r + \int_{S_f^r} \{N(\xi_s)\} f_s dS \end{aligned} \quad (3.38b)$$

Où : V^r est le volume de l'élément de référence.

S_f^r est la partie de la frontière de l'élément de référence sur laquelle est appliquée la sollicitation f_s .

ξ_s représente les coordonnées ξ sur le contour S' .

$$dS = J_s ds_1 ds_2$$

$[J]$ est la matrice jacobienne de la transformation géométrique.

Soit encore :

$$\begin{aligned} [k] &= \int_{V^r} [k^*] dV^r \\ \{f\} &= \int_{V^r} \{f_v^*\} dV^r + \int_{S_f^r} \{f_s^*\} dS \end{aligned} \quad (3.39)$$

Où :

$$\begin{aligned} [k^*] &= [B_\delta(\xi)]^T [D(\xi)][B(\xi)] \det(J(\xi)) \\ \{f_v^*\} &= \{N(\xi)\} f_v \det(J(\xi)) \\ \{f_s^*\} &= \{N(\xi_s)\} f_s \end{aligned}$$

Les termes de $[k^*]$, $\{f_v^*\}$ et $\{f_s^*\}$ sont des polynômes ou des fractions rationnelles compliqués. Leur intégration explicite n'est facile que s'ils sont constitués de termes polynômiaux.

Il est en général préférable d'utiliser une intégration de (3.39) de la forme :

$$\begin{aligned} [k] &= \sum_{i=1}^r w_i [k^*(\xi_i)] \\ \{f\} &= \sum_{i=1}^r w_i \{f_v^*(\xi_i)\} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Où ξ_i sont les coordonnées des r points d'intégration.

w_i sont les coefficients de pondération (ou poids) correspondants.

3.6.1.1. Intégration numérique à une dimension par la méthode de Gauss :

La méthode de Gauss est une méthode d'intégration numérique très utilisée dans laquelle les r coefficients w_i et les r abscisses ξ_i sont déterminés de manière à intégrer exactement des polynômes d'ordre $m \leq 2r-1$.

Remplaçons l'intégral d'une fonction polynomiale $y(\xi)$ par une combinaison linéaire de ses valeurs aux points d'intégration ξ_i :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 y(\xi) d\xi &= w_1 y(\xi_1) + w_2 y(\xi_2) + \dots + w_i y(\xi_i) + \dots + w_r y(\xi_r) \\ \int_{-1}^1 y(\xi) d\xi &= \sum_{i=1}^r w_i y(\xi_i) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Déterminons les $2r$ coefficients de manière à ce que (3.41) soit vérifiée exactement pour le polynôme suivant :

$$y(\xi) = a_1 + a_2 \xi + \dots + a_{2r} \xi^{2r-1}$$

Portant cette expression dans (3.41) :

$$\begin{aligned} a_1 \int_{-1}^1 d\xi + a_2 \int_{-1}^1 \xi d\xi + \dots + a_{2r} \int_{-1}^1 \xi^{2r-1} d\xi &= a_1 (w_1 + w_2 + \dots + w_r) + \\ &+ a_2 (w_1 \xi_1 + w_2 \xi_2 + \dots + w_r \xi_r) + \dots + \\ &+ a_{2r} (w_1 \xi_1^{2r-1} + w_2 \xi_2^{2r-1} + \dots + w_r \xi_r^{2r-1}) \end{aligned} \quad (3.42)$$

Pour que (3.42) soit identiquement vérifiée pour tout a_1, a_2, \dots, a_{2r} , il faut que :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \xi^\alpha d\xi &= \frac{2}{\alpha + 1} = \sum_{i=1}^r w_i \xi_i^\alpha & \alpha = 0, 2, 4, \dots, 2r - 2 \\ \int_{-1}^1 \xi^\alpha d\xi &= 0 = \sum_{i=1}^r w_i \xi_i^\alpha & \alpha = 1, 3, 5, \dots, 2r - 1 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 2 &= (w_1 + w_2 + \dots + w_r) \\
 0 &= (w_1 \xi_1 + w_2 \xi_2 + \dots + w_r \xi_r) \\
 \frac{2}{3} &= (w_1 \xi_1^2 + w_2 \xi_2^2 + \dots + w_r \xi_r^2) \\
 &\dots \dots \\
 0 &= (w_1 \xi_1^{2r-1} + w_2 \xi_2^{2r-1} + \dots + w_r \xi_r^{2r-1})
 \end{aligned}$$

Ce système de $2r$ équations est linéaire en w_i et non linéaire en ξ_i ; il détermine les $2r$ paramètres de (3.41) sous les conditions :

$$\left. \begin{aligned} w_i &> 0 \\ -1 &< \xi_i < 1 \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots, r$$

3.6.1.2. Intégration numérique à deux dimensions :

Elle consiste à utiliser dans chaque direction ξ et η une intégration numérique à une dimension. Si nous utilisons r_1 points dans le sens ξ et r_2 points dans le sens η , la méthode de Gauss intègre exactement le produit d'un polynôme en ξ d'ordre $2r_1-1$ et d'un polynôme en η d'ordre $2r_2-1$.

a) La méthode "produit " utilise $r = r_1 \cdot r_2$ points; elle intègre tous les monômes

$$\begin{aligned}
 \xi^i \eta^j \text{ tels que } 0 \leq i \leq 2r_1-1 \\
 0 \leq j \leq 2r_2-1
 \end{aligned}$$

b) Méthodes directes :

Il est possible également d'étendre directement à deux dimensions les méthodes du paragraphe 3.6.1.1 :

$$\iint_{V_r} y(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^r w_i y(\xi_i, \eta_i) \quad (3.44)$$

Nous pouvons en particulier construire des méthodes de type Gauss qui intègrent exactement tous les monômes d'ordre m :

$$\xi^i \eta^j \text{ tels que } i + j \leq m$$

De telles méthodes utilisent souvent moins de points que les méthodes "produit". Elles sont présentées en détail par Stroud.

Pour les éléments de références carrés, les méthodes "produit" sont les plus souvent utilisées, alors que pour les éléments triangulaires les méthodes directes sont plus courantes.

3.6.1.3. Méthode directe de Gauss pour l'intégration numérique sur l'élément de référence triangulaire :

Plusieurs formes d'ordre $m = 1, 2, \dots, 6$ sont disponible, qui intègrent exactement des monômes $\xi^i \eta^j$ pour lesquels $i + j \leq m$. Ces formules sont souvent dites formules de "Hammer".

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} y(\xi, \eta) d\eta d\xi \approx \sum_{i=1}^r w_i y(\xi_i, \eta_i)$$

Méthode directe :

	Ordre m	Nombre de points r	Coordonnées		Poids w_i
			ξ_i	η_i	
	2	3	1/2 0 1/2	1/2 1/2 0	1/6

3.6.2. Formulation par la méthode des résidus pondérés :

Nous savons que le fait d'introduire dans une équation différentielle la fonction d'interpolation revient à construire une solution approchée par la recherche de paramètres indéterminés ou sous une autre forme de valeurs nodales inconnues.

Ce problème peut être, entre autres, résolu par une méthode des résidus pondérés. Le principe de base de cette méthode consiste à introduire dans le résidu :

$$R(u) = \Theta(u) - f \tag{3.45}$$

une fonction d'interpolation susceptible de vérifier les conditions aux limites et de choisir autant de critères qu'il y a d'inconnues à déterminer. Ces critères consistent à annuler une expression de la forme :

$$\int_D w R(u) dD = 0 \tag{3.46}$$

où w est une pondération dont la forme varie en fonction des diverses variantes de la méthode. Les principales sont :

- Collocation par points
- Collocation par sous-domaines
- Galerkin
- Moindres carrés

3.6.3. Formulation par la méthode de Galerkin :

La méthode de Galerkin est une méthode de résidus pondérés consistant à choisir comme pondération, les fonctions de base qui ont servi à construire la fonction d'interpolation.

A partir de la forme générale (3.46) $\int_D w R(u) dD = 0$

on choisit : $w = \{N\}$

ceci permet d'écrire la méthode de Galerkin sous forme :

$$W = \int_D \{N\} R(u) dD = 0 \quad (3.47)$$

Les fonctions de pondération N sont introduites dans la forme intégrale sous forme d'un vecteur colonne pour respecter les lois du produit matriciel et ainsi obtenir autant d'équations qu'il y a de fonctions de base.

Notons toutefois, que la méthode de Galerkin est souvent présentée dans la littérature sous forme variationnelle, c'est-à-dire en posant :

$$w = \delta u \quad (3.48)$$

où δu est la première variation de u . La variation est ensuite exprimée par interpolation nodale soit :

$$\delta u = \langle N \rangle \{\delta u_n\} = \langle \delta u_n \rangle \{N\} \quad (3.49)$$

la forme (3.47) devient :

$$W = \int_D \langle \delta u_n \rangle \{N\} R(u) dD = 0 \quad (3.50)$$

enfin puisque les $\langle \delta u_n \rangle$ ne sont pas fonctions du domaine géométrique D , ils peuvent être extraits de l'intégration, on retrouve alors la forme (3.47) :

$$W = \langle \delta u_n \rangle \int_D \{N\} R(u) dD = 0 \quad (3.51)$$

ou simplement

$$W = \int_D \{N\} R(u) dD = 0 \quad (3.52)$$

Le vecteur $\{N\}$ représente ici les fonctions de base de l'approximation nodale de façon globale, c'est-à-dire valide sur l'ensemble du domaine D . Cependant nous savons que les fonctions N sont définies seulement sur des sous domaines élémentaires donc il est évident que la relation précédente ne peut être écrite en pratique. Nous utilisons donc la propriété de l'intégrale qui consiste à formuler l'intégrale d'un tout comme la somme des intégrales des parties connexes; ainsi l'expression précédente devient :

$$W = \sum \int_e \{N\} R(\langle N \rangle \{u\}) dD = 0 \quad (3.53)$$

où les fonctions N sont alors associées spécifiquement à un élément à ses inconnues, mais expriment aussi le fait que les autres inconnues ne participent pas à l'approximation. Ici W est un résidu partiel puisqu'il n'est applicable que sur l'élément e correspondant.

Le résidu global s'exprime comme la somme des résidus partiels, ce qui constitue un processus d'assemblage :

$$W = \sum_1^{n^e} W_i \quad (3.54)$$

3.6.4. Système d'équation final :

Finalement, en utilisant dans (3.51) les expressions ($u^e = \langle N \rangle \{u_n\}$ et $\delta u^e = \langle N \rangle \{\delta u_n\} = \langle \delta u_n \rangle \{N\}$) et des expressions analogues de ∂u^e et $\delta(\partial u^e)$, nous obtenons l'expression matricielle suivante de W^e discrétisée, qui est la base de la méthode des éléments finis, [32].

$$W^e = \langle \delta u_n \rangle ([k] \{u_n\} - \{f\}) \quad (3.55)$$

où : $[k]$ est la **matrice élémentaire**

$\{f\}$ est le **vecteur élémentaire des sollicitations**

$\{u_n\}$ est le **vecteur élémentaire des variables nodales**

$\{\delta u_n\}$ est le **vecteur élémentaire des variations des variables nodales**

La forme intégrale globale (3.54) se construit par addition des formes élémentaires (3.55) :

$$W = \sum_e W^e = \sum_e \langle \delta u_n \rangle ([k] \{u_n\} - \{f\}) = 0 \quad (3.56)$$

Cette somme est ensuite organisée sous la forme matricielle :

$$W = \langle \delta U_n \rangle ([K] \{U_n\} - \{F\}) = 0 \quad (3.57)$$

où : $[K]$ est la **matrice globale**

$\{F\}$ est le **vecteur global des sollicitations**

$\{U_n\}$ est le **vecteur global** de toutes les **variables nodales** du problème

$\{\delta U_n\}$ est le **vecteur global des variations des variables nodales**

Le passage de (3.56) à (3.57) constitue l'**assemblage des éléments** ; il permet de construire les termes de $[K]$ et $\{F\}$ à partir des termes de $[k]$ et $\{f\}$ de chaque élément, [32].

Comme W doit être nul pour tout $\langle \delta U_n \rangle$, nous obtenons le système d'équations en $\{U_n\}$:

$$[K] \{U_n\} = \{F\} \quad (3.58)$$

Nous définissons le **résidu élémentaire** par :

$$\{r\} = \{f\} - [k] \{u_n\} \quad (3.59)$$

Le **résidu global** est obtenu par assemblage des résidus élémentaires :

$$\{R\} = \sum_e \{r\} = \{F\} - [K] \{U_n\} \quad (3.60)$$

Ce résidu est nul si $\{U_n\}$ est la solution de (3.58).

3.6.5. Résolution du système d'équations linéaires :

La résolution du système d'équations $[K] \{U_n\} = \{F\}$ est une étape importante de la méthode des éléments finis. Ce système est linéaire lorsque $[K]$ ne dépend pas de $\{U_n\}$.

Le nombre n d'inconnues U_n est proportionnel au nombre total de nœuds d'interpolation et au nombre de degrés de liberté par nœud.

Les méthodes de résolution de systèmes linéaires peuvent être classées en deux catégories :

- a) les méthodes directes qui conduisent à la solution en un nombre d'opérations connu a priori.
- b) Les méthodes itératives qui conduisent à la solution par une succession d'améliorations d'une solution approchée, le nombre d'itérations nécessaire étant difficile à prévoir et dépendant de la structure de la matrice $[K]$.

Dans notre cas on utilise une méthode directe qui est la méthode d'élimination de Gauss, car elle nécessite en général beaucoup moins d'opérations que les méthodes itératives.

3.6.6. Organisation du calcul des matrices élémentaire par intégration numérique :

Les étapes de calcul des matrices élémentaires sont les suivantes :

- a) Opérations communes à tous les éléments de même type (ayant le même élément de référence) :
 - Calcul des coordonnées ξ_r et des poids w_r correspondant aux points d'intégration ;
 - Calcul des fonctions N et de leurs dérivées en ξ aux points d'intégration.
- b) Calcul de la matrice $[k]$ de chaque élément :
 - Initialiser $[k]$ à zéro ;
 - Pour chaque point d'intégration ξ_r :
 - * calculer la matrice jacobienne $[J]$ à partir des dérivées en ξ des fonctions N et des coordonnées des nœuds de l'élément, ainsi que son déterminant.
 - * calculer les dérivées des fonctions N en x à partir des dérivées en ξ .
 - * construire les matrices $[B]$ et $[D]$;
 - * accumuler dans $[k]$ le produit : $[B]^T [D] [B] \det (J) w_r$.

- c) Calcul de la matrice $[m]$:
- initialiser $[m]$ à zéro ;
 - Pour chaque point d'intégration ξ_r :
 - * calculer la matrice jacobienne et son déterminant ;
 - * accumuler dans $[m]$ le produit : $\{N\} \langle N \rangle \det(J) w_r$.
- d) Calcul du vecteur sollicitations $\{f\}$ correspondant à f_v constant :
- initialiser $\{f\}$ à zéro ;
 - Pour chaque point d'intégration ξ_r :
 - * calculer la matrice jacobienne et son déterminant ;
 - * accumuler dans $[f]$ le produit : $\{N\} f_v \det(J) w_r$.
- e) Calcul du résidu $\{r\}$ à partir de la solution $\{u_n\}$:
- initialiser le résidu $\{r\}$ à $\{f\}$ calculé dans l'étape (d) ;
 - Pour chaque point d'intégration ξ_r :
 - * construire les matrices $[B]$, $[D]$, $[J]$ comme dans la sous-section (b) ci-dessus ;
 - * accumuler dans $[r]$ le produit : $- [B]^T [D] [B] \{u_n\} w_r \det(J)$.
- f) Calcul des gradients $\{\partial u\}$ aux points d'intégration à partir de la solution $\{u_n\}$:
- Pour chaque point d'intégration ξ_r :
 - * construire la matrice $[B]$ comme dans la sous-section (b) ci-dessus ;
 - * calculer le gradient : $\{\partial u\} = [B] \{u_n\}$.
- g) Application des conditions aux limites
- h) Assemblage des matrices élémentaires pour la construction du système global à résoudre

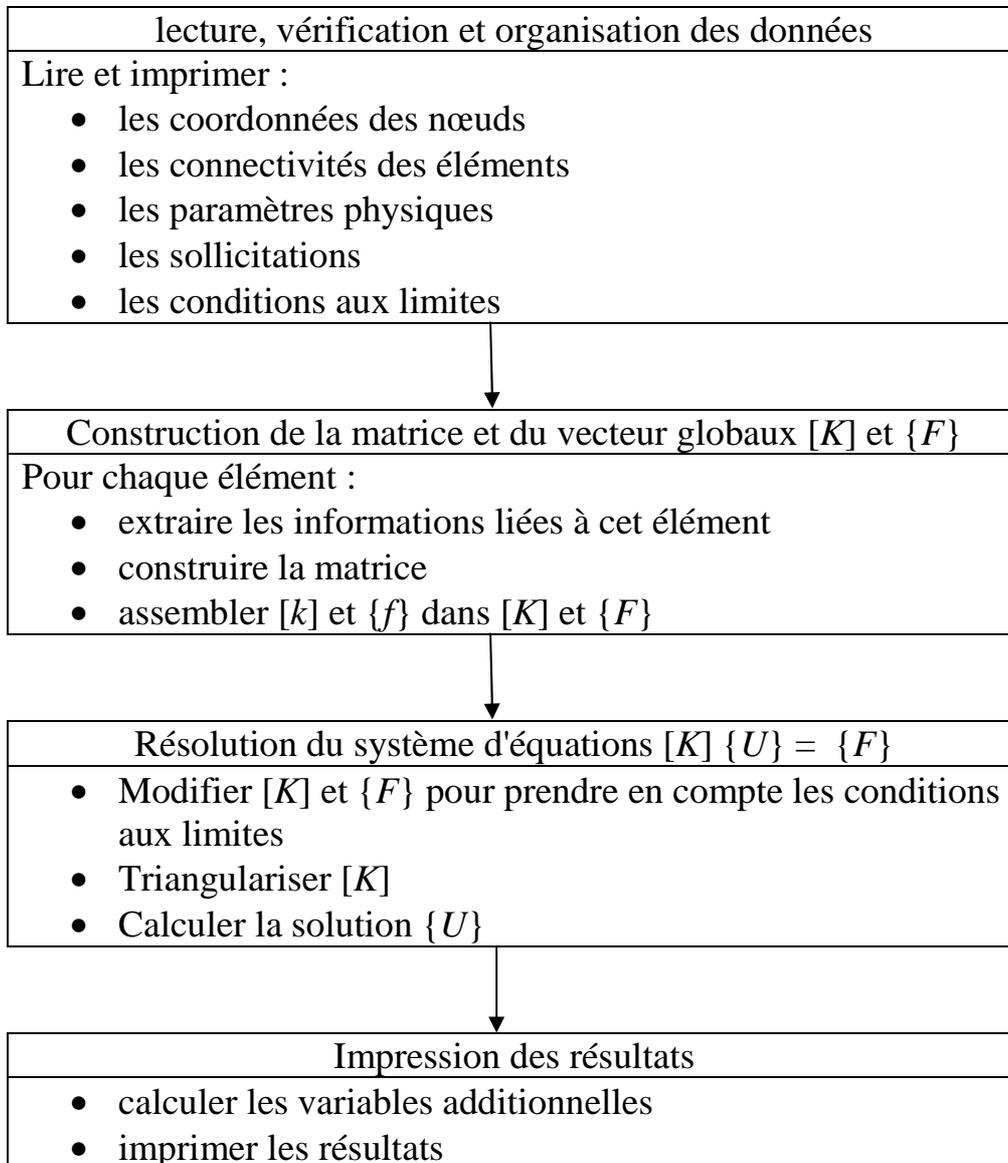
3.6.7. Etapes caractéristiques du programme de calcul :

Le programme de calcul est basé sur la méthode des éléments finis, donc inclut quelques blocs fonctionnels caractéristiques :

- a) lecture, vérification et organisation des données décrivant le maillage (nœuds et éléments), les paramètres physiques (élasticité, masse volumique, ...etc), les sollicitations et conditions aux limites;
- b) construction des matrices et vecteurs élémentaires, puis assemblage de ceux-ci pour former la matrice globale et le vecteur global des sollicitations;
- c) résolution du système d'équations après prises en compte des conditions aux limites;

- d) impression des résultats après calcul éventuel de variables additionnelles (gradients, contraintes, réactions, etc).

L'enchaînement de ces différents blocs est comme suit :



Chapitre 4

Résultats et discussion

Ce chapitre fait apparaître les résultats obtenus par l'application de la méthode des éléments finis pour simulation du cas d'un réservoir carré contenant un fluide compressible.

Les résultats numériques sont organisés sous forme de graphes dont on trouve schématisés :

- la forme du réservoir déformé pour différentes valeurs de la fréquence
- le potentielle de déplacement (domaine fluide)
- la valeur absolue du déplacement (domaine fluide)
- la variation du déplacement u_x suivant x (domaine fluide)
- la variation du déplacement u_y suivant y (domaine fluide)

D'après les résultats trouvés on peut tirer les constats suivants :

- La déformation des facettes latérales intérieures est identique pour la même fréquence. C'est-à-dire que la facette latérale intérieure droite déformée pour une fréquence de 5 Hz par exemple a la même forme que celle de gauche (figure 1 et figure 6).
- De même, la déformation des facettes latérales extérieures est identique pour la même fréquence. C'est-à-dire que la facette latérale extérieure droite déformée pour une fréquence de 5 Hz par exemple a la même forme que celle de gauche (figure 1 et figure 7).

- La déformation des parois verticales reste identique et prend la même forme, et ce pour une fréquence donnée (figure 22).
- Les parois latérales prennent une forme ondulée qui dépend directement de la fréquence de vibration. Pour les basses fréquences on aura des longueurs d'onde supérieures à ceux des cas des fréquences élevées. Donc de plus en plus la fréquence est grande, les ondes auront un nombre plus élevé mais avec des longueurs réduites (figure 22).
- La paroi supérieure se comporte de la même manière que les parois latérales mais à un degré moins. Donc elle aussi prend une forme ondulée qui se déforme de plus en plus que la fréquence augmente (figure 22).
- Pour les basses fréquences on remarque que le potentiel de déplacement varie sur tout le domaine du fluide. Les valeurs positives ou négatives de ce dernier sont au maximum, et ce près des parois déformées (figure 23).
- Pour les hautes fréquences on remarque que le potentiel de déplacement varie légèrement au milieu du réservoir, Par contre, il prend des valeurs positives ou négatives qui sont au maximum, et ce, près des parois déformées (figure 23).
- Pour les basses fréquences une grande partie du fluide se déplace en bloc, par contre en hautes fréquences juste la partie adjacente au réservoir qui influence et participe considérablement à l'interaction fluide structure. Donc on remarque clairement que le potentiel de déplacement varie au niveau d'une bande adjacente aux parois. De plus en plus la fréquence est haute, de plus en plus cette bande se rétrécit (figure 23 et figure 24).
- Pour une même fréquence, on remarque que la bande de variation du potentiel de déplacement adjacente aux parois verticales est supérieure à celle adjacente à la paroi supérieure, et ce dû au mode de vibration imposé et qui est horizontal (figure 23 et figure 25).
- Pour une même fréquence, on remarque aussi que la bande de variation du potentiel de déplacement suivant la direction x est nettement supérieure à celle de variation du potentiel suivant la direction y , et ce à cause du mode de vibration imposé et qui est horizontal (figure 25 et figure 26).
- La déformation des coins du réservoir est plus critique dans le domaine des hautes fréquences (figure 22).

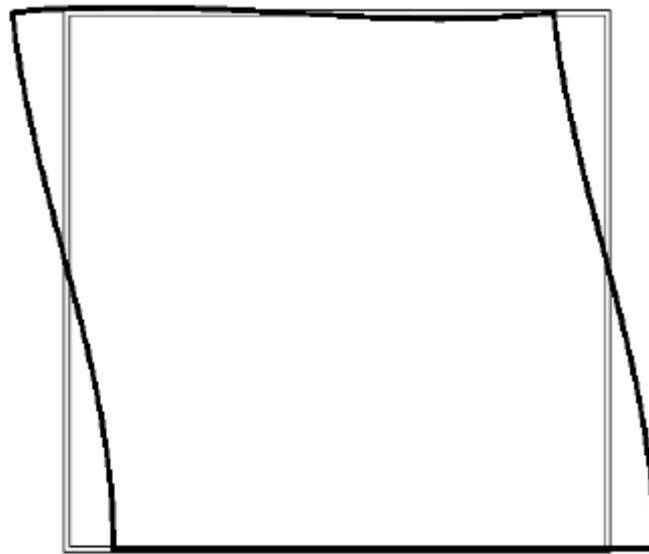


Figure 1 : La forme du réservoir déformé (fréquence 5Hz)

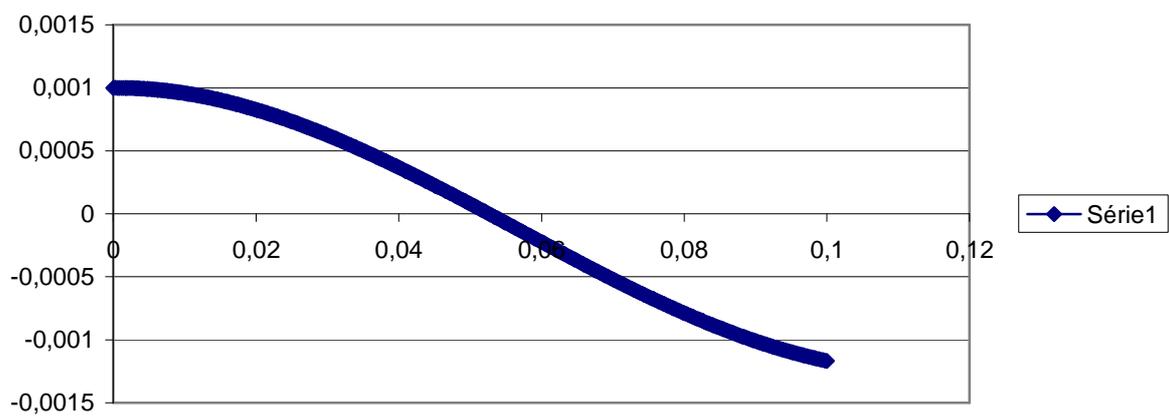


Figure 2 : Déformation de la facette latérale extérieure droite (U1A), fréquence 5Hz

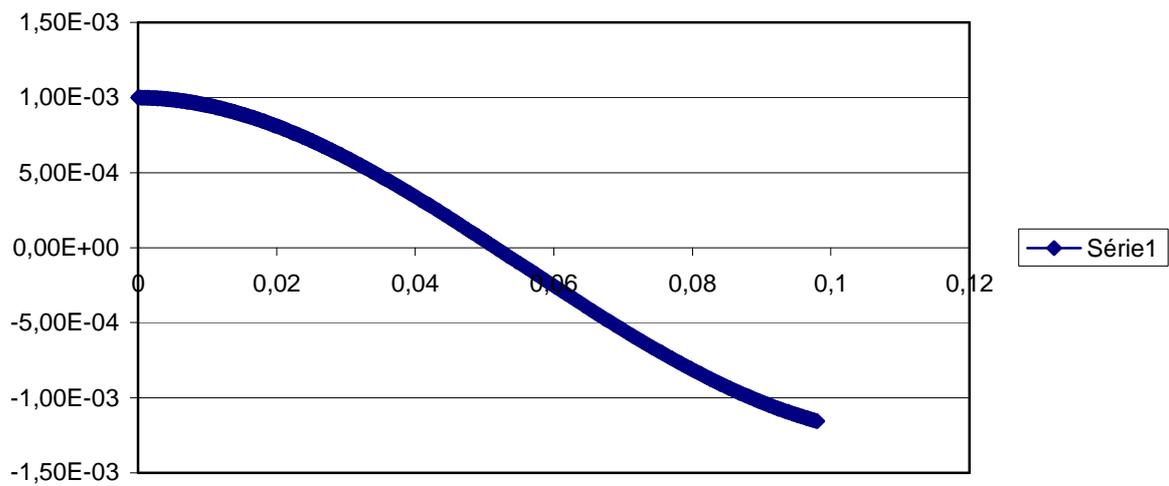


Figure 3 : Déformation de la facette latérale intérieure droite (U1B), fréquence 5Hz

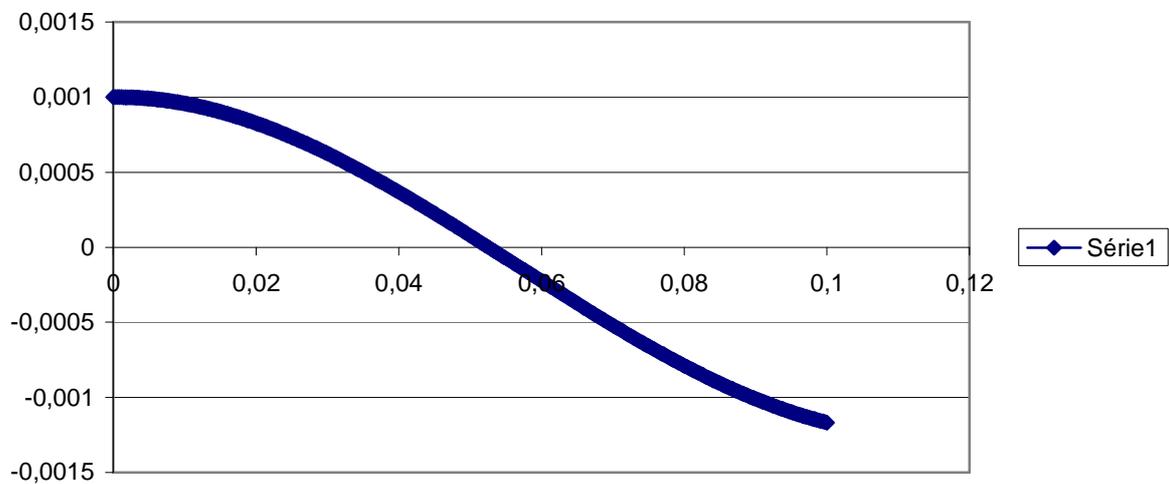


Figure 4 : Déformation de la facette latérale extérieure gauche (U3A), fréquence 5Hz

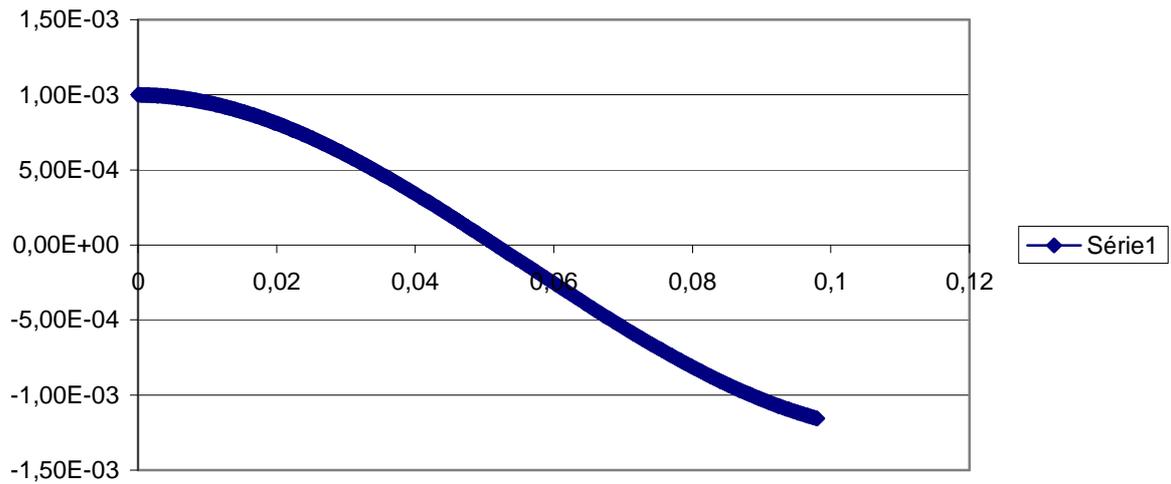


Figure 5 : Déformation de la facette latérale intérieure gauche (U3B), fréquence 5Hz

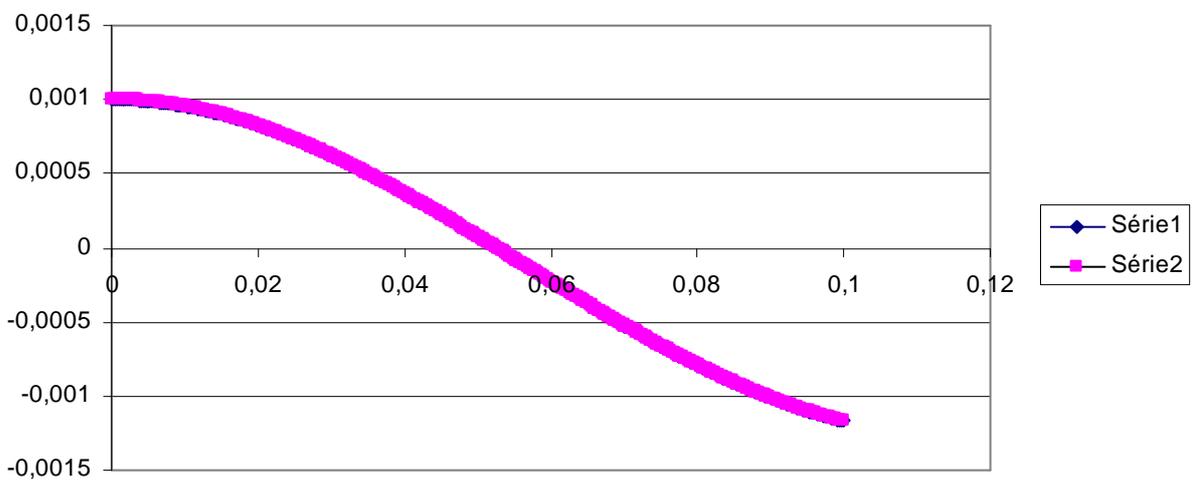


Figure 6 : Comparaison des déformations des facettes U1A et U3A (fréquence 5Hz)

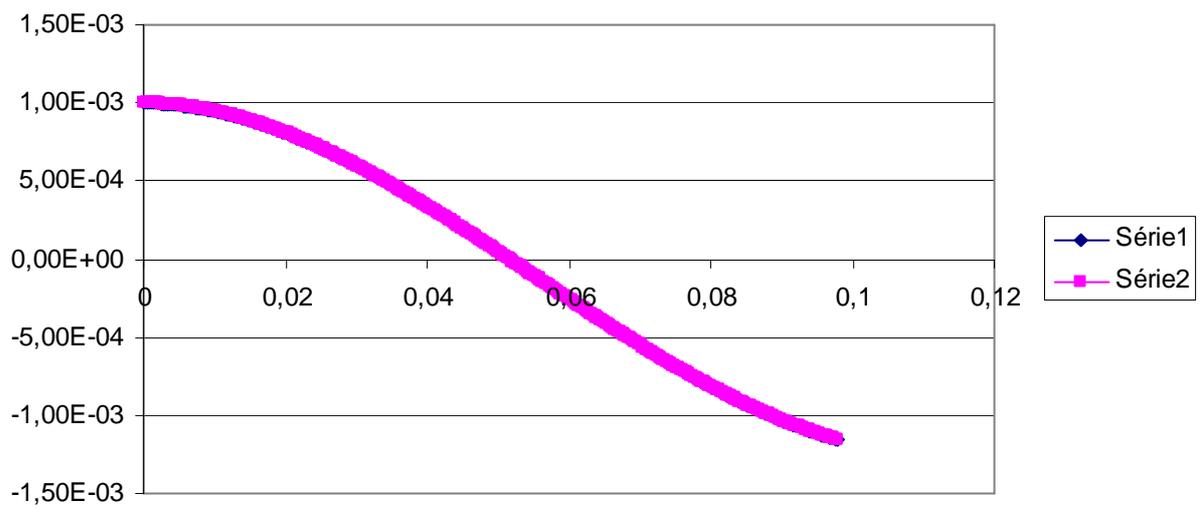


Figure 7 : Comparaison des Déformation des facettes U1B et U3B (fréquence 5Hz)

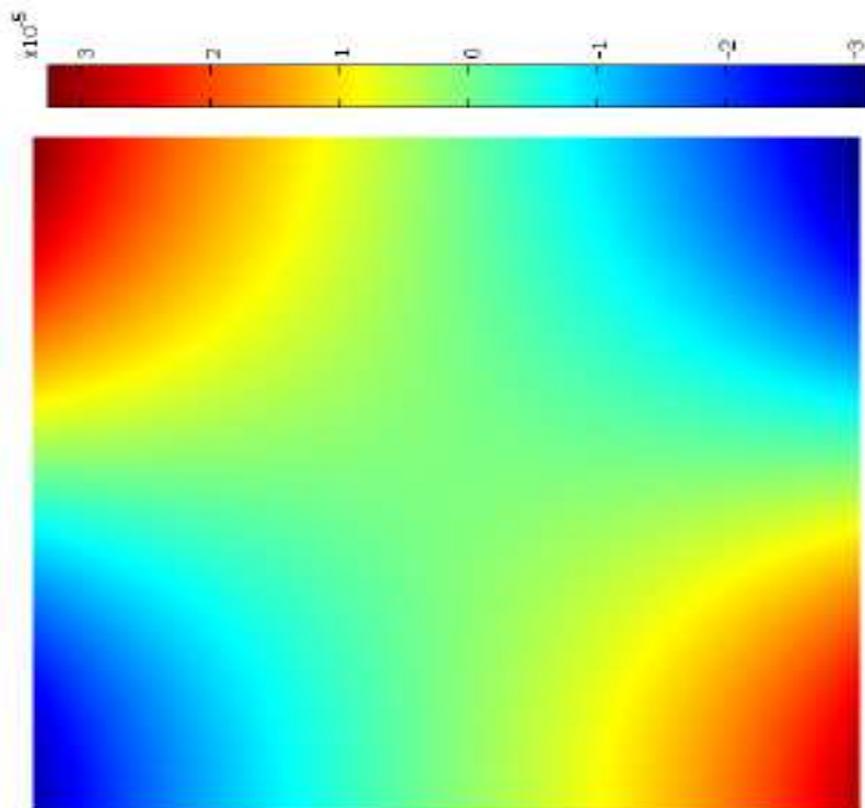


Figure 8 : Potentiel de déplacement φ (5Hz)

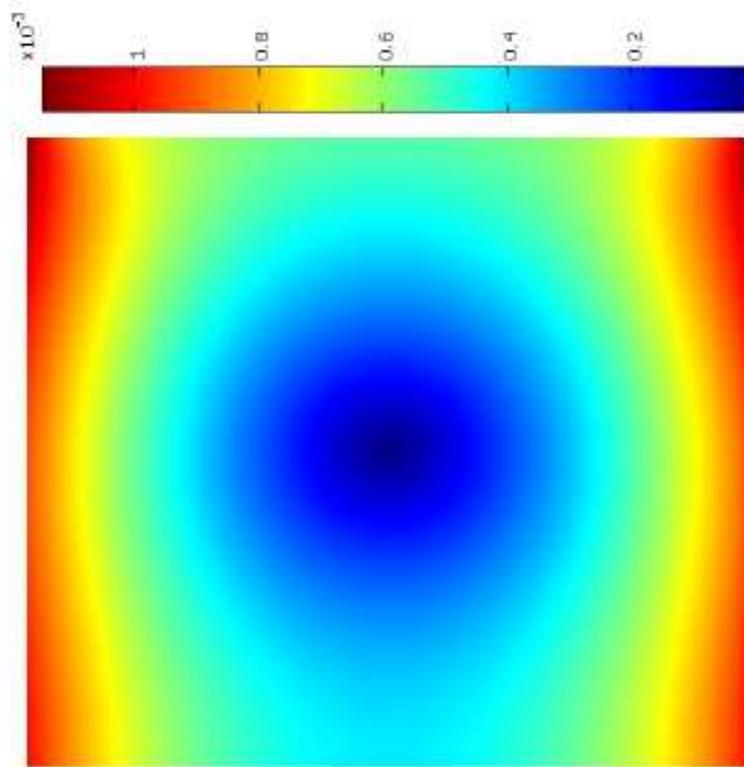


Figure 9 : valeur absolue du déplacement domaine fluide ($abs(u)=abs(grad \varphi)$), (5Hz)

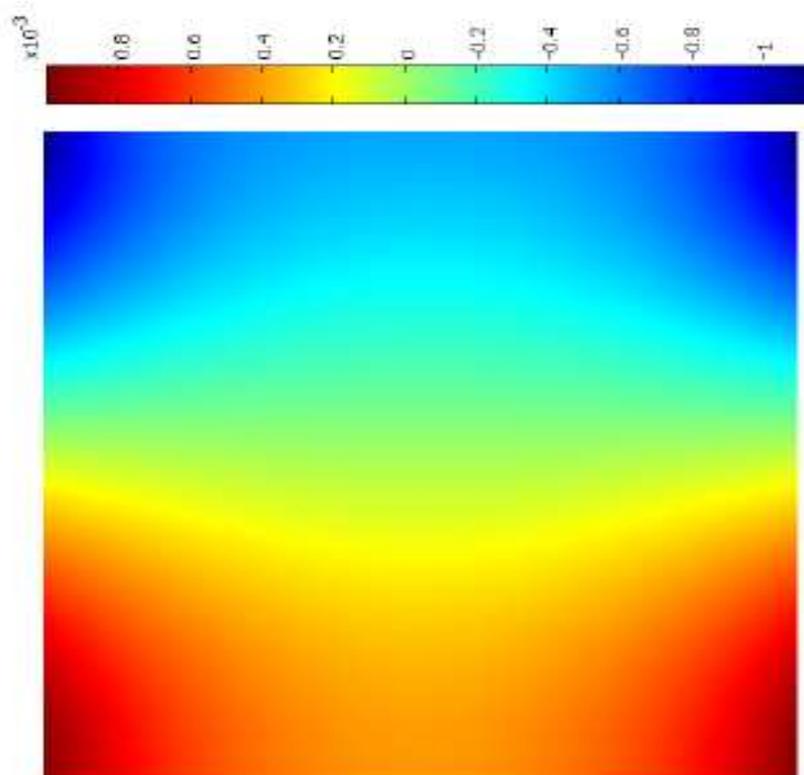


Figure 10 : déplacement du fluide suivant x ($u_x=\partial\varphi / \partial x=\varphi_{,x}$), fréquence 5 Hz

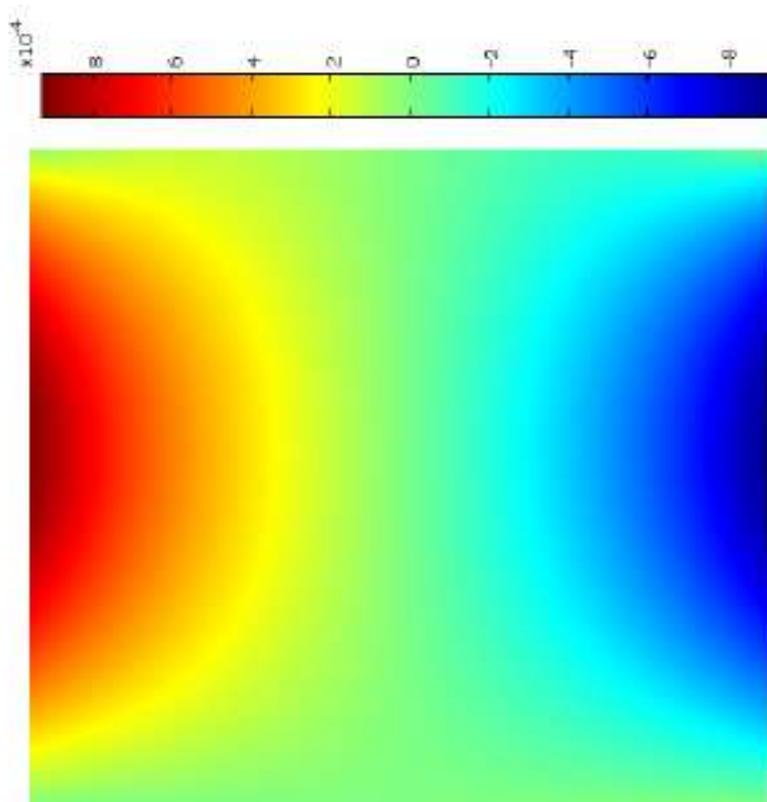


Figure 11: déplacement du fluide suivant y ($u_y = \partial\phi / \partial y = \phi_{,y}$), fréquence 5 Hz

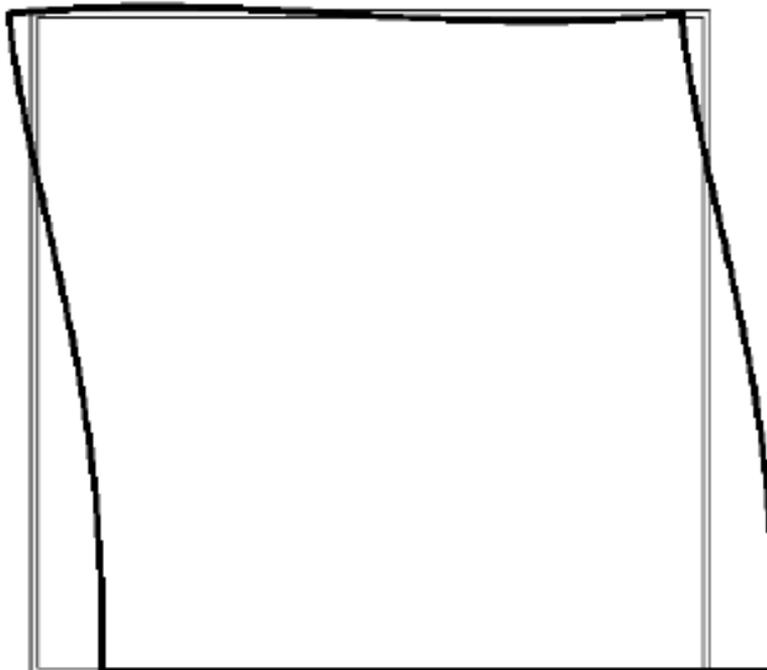


Figure 12 : La forme du réservoir déformé (fréquence 10Hz)

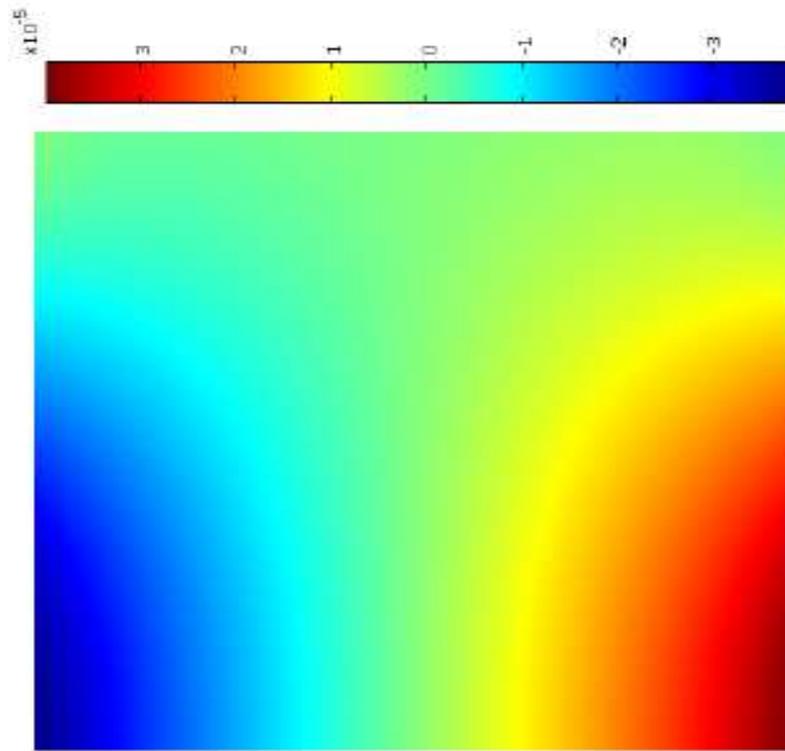


Figure 13 : Potentiel de déplacement φ (10Hz)

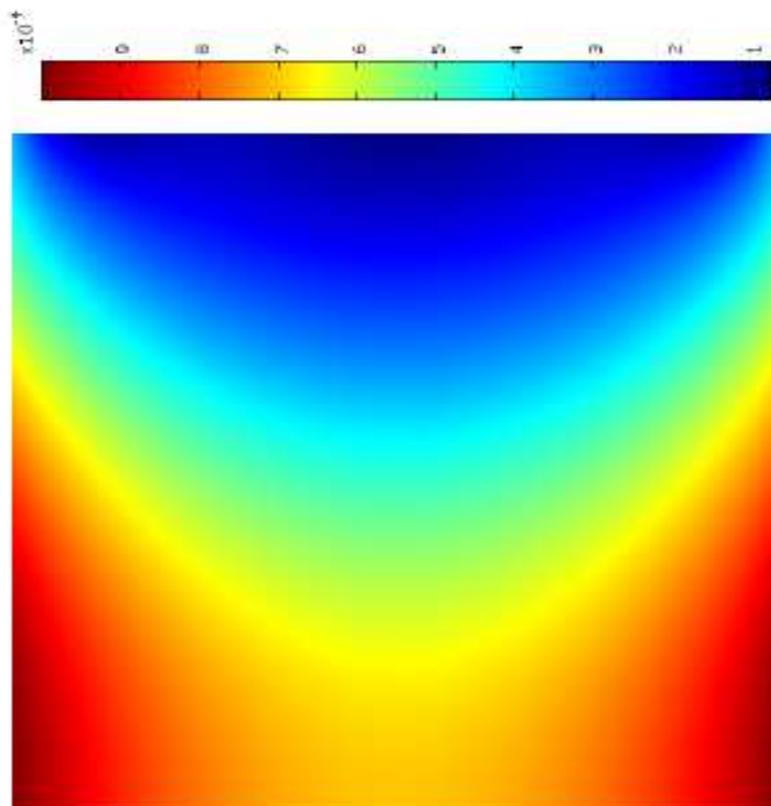


Figure 14 : valeur absolue du déplacement domaine fluide ($\text{abs}(u)=\text{abs}(\text{grad } \varphi)$), (10Hz)

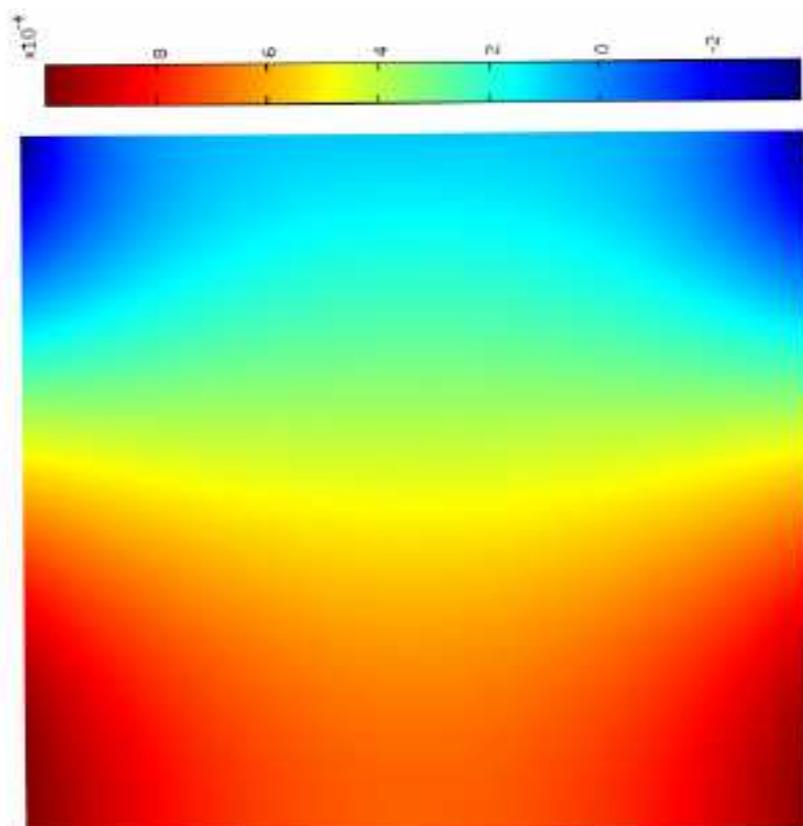


Figure 15 : déplacement du fluide suivant x ($u_x = \partial\varphi / \partial x = \varphi_{,x}$), fréquence 10 Hz

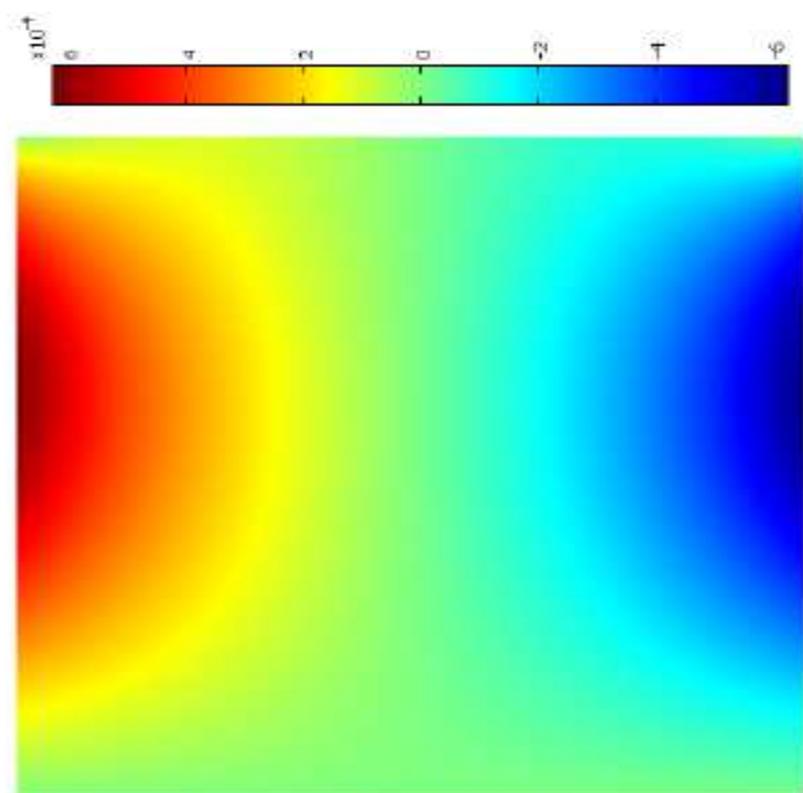


Figure 16: déplacement du fluide suivant y ($u_y = \partial\varphi / \partial y = \varphi_{,y}$), fréquence (10 Hz)

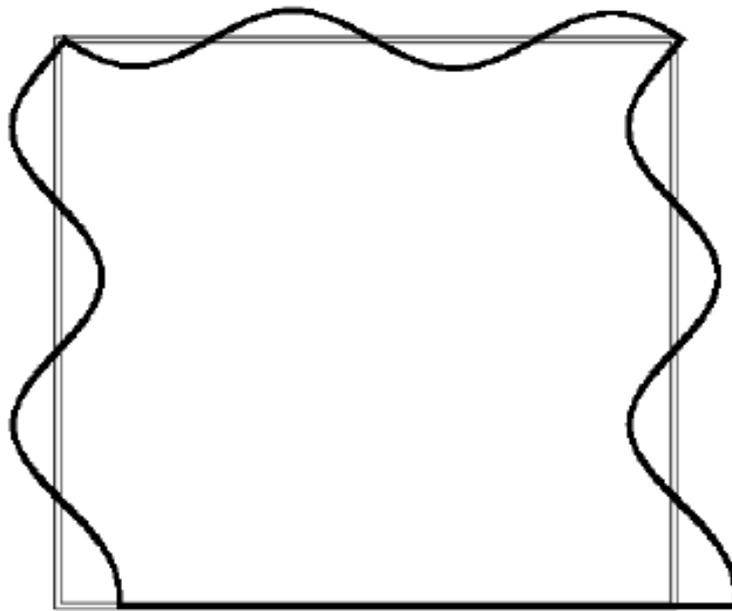


Figure 17 : La forme du réservoir déformé (fréquence 150Hz)

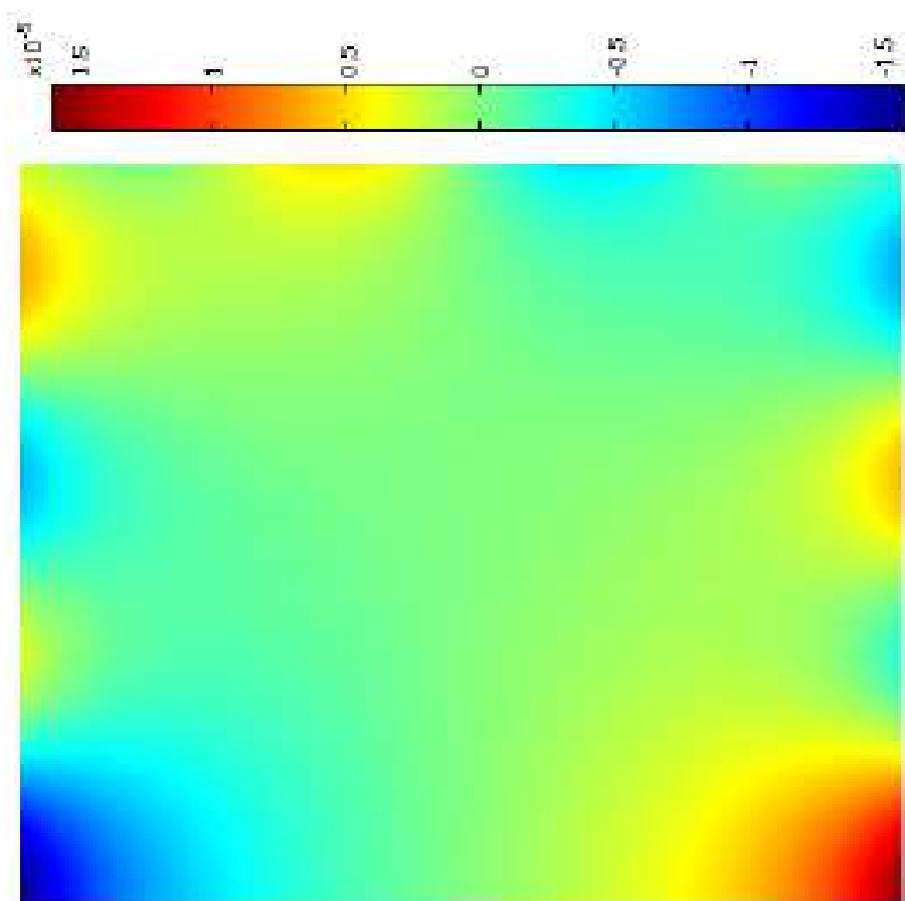


Figure 18 : Potentiel de Déplacement φ (150Hz)

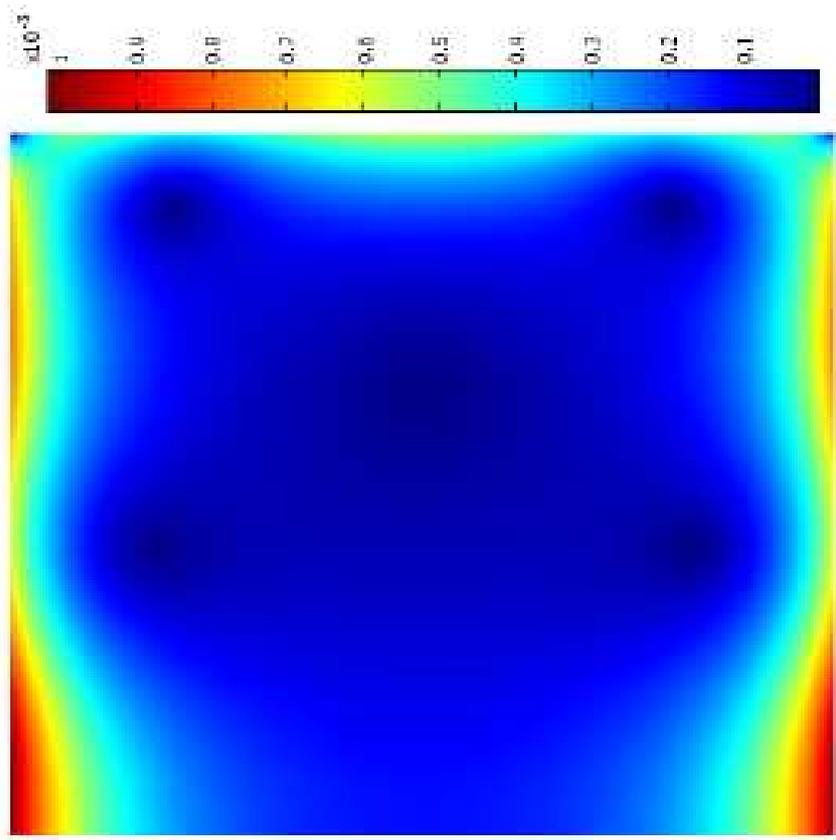


Figure 19 : valeur absolue du déplacement domaine fluide ($\text{abs}(u)=\text{abs}(\text{grad } \varphi)$), fréquence 150Hz

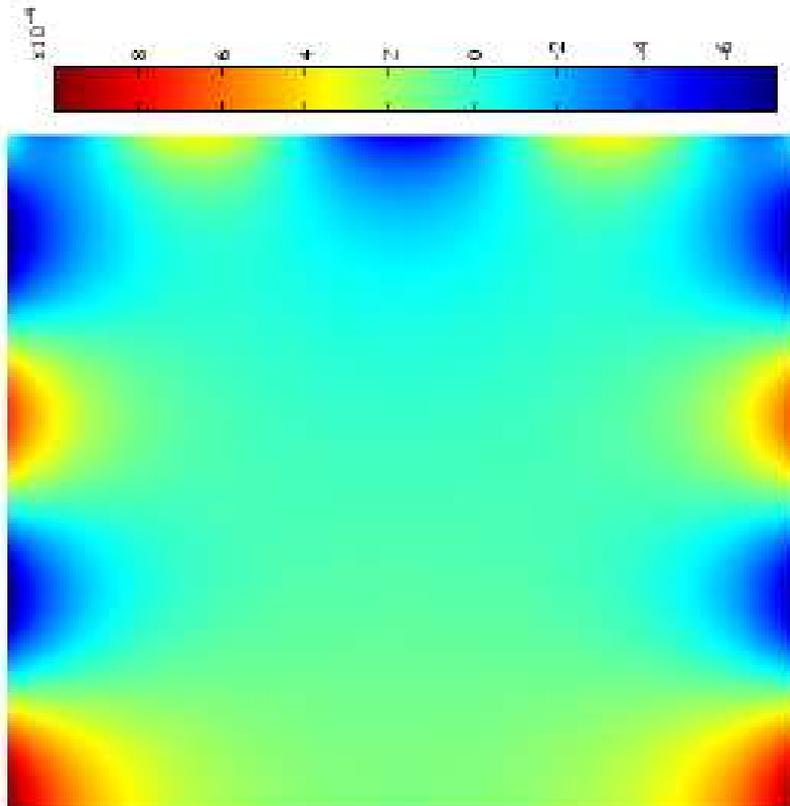


Figure 20 : déplacement du fluide suivant x ($u_x = \partial \varphi / \partial x = \varphi_{,x}$), fréquence 150Hz

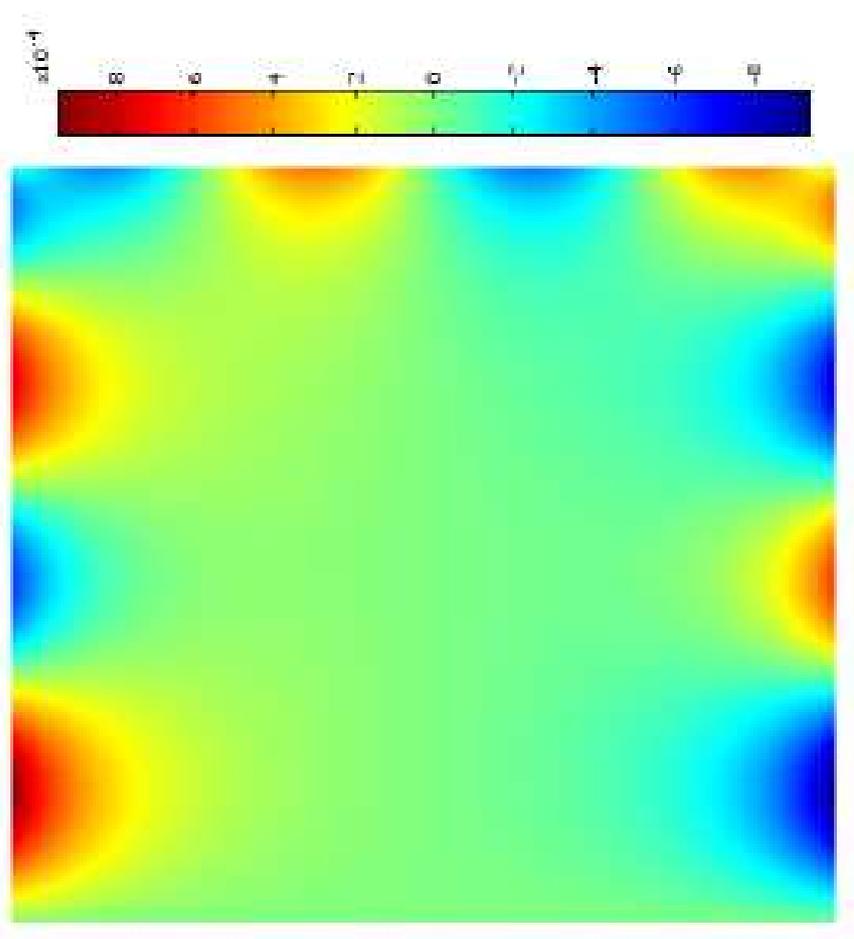


Figure 21 : déplacement du fluide suivant y ($u_y = \partial\phi / \partial y = \phi_{,y}$), fréquence 150Hz

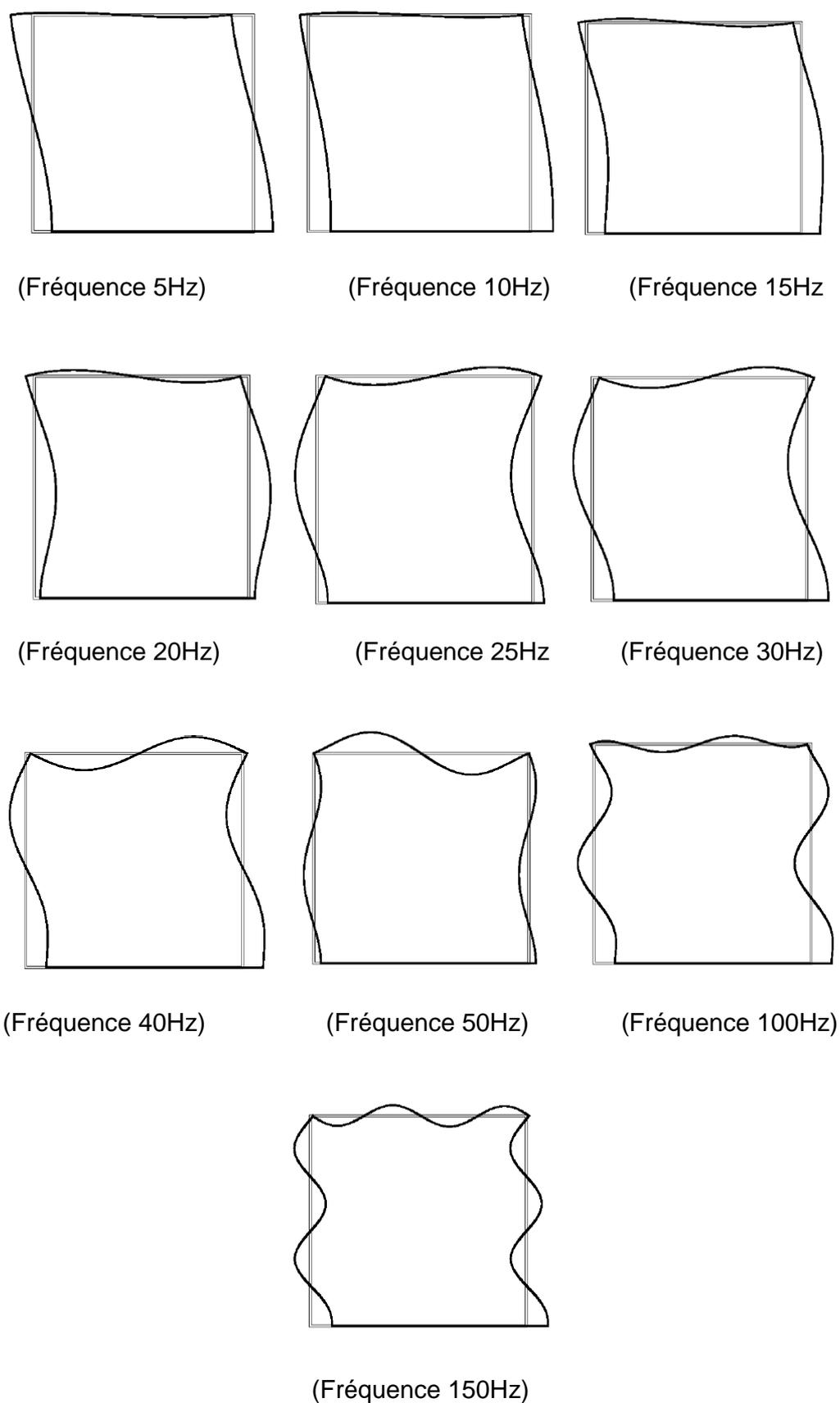


Figure 22 : La forme du réservoir déformé pour différentes valeurs de la fréquence

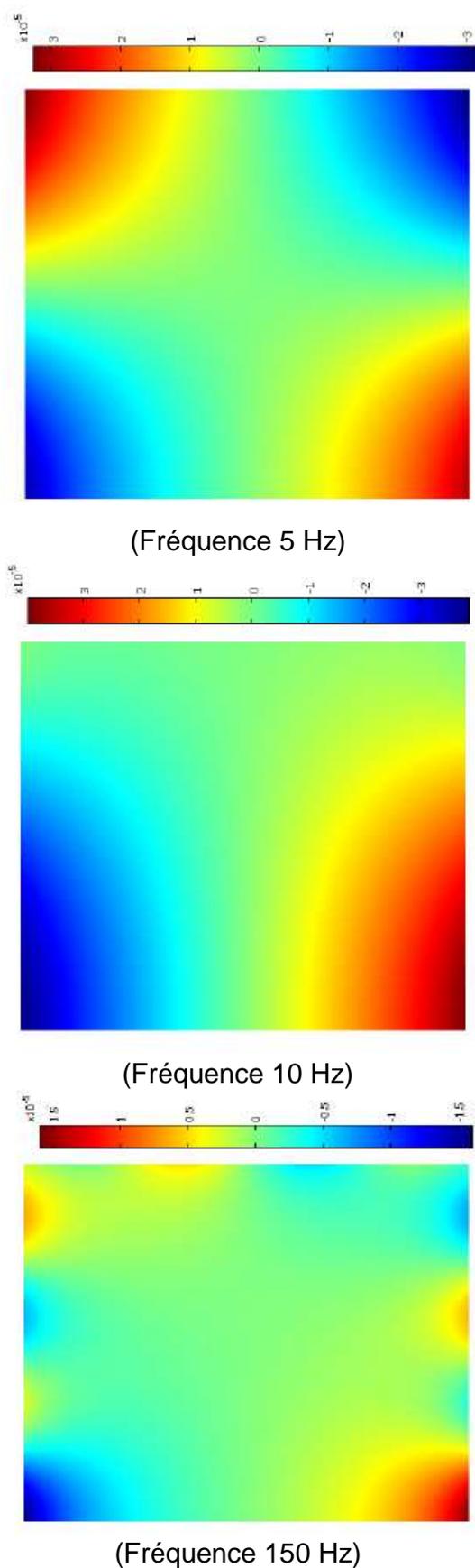


Figure 23 : Potentiel de déplacement φ pour différentes valeurs de la fréquence

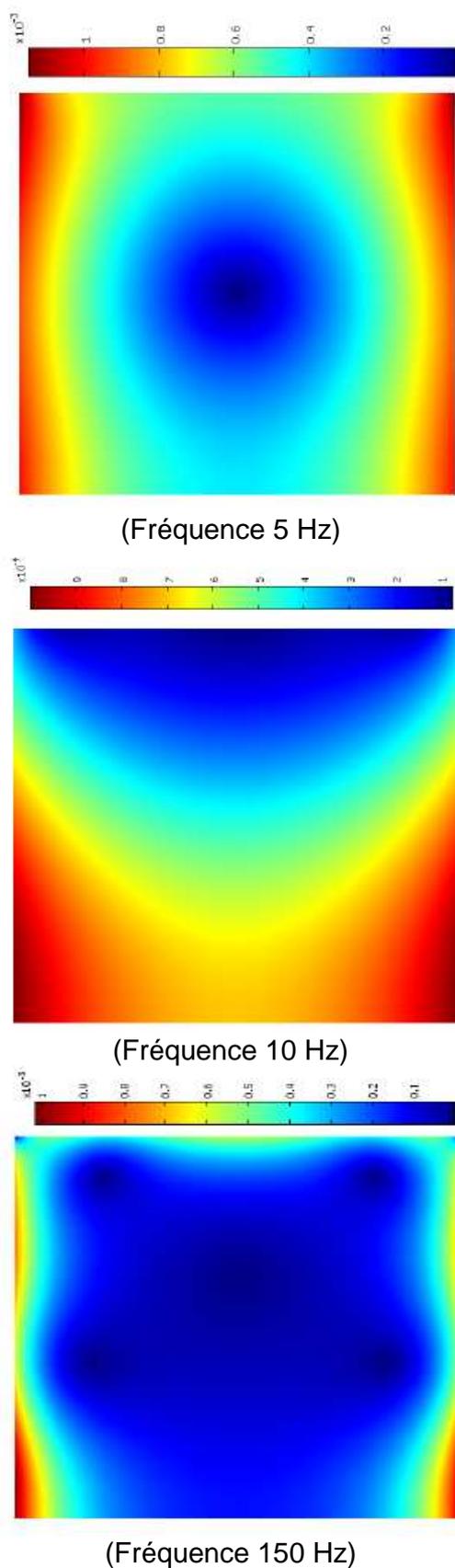
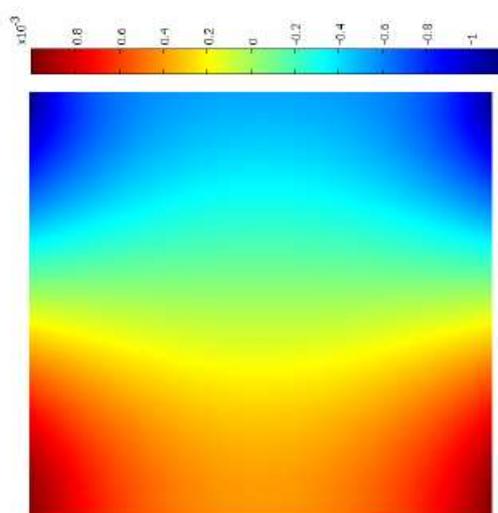
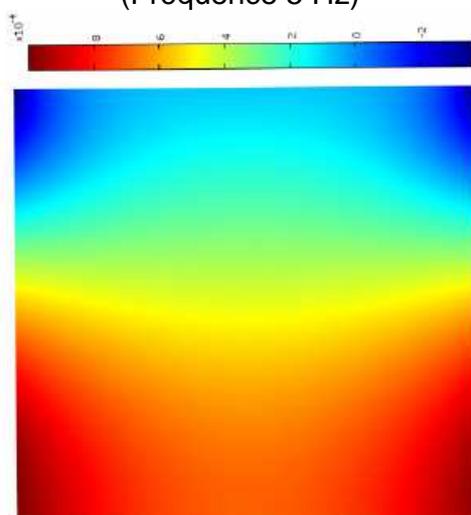


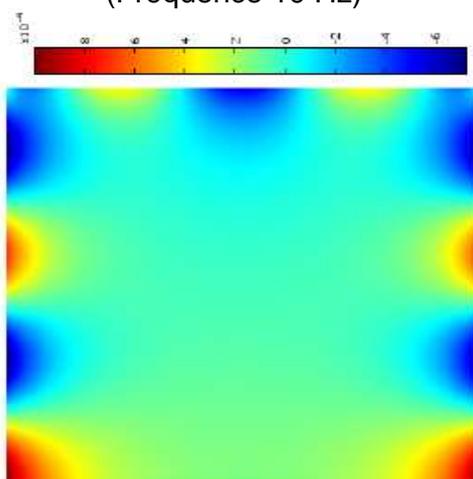
Figure 24 : valeur absolue du déplacement domaine fluide ($abs(u)=abs(grad \varphi)$) pour différentes valeurs de la fréquence



(Fréquence 5 Hz)



(Fréquence 10 Hz)



(Fréquence 150 Hz)

Figure 25 : déplacement du fluide suivant x ($u_x = \partial\varphi / \partial x = \varphi_{,x}$) pour différentes valeurs de la fréquence

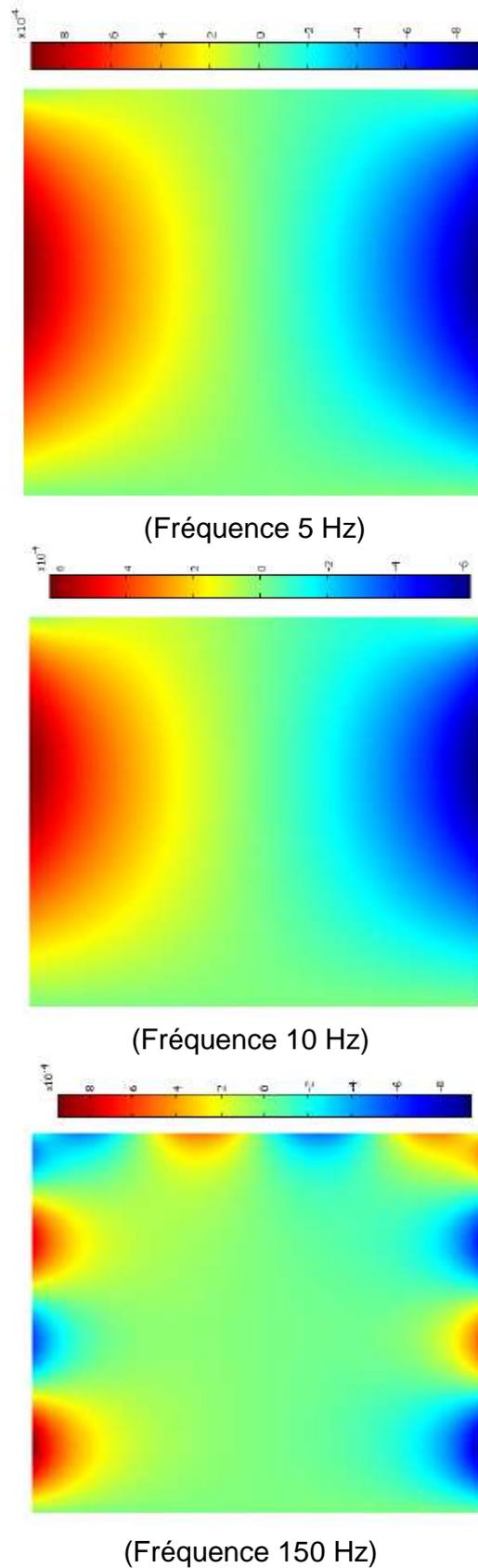


Figure 26 : déplacement du fluide suivant y ($u_y = \partial\phi / \partial y = \phi_{,y}$) pour différentes valeurs de la fréquence

Conclusion et perspectives

L'application de la méthode des éléments finis développée dans notre étude montre bien son efficacité, sa puissance et ses larges champs d'applications et surtout dans le domaine des interactions fluide-structure.

La présente étude développe les concepts pour la simulation numérique de la dynamique des interactions fluides-structures en vibration.

L'approche intègre toute la théorie pour l'analyse dynamique des interactions fluide-structure en vibration, état plan, et ce dans les cas suivant :

- Réservoir rigide plein ou partiellement rempli de liquide avec ou sans surface libre.
- Réservoir élastique plein ou partiellement rempli de liquide avec ou sans surface libre.
- Réservoir élastique comprenant un fluide compressible
- Réservoir rigide comprenant un fluide compressible

Une application à été réalisée pour le cas d'un réservoir élastique carré comprenant un fluide compressible.

Les résultats obtenus ont été déterminés moyennant un programme numérique exécuté sur ordinateur.

Les résultats trouvés apparaissent très logiques et donnent un aperçu sur le comportement d'un fluide compressible à l'intérieur d'un réservoir élastique. Ces résultats sont rarement trouvés dans la littérature.

Perspectives :

Dans le cadre des travaux futurs, en relation avec cet axe de recherche, et compte tenu des résultats mis en évidence à l'occasion de la présente recherche, aussi modeste soit elle, il nous paraît indispensable d'apporter des réponses claires aux questions suivantes liées au problème de vibration des systèmes fluides-réservoirs. Ces réponses constituent à notre avis le prolongement logique de ce qui a été traité dans ce travail :

- Validation des résultats trouvés par : la littérature, les logiciels ou les codes spécialisés, et ou l'expérimental.
- Etude paramétrique rigoureuse pour avoir des résultats aussi fiables que possible.
- Comparaison du comportement des réservoirs élastiques par rapport à ceux rigides.
- Comparaison de l'effet de la présence d'un fluide à l'intérieur d'un réservoir rigide avec un autre élastique.
- Application pour le cas d'un réservoir soumis à des contraintes initiales, par exemple contenant un gaz sous pression.
- Application pour les réservoirs partiellement remplis de liquide avec ou sans surface libre.
- Application pour différentes formes de réservoirs (flexible ou rigide), différent niveau de remplissage.
- Etude de l'influence de la variation de la rigidité des extrémités du réservoir.
- Etude de l'influence de la forme courbée des extrémités du réservoir.
- Etude de l'influence de la variation de l'épaisseur et épaisseur variable des parois des réservoirs.
- Etude de ballonnement dans le cas d'un réservoir contenant plusieurs fluides (vibration des colonnes de stratification).
- Extension de l'étude pour application au cas des séparateurs et ou condenseurs (interaction gaz-liquide-structure).
- Extension de l'étude pour analyser les phénomènes d'interaction fluide-structure-thermique).

التلخيص : وهذا العمل المخصصة لمحاكاة رقمية ديناميكية خزانات (جامدة أو مرنة) التي تحتوي على موائع (قابل أو غير قابل للانضغاط) ذو السطوح الحرة أم لا. وتتناول الدراسة حالة الانتقالات الصغيرة أو الاهتزاز التوافقية في مستوي. كتابة المعادلات التي تحكم الظواهر الفيزيائية ويتحقق ذلك باستخدام طريقة العناصر المحدودة Galerkin لحل مشكلة سواء السائل والصلب متزاوجان من خلال الشروط على الحدود. اختبار دراسة حالة وعاء مرن مستطيل الشكل يحتوي على مائع قابل للانضغاط (مرونة-صوتيات الاهتزاز). تم انجاز برنامج فورتران وضعت المحاكاة العددية للقضية والحصول على نتائج الاختبارات. المتغيرات المستخدمة للمكونات الصلبة مجال التحرك في اتجاه بعد سين وعين ، مقابل كمون الحركة التي اتسمت بها السائل. النتائج تبدو منطقية ومتسقة للغاية وتعطي فكرة عن سلوك مائع قابل للانضغاط داخل الخزان مرن في حالة اهتزاز وتشويهه لهذه لقيم مختلفة للتردد.

مفتاحية الكلمات : المحدودة العنصر، طريقة بقايا المرجح (Galerkin) ، مرونة-صوتيات الاهتزاز، تزاوج الموائع-الهياكل،

Résumé : Ce travail est consacré à la simulation numérique de la dynamique des réservoirs (rigides ou élastiques) contenant des fluides (compressibles ou incompressibles) et présentant des surfaces libre ou non. Notre étude concerne le cas des petits déplacements dit encore vibrations harmoniques à l'état plan. La discrétisation des équations régissant les phénomènes physiques est réalisée en se basant sur la méthode des éléments finis de Galerkin afin de résoudre le problème des deux milieux fluide et solide couplés par le biais des conditions aux frontières. Le cas test étudié est celui d'un réservoir élastique de forme rectangulaire contenant un fluide compressible (vibration élasto-acoustique). Un programme en Fortran a été dressé pour la simulation numérique du cas test et obtention des premiers résultats. Les variables utilisés pour le domaine solide sont les composante du champ de déplacement suivant x et suivant y, par contre ces le potentiel de déplacement qui a caractérisé le domaine fluide. Les résultats trouvés apparaissent très logiques, sont très cohérents et donnent un aperçu sur le comportement d'un fluide compressible à l'intérieur d'un réservoir élastique en vibration ainsi que la déformation de ce dernier pour différentes valeurs de la fréquence.

Mots clés: éléments finis, méthode des résidus pondérés (Galerkin), vibration élasto-acoustique, interaction fluide-structure

Abstract : This work is devoted to the numerical simulation of the dynamics of the tanks (rigid or elastic) containing of the fluids (compressible or incompressible) and having faces free or not. Our study relates to the case of small displacements still says harmonic vibrations at the plane state. The discretization of the equations governing the physical phenomena is carried out while being based on the finite element method of Galerkin in order to solve the problem of the two fluid and solid environments coupled by the means of the conditions with the borders. The case studied test is that of an elastic tank of rectangular form containing a compressible fluid (élasto-acoustics vibration). A Fortran program was drawn up for the numerical simulation of the case test and obtaining the first results. The variables used for the solid field are the component of the field of displacement following x and following y, on the other hand it is the potential of displacement which characterized the fluid field. The found results appear very logical, are very coherent and give an outline on the behavior of a compressible fluid inside an elastic tank in vibration as well as the deformation of the tank for various values of the frequency.

Keywords: finite elements, method of the balanced residues (Galerkin), élasto-acoustics vibration, fluid-structure interaction.

Bibliographie

Publications et rapports

1. Jacobsen, L.S., "Impulsive hydrodynamics of fluid inside a cylindrical tank and of fluid surrounding a cylindrical pipe", Bulletin Seism. Soc. America, Vol. 39, 1949, PP. 189-204.
2. Jacobsen, L.S., et AYRE, R.S "Cylindrical tanks subjected to transient motions.", Bulletin Seism. Soc. America, Vol. 41, 1951, PP. 313-346.
3. Baron, M.L., et skalak, R., "Free vibrations of fluid filled cylindrical shells, ", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 88, N° EM3, Proc, Paper, 3159, June 1962, PP. 17-43.
4. Housner, G.W., "The dynamic pressures on accelerated fluid containers.", Bulletin Seism. Soc. America, Vol 47, N°1, PP. 15-35.
5. Housner, G.W., "The dynamic behaviour of water tanks.", Bulletin Seism. Soc. America, Vol 53, N°1, 1963, PP. 381-387.
6. Edwards, N.N., "A procedure for dynamic analysis of thin walled cylindrical liquids storage tanks subjected to lateral ground motions.", Ph.D thesis, university of Michigan, Ann. Arbor, Michigan 1969.
7. Hsiung, H.H., et Nash, W.A., "Dynamic analysis of hydroelastic systems using the FEM.", Department of Civil Engineering, University of Southern, Californian Report USCCE , Nov. 1973.
8. Shaaban, S.H., et Nash, W.A., "Finite Element analysis of seismic exiting cylindrical storage tank, ground supported and partially filled with liquid.". University of Massachusetts, Report to National Science Foundation, August 1975.

9. Shaaban, S.H., et Nash, W.A., "Response of an empty cylindrical ground supported liquid storage tank to base excitation". University of Massachusetts science foundation, august 1975.
10. Edwarss, N,W., "A procedure for dynamic analysis of thin walled cylindrical liquid storage tank subjected to lateral ground motions " Ph.D. Thesis University of Michigan. Ann Arbor. Michigan 1969.
11. Yang, J.Y., "Dynamic behaviour of fluid-tank system, " Ph.D. Thesis, University Houston, Texas, 1976.
12. Mouzakis, WU, C.I., T., Nash, W.A., et colonel, J.M., "Natural frequencies of cylindrical liquid storage containers.", Department of Civil Engineering, University of Massachusetts, June 1975.
13. Balendra, T., et Nash, W.A., "Earthquake analysis of cylindrical liquid storage tank with a dome by F.E.M.", Department of Civil Engineering, University of Massachusetts, Amherst, Massachusetts, may 1978.
14. Veletsos, A.S., "Seism effects in flexible liquid storage tanks", Proceedings of the international Association of Earthquake Engineering, Fifth World Conference, Rome, Italie, 1974, Vol.1, PP. 630-639.
15. Veletsos, A.S., et Yang, J.Y., "Earthquake response of liquid storage tanks", Advances in Civil Engineering Mechanics Proceedings of the Annal EMD Speciality Conferences, NC., ASCE, 1977, PP. 1-24.
16. Kana, D.D., et Dodge, F.T., "Design support modelling of liquid slosh in storage tanks subject to seismic excitation", Proc. ASCE Conf. Struct. Des. Nucl. Plant Facilities, PP. 307 – 337.
17. Haroun, M.A., et Housner, G.W., "Seismic design of liquid storage tanks", Journal of technical Councils, ASCE, Vol. 107, N°TCI, April 1981, PP. 191-207.
18. Balendra, T., et al. 'Seismic design of flexible cylindrical storage tanks', J. Earthq. Engrg. Strut. Dyn., Vol. 10, , 1982, PP. 477-496.
19. Kennedy, J.M., et Belytschko, T., "A survey of computational methods of fluid structure analysis of reaction safety", Nuclear Engineering, Dec. 69, (1982), PP. 379-398.
20. Haroun, M.A., et Housner, G.W., "Dynamic characteristics of liquid storage tanks", Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 108, N° EM5, 1982, PP. 783-800.

21. Djemili A., Zeghib N. et Chaoui K., "Calcul de l'écoulement transitoire laminaire d'un fluide viscoélastique dans une conduite en matériau élastique par une méthode mixte", Laboratoire de Recherche en mécanique des matériaux et maintenance industrielle (LR3MI), Département de Génie Mécanique, Faculté des sciences de l'ingénieur, Université de Annaba.
22. Damodar M. et Sriman K. B., "A parametric study on fluid-structure interaction problems", Journal of sound and vibration, July 2002.
23. Santanu M. et Sinhamahapatra K.P., "Coupled slosh dynamics of liquid filled containers using pressure based finite element method", ICEER, Mars 2005.
24. Subbash B. S. et Bhattacharyya S.K., "Finite element analysis of fluid-structure interaction effect on liquid retaining structures due to sloshing", Elsevier Science Ltd , 1996.
25. Koyama K. et al. "Dynamic earth pressures acting on LNG in ground storage tank during earthquakes", Proc. Of the 10th World Conf. on Earth. Eng., Vol. 9, 1992, PP. 5005-5010.
26. Kim J. K. et Koh H. M. "Dynamic response of rectangular flexible fluid container", J. Mech. Engng. ASCE 122, 1996, PP. 807-817.
27. Young-sun C. et Chung-bang Y. "Sloshing characteristics in rectangular tanks with a submerged block", Elsevier Science Ltd , 1996.
28. Praveen K. K. Malhotra , "New method for isolation of liquid storage tanks", Earth. Eng. And Struct. Dyn. Vol. 26, 1997, PP. 839-847.
29. TILOUINE B. et SEGHIR A., "Fluid-structure models for dynamic interaction studies of dam-reservoir systems", Proceeding of XI ECEE, 1988.
30. Mikam T. et Yoshimura J. "Free vibrations o submerged floating cylindrical shells", Proceedings of the Tenth World Conference on earthquake Engineering, Vol. 9, July 1992, PP. 5025-5029.

Livres :

31. Henri J.P. et Ohayon R. "Interactions fluides-structures", recherches en mathématiques appliquées, RMA P.G. CIARLET & J.-L. LIONS series editors, MASSON, 1992.
32. Dhatt G. et TOUZOT G. "Une présentation de la méthode des éléments finis", deuxième édition, collection université de Compiègne, 1984.
33. Smith I.M. et Griffiths D.V. "Programming finite element method", second edition, JOHN WILEY & SONS Ltd, 1988.
34. Candel S. "Mécanique des fluides –cours", 2^{ème} édition, DUNOD, 1990.
35. A.H. Stroud, " Approximate calculation of multiple integrals, Prentice Hall, 1971.

Thèses et mémoires de fin d'études

36. Ouafek T. et Bendjenna F. "Simulation Numérique des écoulements paraboliques bidimensionnels axisymétriques turbulents avec ou sans l'effet de chaleur ", mémoire d'ingénieur d'état en génie mécanique option énergétique, Département de génie mécanique, université de Constantine, 1994.
37. Drid M. M. et Khulidi H. "Simulation numérique des écoulements laminaires par la méthode des éléments finis", mémoire d'ingénieur d'état en génie mécanique option énergétique, Département de génie mécanique et électronique, université de Ouargla, 2005.
38. Hakimi L. "Analyse par éléments finis des vibrations des réservoirs flexibles partiellement remplis de liquide", Thèse de magister, département de génie civil, école nationale polytechnique.
39. Djemili A. "Contribution à l'étude de l'écoulement instationnaire d'un fluide non newtonien dans une conduite en matériau élastique ou viscoélastique", thèse de doctorat d'état en génie mécanique option énergétique, Département de génie mécanique, Université Annaba, 2007.

Sommaire

Introduction	1
1. Historique et intérêt	1
2. Revue bibliographique	3
3. Objectif de la présente étude	5
4. Plan de l'étude	6
Chapitre 1 : Formulation mathématique des interactions	
Fluides-structures	7
1.1. Vibrations des structures élastiques	7
1.1.1. Equations de l'élastodynamique	8
1.1.2. Formulation variationnelle de la réponse à des forces données	8
1.2. Equations linéarisées des petits mouvements de fluides parfaits.....	10
1.2.1. Equations dynamiques linéarisées	11
1.2.2. Potentiel des déplacements φ	14
1.2.3. Equations générales en (p, φ)	15
1.3. Modes de ballonnement	16
1.3.1. Réponse harmonique à un déplacement de paroi u_n	16
1.3.2. Formulation variationnelle en φ des modes de ballonnement ...	18
1.3.3. Analyse modale de la réponse vibratoire du liquide	18
1.4. Vibrations hydroélastiques en présence de gravité	19
1.4.1. Structure soumise à un champ de pression et à la gravité	19
1.4.2. Formulation dissymétrique en (u, φ)	24
1.5. Vibrations élasto-acoustiques	25
1.5.1. Formulation variationnelle dissymétrique en (u, p)	25
Chapitre 2 : Méthode des éléments finis	27
2-1-Introduction à la méthode des éléments finis.....	27
2.1.1. Généralités	27
2.1.2. Evolutions de la méthode	28
2.1.3. Etat actuel	29
2.2. Approximation par éléments finis	30
2.2.1. La méthode d'approximation nodale	30

2.2.2. De l'approximation nodale à l'approximation par éléments finis	30
2.2.3. Exemple d'approximation linéaire à deux dimensions par éléments finis	31
2.2.4. Définition de la géométrie des éléments	32
2.2.4.1. Nœuds géométriques	32
2.2.4.2. Forme d'éléments classiques	32
2.2.4.3. Eléments de référence	33
2.2.4.4. Formes d'éléments de référence classiques	35
2.2.5. Approximation sur un élément de référence	36
2.2.5.1. Expression de la fonction approchée $u(x)$	36
2.2.6. Construction des fonctions $N(\zeta)$ et $\bar{N}(\zeta)$	36
2.2.6.1. Méthode générale de construction	37
2.2.6.1.a) Choix de la base polynomiale	37
2.2.6.1.b) Relations entre variables généralisées et variables nodales	38
2.2.6.1.c) Expressions des fonctions N et \bar{N}	39
2.2.6.1.d) Dérivation de la fonction $u(\zeta)$	39
2.2.6.1.e) Résumé des opérations de construction de $\langle N \rangle$	39
2.2.6.2. Construction des fonctions $N(\xi)$ d'un élément triangulaire linéaire à 3 nœuds	40
2.2.7. Transformation des opérateurs de dérivation	41
2.2.7.1. Généralités	41
2.2.7.2. Dérivées premières	42
2.2.7.2.a) Expression de $[j] = [J]^{-1}$	43
2.2.7.2.b) Calcul des termes de $[J]$	44
2.2.7.2.c) Transformation d'une intégrale	44
2.2.7.3. Dérivées secondes	45
2.2.7.3.a) Calcul de $[T_1]$	46
2.2.7.3.b) Calcul de $[T_2]$ et $[C_1]$	46
2.2.7.3.c) Fonctions $N(\xi)$ et $\partial N/\partial \xi$ d'un élément triangulaire linéaire à 3 nœuds	47
Chapitre 3 : Discrétisation et intégration numérique	48
3.1. Vibrations des structures élastiques	48
3.1.1. Cas de la structure libre ($\Sigma=\emptyset$)	48
3.1.2. Cas d'une structure fixée sur Σ	49
3.1.3. Réponse harmonique à des forces	49
3.2. Discrétisation pour l'analyse modale de la réponse vibratoire du liquide	50
3.3. Discrétisation des vibrations hydroélastique en présence de gravité	50
3.3.1. Formulation dissymétrique en (u, φ)	50

3.4. Discrétisation des vibrations élasto-acoustiques	52
3.4.1. Formulation dissymétrique en (u,p)	52
3.5. Application - vibrations élasto-acoustiques -	53
3.5.1. Modélisation mathématique	53
3.5.1.a) Domaine fluide	53
3.5.1.b) Domaine solide	54
3.5.1.c) Les conditions à l'interface	55
3.5.2. Problème étudié	55
3.6. Intégration numérique	56
3.6.1. Intégration numérique	56
3.6.1.1. Intégration numérique à une dimension par la méthode de Gauss	57
3.6.1.2. Intégration numérique à deux dimensions.....	57
3.6.1.3. Méthode directe de Gauss pour l'intégration numérique sur l'élément de référence triangulaire	58
3.6.2. Formulation par la méthode des résidus pondérés	58
3.6.3. Formulation par la méthode de Galerkin	59
3.6.4. Système d'équations final	60
3.6.5. Résolution du système d'équations linéaires.....	61
3.6.6. Organisation du calcul des matrices élémentaires par intégration numérique	61
3.6.7. Etapes caractéristiques du programme de calcul	63
Chapitre 4 : Résultats et Discussion	65
Conclusion et perspectives	82
Bibliographie	84
Nomenclature	88