



**UNIVERSITÉ KASDI MERBAH  
OUARGLA**

N° d'ordre :  
N° de série :

**Faculté des sciences et de la technologie et  
sciences de la matière**

**DEPARTEMENT DE :  
MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE**

**MÉMOIRE**

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de **MAGISTÈR**

**Spécialité : Mathématiques**

**Option : Mathématiques Appliquées**

**Par : Laiadi Abdelkader**

**Thème**

**Effet de la tension de surface sur des  
écoulements au dessus des obstacles**

**Soutenu publiquement le : 24/06/2012**

Devant le jury composé de:

<b>Prof Chacha Djamel</b>	Université Kasdi Merbah - <b>Ouargla</b>	<b>Président</b>
<b>Dr Merzougui Abdelkrim</b>	Université Mohamed.B – M'sila	<b>Rapporteur</b>
<b>Dr Meflah Mabrouk</b>	Université Kasdi Merbah - <b>Ouargla</b>	<b>Co-rapporteur</b>
<b>Prof Benterki Djamel</b>	Université Ferhat Abbas -Sétif	<b>Examineur</b>
<b>Dr Said Mohamed Said</b>	Université Kasdi Merbah - <b>Ouargla</b>	<b>Examineur</b>

# *Remerciements*

*Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur Merzougui Abdelkrim d'avoir proposer et encadrer ce travail de recherche.*

*Sa disponibilité, sa confiance, ses conseils et ses encouragements m'ont été d'un précieux secours dans la réalisation de ce travail. Je suis heureux de lui exprimer ma profonde gratitude, mes vifs et sincères remerciements.*

*Monsieur Chacha Djamel me fait un grand honneur en acceptant de présider ce jury. Je tiens à le remercier vivement.*

*Je suis très honoré que Monsieur Meflah Mabrouk a accepté de rapporter ce travail.*

*Je suis très heureux de remercier aussi Monsieur Benterki Djamel qui n'a pas hésité d'être membre du jury.*

*Je remercie vivement Monsieur Said Mohamed Said qui a accepté d'être membre du jury. Ces remarques pertinentes m'ont souvent éclairé dans ce travail.*

*Je tiens aussi à remercier toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.*

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>4</b>
<b>1 Notions préliminaires sur la mécanique des fluides</b>	<b>6</b>
1.1 Introduction . . . . .	7
1.2 Description lagrangienne . . . . .	7
1.2.1 Vitesse et accélération . . . . .	8
1.3 Description eulérienne . . . . .	8
1.4 Définitions . . . . .	9
1.4.1 Fluide incompressible . . . . .	9
1.4.2 Les trajectoires . . . . .	9
1.4.3 Lignes de courant . . . . .	10
1.4.4 Écoulement irrotationnel et potentiel de vitesse . . . . .	11
1.4.5 Écoulement stationnaire . . . . .	11
1.4.6 Écoulement uniforme . . . . .	12
1.4.7 Débit volumique et débit massique . . . . .	12
1.5 Fonction de courant dans le cas d'un écoulement plan . . . . .	12
1.6 Fonction potentielle complexe . . . . .	13
1.7 Équations du mouvement . . . . .	14
1.7.1 Loi de la conservation de la masse . . . . .	14
1.7.2 Équation de Navier-Stokes . . . . .	15
1.7.3 Cas particulier, équation d'Euler . . . . .	16

1.7.4	Équation de Bernoulli . . . . .	17
1.8	Analyse dimensionnelle . . . . .	18
1.8.1	Théorème pi de Vaschy-Buckingham . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Problème d'un écoulement au dessus d'une marche sans tension de surface et sans effet de gravité</b>	<b>20</b>
2.1	Position du problème . . . . .	21
2.2	Méthode des lignes de courant libres . . . . .	24
2.3	Transformation de Schwarz-Christoffel . . . . .	25
2.4	Solution exacte . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Problème d'un écoulement au dessus d'une marche avec tension de surface et sans effet de gravité</b>	<b>32</b>
3.1	Introduction . . . . .	33
3.2	Formulation générale du problème . . . . .	33
3.3	Procédure numérique . . . . .	38
3.4	Comportement local de la vitesse au voisinage des singularités . . . . .	41
3.4.1	Comportement asymptotique au voisinage de $t = e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1}$	42
3.4.2	Comportement asymptotique au voisinage de $t = e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1}$	43
3.4.3	Comportement asymptotique au voisinage de $t = 1$ . . . . .	45
3.5	Formulation de la série . . . . .	46
3.6	Forme de la surface libre . . . . .	49
3.7	Résultats et discussion . . . . .	50
3.7.1	Solution sans tension de surface . . . . .	50
3.7.2	Solution avec tension de surface . . . . .	52
<b>4</b>	<b>Problème d'un écoulement au dessus d'un rectangle sans tension de surface et avec effet de gravité</b>	<b>57</b>
4.1	Introduction . . . . .	58

4.2	Formulation générale du problème . . . . .	58
4.3	Procédure numérique . . . . .	62
4.4	Comportement local de la vitesse au voisinage des singularités . . . . .	65
4.4.1	Comportement asymptotique au voisinage de $t = t_A$ . . . . .	65
4.4.2	Comportement asymptotique au voisinage de $t = t_B$ . . . . .	66
4.4.3	Comportement asymptotique au voisinage de $t = t_C$ . . . . .	68
4.4.4	Comportement asymptotique au voisinage de $t = t_D$ . . . . .	69
4.5	Formulation de la série . . . . .	70
4.6	Forme de la surface libre . . . . .	73
4.7	Résultats et discussion . . . . .	74
4.7.1	Conclusion . . . . .	75
	<b>Annexe</b>	<b>81</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>94</b>

# Introduction générale

Les problèmes d'écoulements à surfaces libres se trouvent dans beaucoup d'applications de la science. Ils peuvent être définies comme des problèmes dont les formulations mathématiques comportant des surfaces ( surfaces libres), qui doivent être trouvées comme faisant partie de la solution. Citons comme exemples de problèmes à surfaces libres : problèmes qui traitent les vagues de la mer, les bulles montantes dans un liquide, les écoulements au dessus des obstacles. Dans ces exemples la surface libre est la surface de la mer, l'interface entre gaz et liquide respectivement. Dans notre mémoire, nous restreindrons aux problèmes de la mécanique des fluides. De nombreux résultats ont été obtenus pour le cas des écoulements à surfaces libres, bidimensionnels et stationnaires. Dans le présent travail, on se propose d'étudier un écoulement à surface libre au dessus d'un obstacle. L'écoulement est supposé potentiel, bidimensionnel et irrotationnel, le plan des variables  $(x, y)$  de l'écoulement peut être identifié au plan de la variable complexe  $z = x + iy$ . En négligeant les tensions de surface et les forces de gravité, on peut trouver la solution exacte en utilisant la transformation conforme d'hodographe dû à *Kirchhoff* (1869) ou la transformation *Schwarz-Christoffel*. Si l'effet des forces de gravité ou bien les tensions de surface sont pris en considération, le problème ne peut être résolu exactement. Pour résoudre le problème, deux approches peuvent être utilisées. On cherche une solution asymptotique en considérant les paramètres du problème (le nombre du *Froude*  $F$  et le nombre du *Weber*  $\alpha$  si les forces de gravité et les tensions de surface sont non nulles) ou bien on résoud le problème numériquement.

Notre travail est composé de quatre chapitres et annexe.

Dans le premier chapitre, on donne des notions sur les deux modes de description : la description lagrangienne et la description eulérienne et quelques définitions préliminaires sur la théorie des écoulements potentiels et les équations générales du mouvement des fluides. On présente aussi dans ce chapitre, la théorie de l'analyse non dimensionnelle qui est un outil fondamental à la modélisation des problèmes de la mécanique des fluides dont l'objectif principal est de :

1. Rendre les variables et les paramètres du modèle mathématique obtenu sans dimensions physiques.

2. Réduire le nombre des paramètres du problème.

Dans le chapitre 2, on traite le problème dans le cas où la tension de surface est négligée. Dans ce cas, la solution exacte peut être calculée explicitement en utilisant la transformation de *Schwarz-Christoffel*.

Dans le chapitre 3, on étudie le même problème posé dans le deuxième chapitre, en tenant compte de l'effet de la tension de surface, la solution exacte du problème ne peut être calculée explicitement à cause du terme non linéaire figurant dans la condition au bord (équation de *Bernoulli* ). Une méthode numérique est alors adoptée. La solution est caractérisée par le nombre de *Weber*  $\alpha$ . En utilisant la méthode de troncation de la série introduite par *Vanden-Broeck et Keller* [15], qui consiste à discrétiser uniquement la surface libre. Par cette méthode on a pu déterminer avec précision la nature de singularité du vecteur vitesse aux points de contacts. On a pu déterminer la solution pour chaque valeur du nombre de *Weber*  $\alpha \geq 2.10^{-9}$ .

Lorsque  $\alpha \rightarrow \infty$ , la forme de la surface libre coïncide avec celle trouvée paramétriquement dans le chapitre 2, et l'angle de séparation  $\gamma$  est égal à 3.1415901 avec une erreur de  $2.54.10^{-6}$ , ce qui signifie que le fluide quitte la marche tangentiellement. Pour les autres valeurs de  $\alpha$ , ( $\alpha \neq \infty$ ,  $\alpha \neq 0$ ) on trouve :  $3.1415 \leq \gamma \leq 6.2616$ .

Dans le chapitre 4, on présente une étude sur un écoulement au dessus d'un rectangle, en tenant compte de l'effet de gravité et en négligeant les effets de la tension de surface, l'écoulement est alors caractérisé par le nombre de *Froude*  $F$ . En utilisant la méthode de troncation des séries introduite dans le chapitre 3, la solution du problème est trouvée numériquement pour différentes valeurs du nombre de *Froude*  $F$  ( cas supercritique pour  $F > 1$  et le cas subcritique pour  $F < 1$ ).

Dans l'annexe, on présente la méthode et l'algorithme de *Newton* pour la résolution d'un système d'équations non linéaires, suivi par le programme écrit en fortran utilisé pour la résolution du problème posé dans le troisième chapitre.

# Chapitre 1

## Notions préliminaires sur la mécanique des fluides

### Résumé :

Dans ce chapitre, on présente quelques définitions et notions préliminaires concernant les écoulements potentiels, bidimensionnels et les équations générales du mouvement des fluides.

### Contenu :

- 1.1 Introduction
- 1.2 Description lagrangienne
- 1.3 Description eulérienne
- 1.4 Définitions
- 1.5 Fonction de courant dans le cas d'un écoulement plan
- 1.6 Fonction potentielle complexe
- 1.7 Équations du mouvement
- 1.8 Analyse dimensionnelle

## 1.1 Introduction

Les équations qui régissent le mouvement d'un fluide sont complexes et des solutions analytiques ne pourront être trouvées que dans certaines situations simples. Certaines hypothèses sur le comportement et les propriétés physiques du fluide sont faites pour simplifier les équations de mouvement. Les équations les plus simples de l'écoulement sont obtenues si on considère un fluide parfait où tout effet de viscosité et les effets thermodynamique sont négligés.

## 1.2 Description lagrangienne

Cette méthode consiste à étudier les différentes quantités ( masse volumique  $\rho$ , température  $T$ , pression  $P$ ... etc ) pour chaque particule individuellement, lors de son mouvement.

Dans la description lagrangienne, on décrit le mouvement par les trajectoires des particules d'identités déterminées. On rappelle que la trajectoire est le lieu géométrique des positions de la particule au cours du temps. L'identité d'une particule est donnée par sa position initiale  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ . La description du mouvement est donc de déterminer le vecteur position  $\vec{x}(M_0, t)$  à tout instant  $t$  pour toutes les particules du fluide

$$\vec{x} = \vec{x}(M_0, t) \quad \text{où} \quad \vec{x} = \vec{x}(x_0, y_0, z_0, t)$$

c'est-à-dire

$$x_i = x_i(x_0, y_0, z_0, t)$$

## 1.2.1 Vitesse et accélération

### Vitesse

Pour une particule fluide donné, i.e., pour  $\vec{p}$  fixé, la vitesse est donnée par :

$$\vec{v}(\vec{p}, t) = \left. \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \right|_{\vec{p}}$$

soit, en notation tensorielle :

$$v_i(p_j, t) = \left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{p_j}$$

### Accélération

Pour une particule fluide donné, i.e., pour  $\vec{p}$  fixé, l'accélération est donnée par :

$$\vec{\gamma}(\vec{p}, t) = \left. \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right|_{\vec{p}}$$

soit, en notation tensorielle :

$$\gamma_i(p_j, t) = \left. \frac{\partial v_i}{\partial t} \right|_{p_j}$$

## 1.3 Description eulérienne

La méthode *d'Euler* consiste à décrire l'écoulement en donnant les composantes du vecteur vitesse et autres quantités physiques en chaque point de l'espace, i.e., on fixe un point dans l'espace et on remarque les variations des quantités liées aux particules du fluide passant par ce point.

- A l'instant  $t_1$ , on détermine en  $M$  une particule  $P_1$  de vitesse  $\vec{v}$  et d'autres caractéristiques physiques  $K$ .

- A l'instant  $t_2 = t_1 + dt$ , on trouve au même point  $M$  de l'espace, une autre particule  $P_2$  de vitesse et des caractéristiques physiques différentes.

Donc, on a en  $M$  et à l'instant  $t_1$

$$\vec{v} = \vec{v}(P_1, t_1) = \vec{v}(x, y, z, t_1)$$

et

$$K = K(P_1, t_1) = K(x, y, z, t_1)$$

et à l'instant  $t_2$ , on a en même point  $M$

$$\vec{v} = \vec{v}(P_2, t_2) = \vec{v}(x, y, z, t_2)$$

$$K = K(P_2, t_2) = K(x, y, z, t_2)$$

## 1.4 Définitions

### 1.4.1 Fluide incompressible

**Définition :** on dira qu'un écoulement se comporte comme celui d'un incompressible si le volume  $\delta\tau$  de chaque particule fluide ne varie pas au cours du mouvement. On obtient ainsi tout de suite :

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$

**Remarque :** A priori cette relation impose seulement  $\rho = \text{const}$  sur chaque trajectoire mais pas forcément d'une trajectoire à l'autre.

### 1.4.2 Les trajectoires

On appelle trajectoire de la particule, l'ensemble des positions occupées par la particule au cours du temps.

1. La description de *Lagrange* donne directement la trajectoire, en effet :

$$x = \varphi(X, t)$$

est l'équation paramétrée par  $t$  de la trajectoire de la particule identifiée par  $X$ .

2. Si le mouvement est décrit par la méthode *d'Euler* la connaissance des trajectoires revient à la description de *Lagrange* selon la méthode d'équivalence. Les trajectoires sont alors solution du système différentiel :

$$\frac{dx}{dt} = v$$

alors :

$$\frac{dx_1}{dv_1} = \frac{dx_2}{dv_2} = \frac{dx_3}{dv_3} = dt$$

### 1.4.3 Lignes de courant

**Définition :** La description eulérienne conduit elle aussi à une représentation du champ de vitesse, à un instant  $t$ , sous la forme d'une famille de lignes tangentes en chaque point au vecteur vitesse, que l'on appelle lignes de courant. L'équation des lignes de courant se déduit directement de cette définition en écrivant que : Un petit déplacement  $d\vec{x}$  sur la ligne de courant est colinéaire au vecteur vitesse :

$$\vec{v} \wedge d\vec{x} = 0 \quad \text{soit} \quad \varepsilon_{jk} v_j dx_k = 0$$

En explicitant cette relation, on obtient :

$$\begin{cases} v_2 dx_3 - v_3 dx_2 = 0 \\ v_3 dx_1 - v_1 dx_3 = 0 \\ v_1 dx_2 - v_2 dx_1 = 0 \end{cases}$$

Les lignes de courant sont donc les intégrales du système différentiel :

$$\frac{dx_1}{v_1(\vec{x}, t)} = \frac{dx_2}{v_2(\vec{x}, t)} = \frac{dx_3}{v_3(\vec{x}, t)}$$

Dans lequel  $t$  à la valeur fixée. Les lignes de courant ne peuvent pas se couper.

#### 1.4.4 Écoulement irrotationnel et potentiel de vitesse

Un écoulement est dit irrotationnel si

$$\overrightarrow{Rot} \vec{V} = 0$$

en tout point du fluide, où  $\overrightarrow{Rot} \vec{V}$  représente le vecteur rotation ou vorticité.

Toute particule se déforme autour d'un déplacement élémentaire de translation. Il en résulte que le vecteur vitesse est en tout point perpendiculaire à la surface équipotentielle en ce point et que les lignes de courant sont orthogonales aux surfaces équipotentielles qu'elles traversent.

Nous rappelons qu'un champ vectoriel  $\vec{V}(x, y)$  dont le rotationnel est nul peut être toujours représentée par le gradient d'une fonction scalaire, c.à.d qu'il existe une fonction  $\varphi(x, y)$  telle que :

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$$

$\varphi$  représente le potentiel de vitesse.

Dû à l'existence d'une fonction potentielle, les écoulements irrotationnels sont dit écoulements potentiels.

#### 1.4.5 Écoulement stationnaire

On appelle écoulement stationnaire ou encore écoulement permanent, un écoulement dont toutes les caractéristiques quantitatives sont indépendantes du temps, en particulier pour la vitesse  $\partial v(x_1, x_2, x_3, t) / \partial t = 0$ . Cela signifie simplement que les lignes de courant

n'évoluent pas au cours du temps. Il est facile de voir que dans un écoulement stationnaire les lignes de courant sont les mêmes que les trajectoires.

### 1.4.6 Écoulement uniforme

On appelle écoulement uniforme si les composantes de vitesse sont indépendantes des coordonnées d'espace, sinon il est non-uniforme.

### 1.4.7 Débit volumique et débit massique

1. Soit  $S$  une surface fixe dans un domaine du fluide en mouvement. On suppose  $S$  est orientable et  $n$  est sa normale unitaire en un point  $N$  de  $S$ . On appelle débit volumique ( ou flux du vecteur vitesse ) à travers la surface  $S$  le scalaire  $Q_v$  défini par :

$$Q_v = \int_S v(N, t) \cdot n ds ; N \in S$$

2. On appelle débit massique ( ou flux de la quantité du mouvement ) à travers la surface  $S$  le scalaire  $Q_m$  défini par :

$$Q_m = \int \rho(N, t) v(N, t) \cdot n ds ; N \in S$$

où  $\rho$  est la masse volumique du fluide.

## 1.5 Fonction de courant dans le cas d'un écoulement plan

Dans un domaine  $D$ , on appelle écoulement plan ( ou bidimensionnel ) si en tout point de ce domaine, à l'instant  $t$ , le vecteur vitesse  $\vec{V}$  est parallèle à un plan donné ( $p$ ).

Ecrivons  $\text{div}(\vec{v}) = 0$  :

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0 \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{\partial v}{\partial x_2}$$

Cela implique que la forme différentielle  $udx_2 - vdx_1$  est, à  $t$  fixé, la différentielle totale d'une certaine fonction  $\psi$  :

$$\exists \psi(x_1, x_2, t) \text{ , } d\psi = udx_2 - vdx_1$$

On a donc immédiatement :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \text{ , } v = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$$

$\psi$  s'appelle la fonction de courant, car elle permet un calcul simple des lignes de courant.

les lignes  $\psi(x_1, x_2, t) = C(t)$  sont les lignes de courant

## 1.6 Fonction potentielle complexe

Soit un écoulement plan incompressible, irrotationnel d'un fluide parfait. Les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  sont reliées dans le domaine de l'écoulement par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \end{aligned}$$

Si, en plus, ces deux quantités sont continues, ces relations sont dites de *Cauchy-Riemann*.

Si les dérivées deuxième des fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  existent et continues, on a :

$$\Delta\varphi = \Delta\psi = 0$$

Les lignes  $\varphi = \text{const}$  et  $\psi = \text{const}$  constituent des familles orthogonales.

La vitesse complexe est donnée par :

$$W(z) = \frac{df}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + i\frac{\partial\psi}{\partial x_2} = u - iv$$

## 1.7 Équations du mouvement

### 1.7.1 Loi de la conservation de la masse

La masse de fluide contenue dans  $D$  à l'instant  $t$  vaut :

$$m(t) = \iiint_D \rho(\vec{x}, t) d\tau$$

Si elle varie de  $dm$  entre  $t$  et  $t + dt$  on aura :

$$\begin{aligned} dm &= \frac{dm}{dt} dt \\ &= \frac{d}{dt} \left( \iiint_D \rho(\vec{x}, t) d\tau \right) dt \\ &= \left( \iiint_D \frac{\partial\rho}{\partial t}(\vec{x}, t) d\tau \right) dt \end{aligned}$$

En autre part on a :

$$dm = \left( -\oint \rho \vec{v} \cdot \vec{N} dS \right) dt$$

On déduit alors :

$$\begin{aligned} \iiint_D \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau &= -\oint \oint \rho \vec{v} \cdot \vec{N} dS \\ &= -\iiint_D \operatorname{div}(\rho \vec{v}) d\tau \end{aligned}$$

Et ainsi :  $\iiint_D \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right) d\tau = 0$ , est une relation vraie pour tout volume  $D$

L'expression locale de la conservation de la masse est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$

Si le fluide est incompressible ( i.e., :  $D\rho/Dt = 0$  ), l'équation précédente devient alors :

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

### 1.7.2 Équation de Navier-Stokes

Un fluide newtonien est un fluide pour lequel l'hypothèse

$$\tau = 2\mu D + \eta \operatorname{div} v$$

est vérifiée :

1. les coefficients  $\mu$  ( viscosité dynamique ) et  $\eta$  ( second coefficient de viscosité ) sont appelés les coefficients de viscosité de Lamé. Ils dépendent essentiellement de la température et dans une moindre mesure de la pression.

2. On leur adjoint généralement l'hypothèse de *Stokes* :

$$\mu_v = \eta + \frac{2}{3}\mu = 0$$

$\mu_v$  est appelée la viscosité volumique. Alors pour un fluide newtonien on a :

$$\sigma = 2D\mu + [-p + \eta \operatorname{div} v]$$

où  $\sigma$  est le tenseur des contraintes  $f$ . La fonction  $f$  est la force par unité de volume. L'équation du mouvement est :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \operatorname{grad} v = f + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \sigma$$

On remplace  $\sigma$  dans l'équation ci-dessus on trouve :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \rho f + \operatorname{div} (2D\mu + [-p + \eta \operatorname{div} v])$$

c'est ce qu'on appelle l'équation de *Navier-Stokes*.

### 1.7.3 Cas particulier, équation d'Euler

Pour un écoulement d'un fluide idéal, il ya une seule force  $p(x, t)$  appelée la pression, si  $S_t$  est une surface de volume fluide,  $p(x, t)$  est la force perpendiculaire exercée sur la surface  $S_t$  en un point  $x \in S_t$  au temps  $t$ . Dans ce cas, il n'y a pas des forces tangentielles. Les forces sur  $\Omega_t$  et sur  $S_t$  sont égales à :

$$-\int_{S_t} p n ds = -\int_{\Omega_t} \operatorname{grad} p d\Omega_t$$

où  $n$  est la normale unitaire extérieure et  $\Omega_t$  est le volume du fluide.

Cette égalité montre que l'élément de volume du fluide est soumis à la force  $\operatorname{grad} p d\Omega_t$  exercée par le fluide environnant. L'équation de la balance des forces s'écrit alors :

$$\rho \left( \frac{Dv}{Dt} + v \operatorname{grad} v \right) = -\operatorname{grad} p$$

Lorsque le fluide est placé dans un champ, chacun de ses éléments de volume est

encore soumis à la force  $F$ , l'équation précédente s'écrit sous la forme :

$$\frac{Dv}{Dt} + v \operatorname{grad} v = -\frac{\nabla p}{\rho} + F$$

C'est l'équation *d'Euler*.

### 1.7.4 Équation de Bernoulli

Dans le cas présent, l'équation *d'Euler* possède une intégrale première qui traduit le fait que l'énergie mécanique totale d'une particule fluide se conserve au cours du temps, car il n'y a pas de frottements.

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\bar{v}}{dt} &= -\operatorname{grad} (P + \rho\vartheta) \\ \rho v \frac{dv}{dt} &= -v \operatorname{grad} (P + \rho\vartheta) \\ \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) &= -v_j \frac{\partial}{\partial x_j} (P + \rho\vartheta) \\ \frac{d}{dt} \left( \rho \frac{v^2}{2} \right) &= -\frac{d}{dt} (P + \rho\vartheta) \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{P}{\rho} + \vartheta + \frac{v^2}{2} \right) = 0$$

Et ainsi on a pour chaque particule fluide que l'on suit, donc sur chaque trajectoire :

$$\frac{P}{\rho} + \vartheta + \frac{v^2}{2} = \text{const}$$

Or l'écoulement étant stationnaire, cette relation est vraie sur chaque ligne de courant.

**Théorème :** Dans un écoulement stationnaire, incompressible, de fluide parfait soumis à des forces de masse dérivant du potentiel  $g$ , on a, sur chaque ligne de courant :

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho} = \text{const}$$

On verra que cette constante est la même sur chaque ligne de courant car l'écoulement est irrotationnel.

## 1.8 Analyse dimensionnelle

Avant de résoudre un problème, nous devons écrire l'équation qui régit le phénomène en variables non dimensionnelles. Pour cela, nous introduisons quelques notions et théorèmes pour passer d'une équation physique en variables dimensionnelles à une équation dont les variables sont sans dimensions physiques.

Nous utilisons le théorème *pi* de *Vaschy-Buckingham*, qui montre comment on rend sans dimension une équation physique. L'emploi des variables non dimensionnelles réduit le nombre de paramètres qui détermine la solution d'un problème. Si un phénomène physique dépend de  $N$  variables dimensionnelles, on peut rendre ces variables sans dimension en les réduisant à  $N - k$ , avec ( $k = 1, \dots, 4$ ). Les quatre variables universellement connues sont la longueur  $L$ , la masse  $M$ , la température  $\Theta$  et le temps  $t$ . Nous démontrons que les variables non dimensionnelles peuvent être sélectionnées de plusieurs manières. Elles paraissent relativement avec peu de paramètres non dimensionnels dans chaque cas.

### 1.8.1 Théorème pi de Vaschy-Buckingham

Le théorème *pi* de *Vaschy-Buckingham* est un théorème fondamental à l'analyse dimensionnelle, il a été énoncé et publié par *Vaschy* et *Buckingham* en 1914, il peut être énoncé comme suit : soit un phénomène physique comprenant  $n$  variables, dans les dimensions des quelles interviennent  $p$  grandeurs fondamentales, l'équation :

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$$

qui régit le phénomène peut se mettre sous forme

$$f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-p}) = 0$$

où les  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-p}$  sont des variables sans dimensions indépendants (nombre de *Reynold*, *Froude*, *Weber*, etc...).

## Chapitre 2

# Problème d'un écoulement au dessus d'une marche sans tension de surface et sans effet de gravité

**Résumé :** Dans ce chapitre, on étudie un problème d'écoulement potentiel, bidimensionnel, d'un fluide incompressible et non visqueux, passant au dessus d'un obstacle (marche d'escalier) de hauteur  $2H$  et de largeur  $H$ , en raison de la symétrie de l'écoulement par rapport à l'axe  $x'ox$ , on peut restreindre l'étude du problème au demi-plan supérieur, on peut étudier d'un écoulement au dessus d'une marche carré de côté  $H$ . En négligeant l'effet de gravité et les tensions de surface, le problème admet une solution exacte qu'on peut la calculer en utilisant la théorie des lignes de courant libres et la transformation de *Schwarz-Christoffel*.

**Contenu :**

- 2.1 Position du problème.
- 2.2 Théorie des lignes de courant libres.
- 2.3 Transformation de *Schwarz-Christoffel*.
- 2.4 Solution exacte.

## 2.1 Position du problème

On considère un écoulement potentiel, bidimensionnel et irrotationnel sur le plan horizontal d'un fluide incompressible et non visqueux, au dessus d'un obstacle ( marche d'escalier ) de hauteur  $2H$  et de largeur  $H$  (Fig1a).

On choisit  $B'OB$  sur l'axe  $y'oy$ ,  $BC$  et  $B'C'$  sont parallèles à l'axe  $x'ox$  (Fig1a). On suppose que l'écoulement est uniforme lorsque  $|x| \rightarrow \infty$  de vitesse  $U$ , au point  $O$  la vitesse est nulle. Nous supposons que le fluide remplit tout l'espace au dessus de l'obstacle.

Le but du problème consiste à déterminer la fonction potentielle de vitesse  $\varphi(x, y)$  qui satisfait l'équation de *Laplace* donnée par :

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{dans le domaine de l'écoulement} \quad (1)$$

Avec les conditions aux bords :

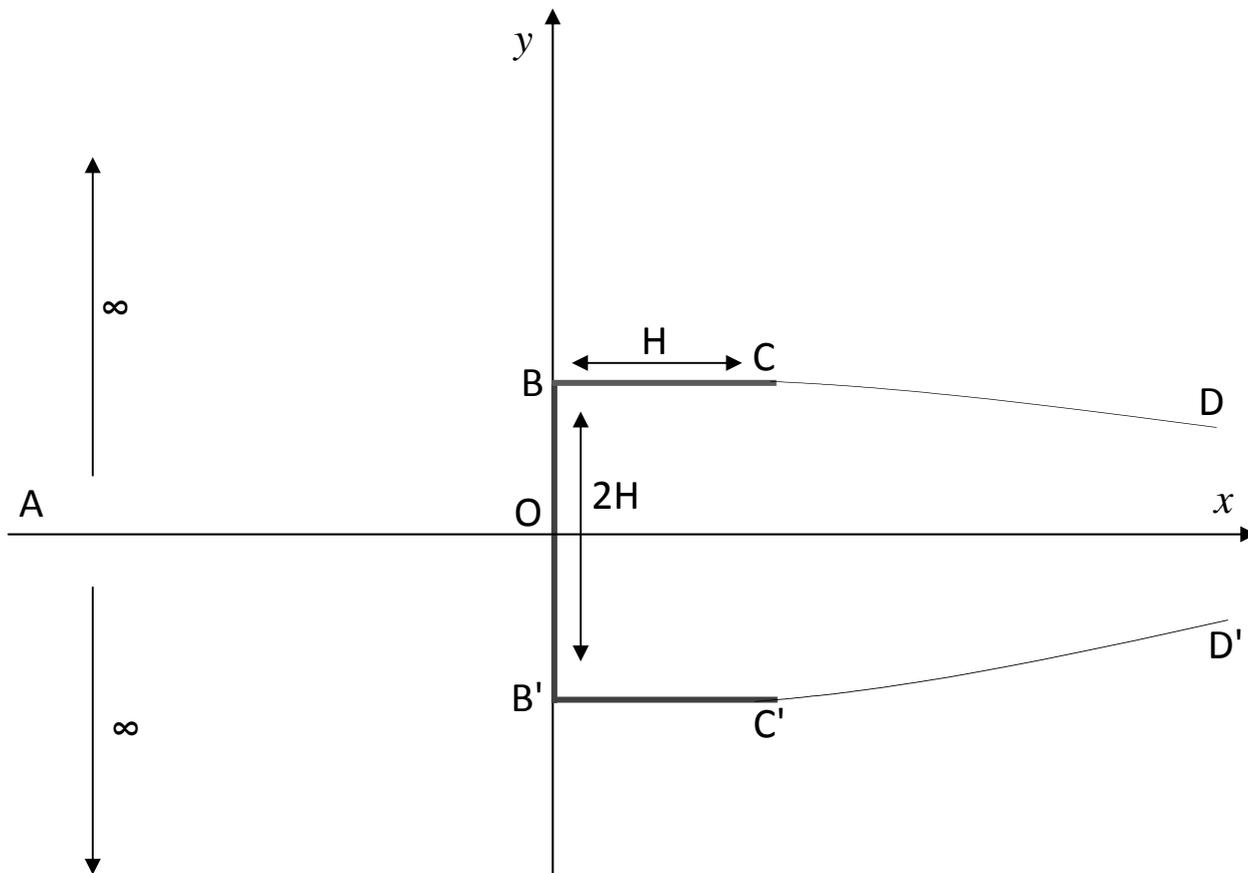
$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 & \text{sur OA} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 & \text{sur OB} \end{array} \right. \quad (2)$$

et

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 + \frac{p}{\rho} = \text{const} \quad \text{sur la surface libre de forme inconnue.} \quad (3)$$

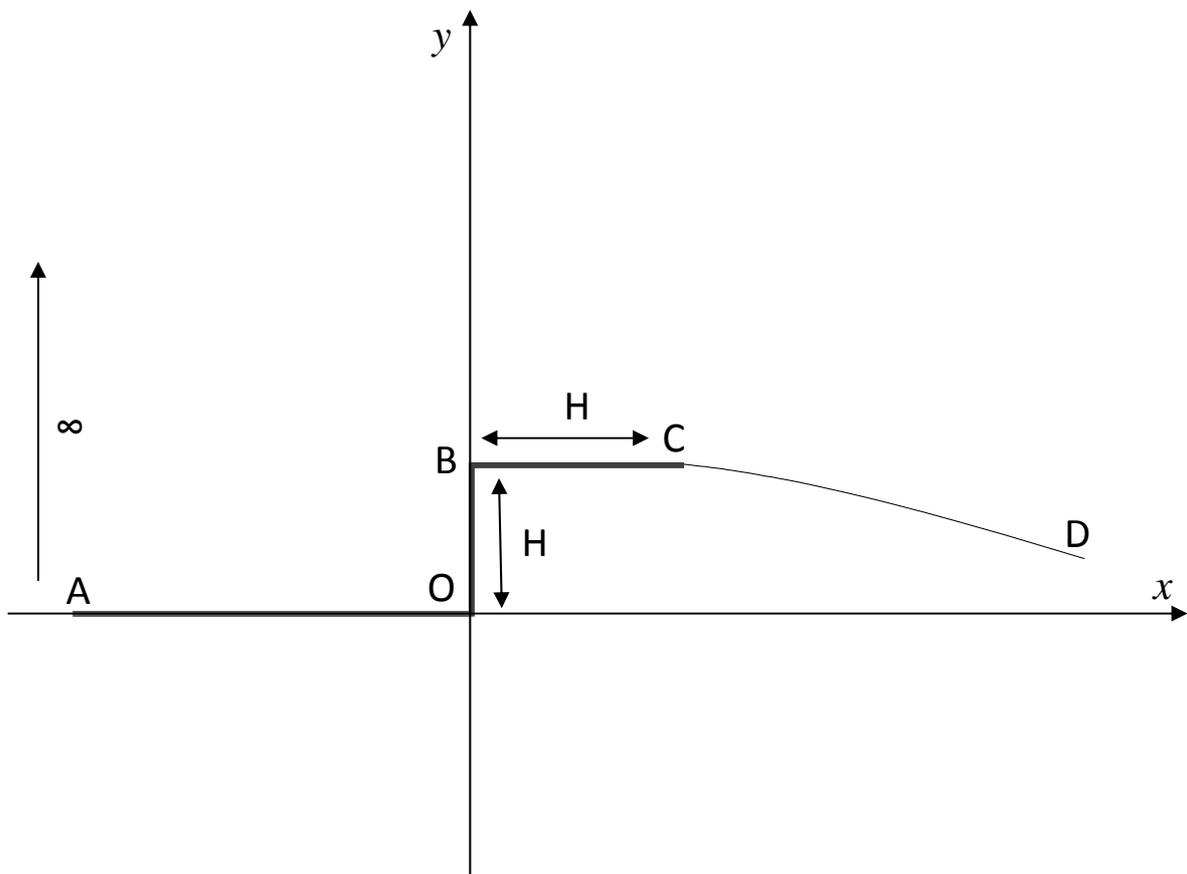
où  $p$  est la pression du fluide et  $\rho$  est sa densité.

En raison de la symétrie de l'écoulement par rapport à l'axe  $x'ox$ , on peut restreindre l'étude du problème au demi-plan supérieur, alors la configuration de la (Fig1a) peut servir à l'étude d'un écoulement au dessus d'une marche carré de côté  $H$  (Fig1b).



**Figure 1**

**Figure 1(a).** Schéma de l'écoulement et des coordonnées. La longueur de l'obstacle est  $2H$  et de largeur  $H$ . La surface libre est  $CD$ . la figure est un calcul effectif du profile de la surface libre pour  $\alpha = 300$ .



**Figure 1**

**Figure 1(b).** Schéma de l'écoulement et des coordonnées. La longueur de l'obstacle est  $H$  et de largeur  $H$ . La surface libre est  $CD$ . la figure est un calcul effectif du profile de la surface libre pour  $\alpha = 300$ .

Dans ce chapitre on s'intéresse au cas où la tension de surface et l'effet de gravité sont négligeables. Dans ce cas, la solution du problème peut-être obtenue explicitement. Pour commencer nous allons présenter une méthode de résolution introduite par *Kirchhoff* (1869) qui permet de déterminer la solution exacte.

## 2.2 Méthode des lignes de courant libres

La théorie des lignes de courant libres consiste à étudier les problèmes d'écoulements potentiels et bidimensionnels, partiellement bornée par les parois rigides et rectilignes et d'autres parties par lignes de courant libres, sur lesquelles la pression est supposée constante. Si aucune surface libre n'est présente et l'effet de la gravité n'est pas considérée l'écoulement dans le plan physique est un polygone. Si les lignes de courant libres sont présentes et l'effet de la gravité et la tension de surface sont négligeables le domaine de l'écoulement dans le plan transformé par une transformation conforme appropriée est aussi un polygone, ce qui nous permet dans deux cas de trouver la solution exacte du problème. Une méthode de résolution a été introduite par *Kirchhoff* ( 1869 ) dont l'idée de base est l'introduction de la variable complexe  $\Omega$  définie par :

$$\Omega = \log\left(\frac{U}{df/dz}\right) = \log\left(\frac{U}{u-iv}\right) = \log\left(\frac{U}{q}\right) + i\theta \quad (4)$$

où  $z = x+iy$ ,  $f = \varphi+i\psi$ ,  $\frac{df}{dz} = u-iv$  et  $q = \sqrt{u^2 + v^2}$ , avec  $(u, v)$  sont les composantes du vecteur vitesse,  $\theta$  est l'angle que forme le vecteur vitesse avec l'horizontale.

On remarque que La fonction  $\Omega$  possède de simples propriétés suivantes :

- La partie réelle de  $\Omega$  est constante sur chaque ligne de courant libre, i.e.,  $\log\left(\frac{U}{q}\right) = \text{const.}$
- La partie imaginaire de  $\Omega$  est constante sur chaque paroi rigide rectiligne, i.e.,  $\theta = \text{const.}$

Par conséquent, l'écoulement est représenté par une figure plane de cotés rectilignes (polygone). C'est aussi le cas de la transformation  $f$ , qui transforme le plan physique  $z$  en polygone. Il est évident que, si nous pouvons transformer le plan  $\Omega$  vers la moitié supérieure ( resp. inférieure ) d'un autre plan d'une certaine variable complexe  $\lambda$ , alors la relation entre  $z$  et  $f$  ou entre  $df/dz$  et  $f$  est paramétriquement déterminées. Pour commencer, nous donnons la définition et quelques propriétés sur la transformation de *Schwarz-Christoffel* qui nous seront utiles dans la suite de ce chapitre.

## 2.3 Transformation de Schwarz-Christoffel

Les transformations conformes sont très utilisées dans la résolution des problèmes d'écoulements bidimensionnels. Leurs caractéristiques est de préserver l'angle entre deux lignes intersectant en  $z_0$  si la dérivée de la transformation est non nulle en  $z_0$ . La transformation de *Schwarz-Christoffel*  $\lambda = f(\Omega)$ , transforme l'intérieur d'un polygone du plan complexe  $\Omega$  dans demi-plan supérieur (resp. inférieur) de la variable complexe  $\lambda$ . Considérons un polygone dans le plan  $\Omega$  de sommets  $A_1, A_2, \dots, A_n$  et pour angles intérieur  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  (Fig2a). Les points  $A_1, A_2, \dots, A_n$  dans le plan  $\Omega$  se transforment aux points  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  dans le plan  $\lambda$  (Fig2b). Il existe une application conforme qui représente l'intérieur  $R$  du polygone considéré sur le demi-plan supérieur du plan  $\lambda$  avec la correspondance des sommets  $A_1, A_2, \dots, A_n$  aux points  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Cette transformation est définie par :

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = M (\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1} (\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1} (\lambda - \lambda_3)^{\frac{\alpha_3}{\pi}-1} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} \quad (2.1)$$

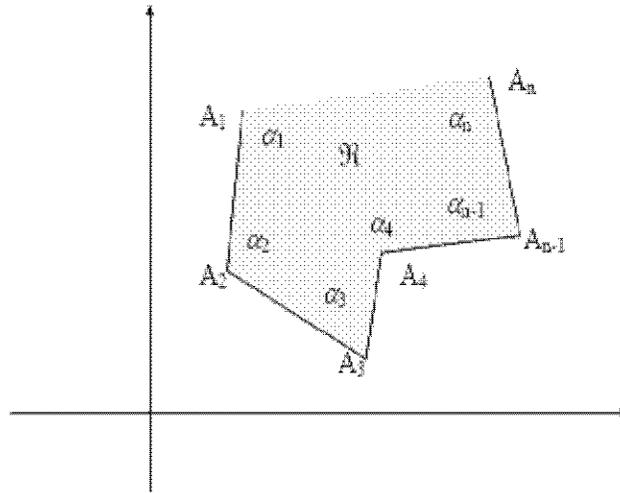
par intégration

$$\Omega = M \int (\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1} (\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1} (\lambda - \lambda_3)^{\frac{\alpha_3}{\pi}-1} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} d\lambda + N \quad (2.2)$$

avec  $M$  et  $N$  sont des constantes complexes qui déterminent la taille, l'orientation et la position du polygone. L'application  $\Omega$  est dite transformation de *Schwarz-Christoffel*.

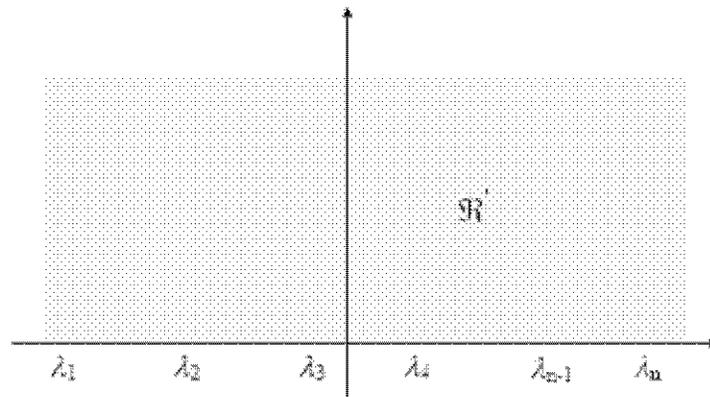
On note que :

- 1- On peut choisir trois points arbitraires parmi les  $n$  points  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .
- 2- Il est commode de choisir parmi les  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  un point à l'infini, par exemple  $\lambda_n$ , cas dans lequel le dernier facteur de (2.1) et (2.2) n'existe pas.



*Figure 2*

*Figure 2 (a) plan de la variable  $\Omega$*



*Figure 2*

*Figure 2 (b) plan de la variable  $\lambda$*

## 2.4 Solution exacte

Dans cette section nous allons utiliser la transformation de *Schwarz-Christoffel* pour trouver la solution exacte du problème défini comme suit. Considérons un écoulement bidimensionnel et irrotationnel d'un fluide incompressible et non visqueux, passant au dessus d'une marche carré de hauteur  $H$ . Nous supposons que le fluide remplit tout l'espace au dessus du demi-plan supérieur et d'arrière l'obstacle qui forme une cavité limitée par une ligne de courant libre qui s'étend vers l'infini ( Fig1b ). On suppose l'écoulement est uniforme à l'infini de vitesse  $U$  et la pression est constante sur la ligne de courant libre. Nous choisissons comme repère de référence la ligne AO sur l'axe  $x'ox$ , la ligne OB sur l'axe  $y'oy$ , la paroi rigide BC sur la droite d'équation  $y = H$  et la surface libre sur la ligne de courant CD. On transforme le plan de l'écoulement réel dans le plan complexe  $z$  au plan de l'écoulement  $f$  où  $f(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$  tels que les points A , O , B , C et D dans plan complexe  $z$  se transforment aux points  $A = -\infty, O = -2, B = -1, C = 0$  et  $D = +\infty$  dans le plan  $f$  ( Fig3). Puisque l'écoulement dans le plan réel est un polygone, la solution peut être déterminée explicitement. Pour trouver la forme de la surface libre CD, nous utilisons la transformation de *Schwarz-Christoffel* (2.1) on trouve :

$$\frac{dz}{df} = M (f + 2)^{-\frac{1}{2}} (f + 1)^{\frac{1}{2}}$$

ceci implique

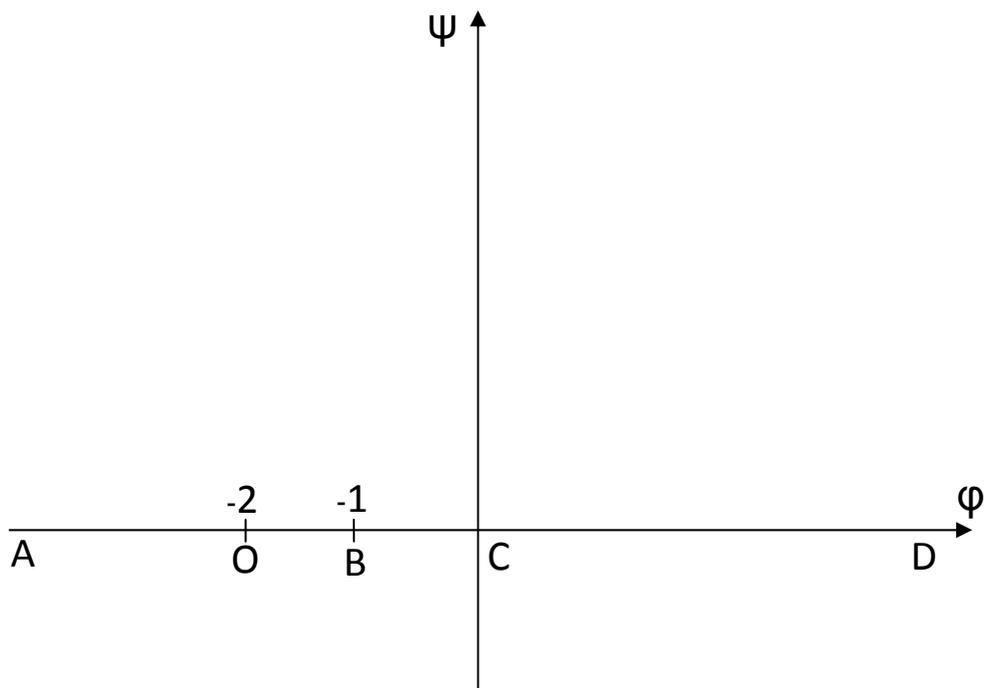
$$z = M \int \sqrt{\frac{f + 1}{f + 2}} df + N$$

ce qui nous donne après intégration :

$$z = M \left( \ln \left( \sqrt{f + 2} - \sqrt{f + 1} \right) + \sqrt{(f + 2)(f + 1)} \right) + N$$

Pour déterminer les constantes M et N on a :

- Lorsque  $f = -1$  (au point B),  $z = iH$  alors :  $N = iH$



*Figure 3. Plan de la variable  $f = \varphi + i \psi$*

• Lorsque  $f = 0$  (au point C),  $z = H + iH \implies M = \frac{H}{\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} - 1)}$

Donc

$$z = \frac{H}{\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} - 1)} \left( \ln(\sqrt{f+2} - \sqrt{f+1}) + \sqrt{(f+2)(f+1)} \right) + iH \quad (2.3)$$

Puisque  $f = \varphi$  sur la ligne de courant libre CD avec  $0 \leq \varphi \leq +\infty$  l'équation (2.3) devient alors :

$$z = \frac{H}{\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} - 1)} \left( \ln(\sqrt{\varphi+2} - \sqrt{\varphi+1}) + \sqrt{(\varphi+2)(\varphi+1)} \right) + iH$$

L'équation paramétrique de la surface libre CD est donnée par :

$$\begin{cases} x = \frac{H}{\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} - 1)} \left( \ln(\sqrt{\varphi+2} - \sqrt{\varphi+1}) + \sqrt{(\varphi+2)(\varphi+1)} \right) \\ y = H \end{cases} \quad \varphi \geq 0 \quad (2.4)$$

dont le graphe est donné dans la figure (4).

Ainsi la connaissance de la surface libre et  $f = \varphi + i\psi$  ( $\psi = 0$ ) sur la ligne de courant AOBCD, noté par la suite  $\Gamma$  la valeur de  $f$  à l'intérieur du domaine de l'écoulement est donnée par :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt$$

On remarque que malgré qu'on se prononce avoir trouvé la solution exacte de l'écoulement, l'évaluation de  $f(z)$  se fait numériquement vu la complexité de la représentation de  $f(z)$ .

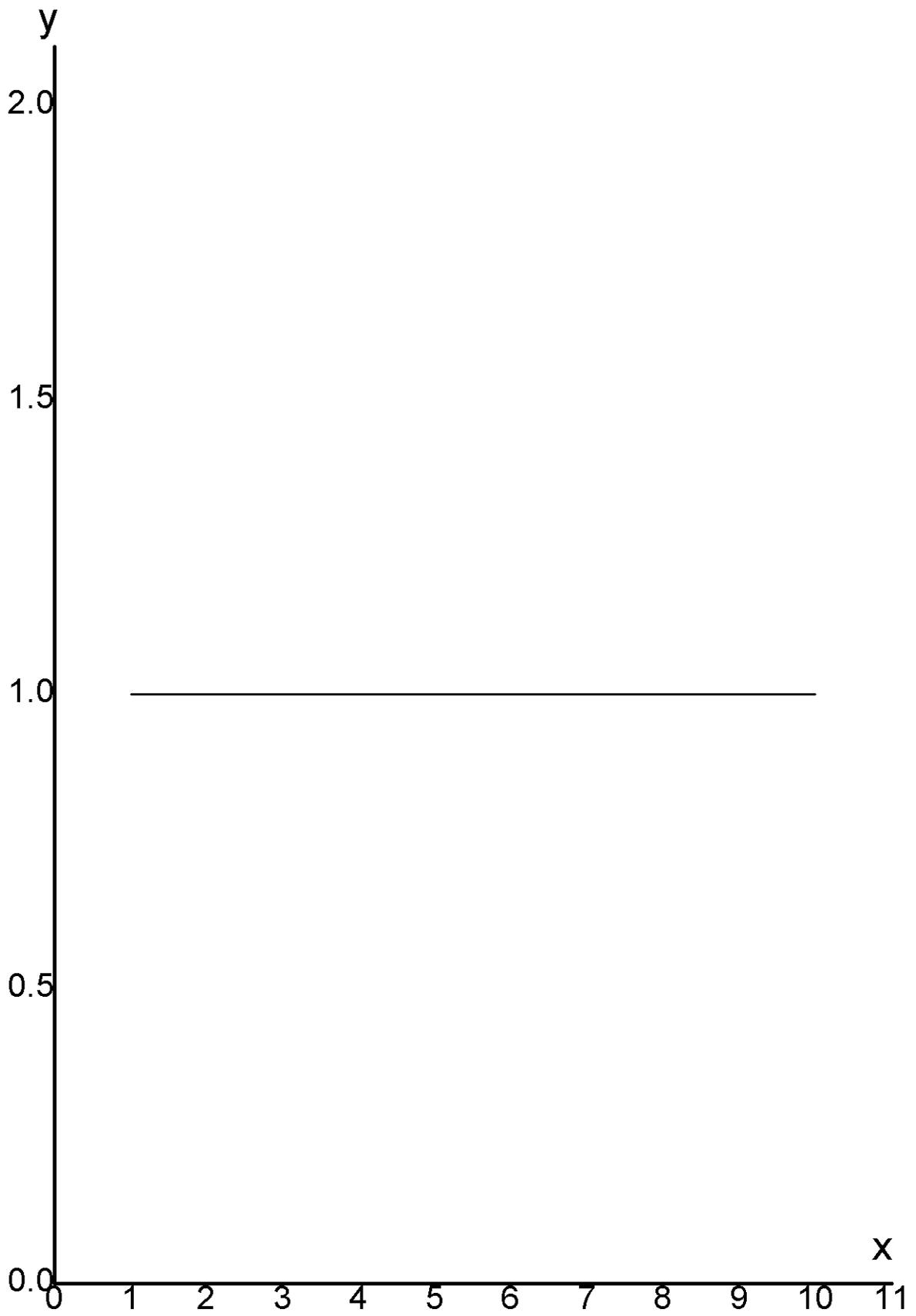


Fig 4 forme de la surface libre

# Chapitre 3

## Problème d'un écoulement au dessus d'une marche avec tension de surface et sans effet de gravité

**Résumé :** Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution numérique du problème considéré, en tenant compte des forces de la tension de surface et on garde la gravité  $g$  est nulle en utilisant La technique utilisée par *Vanden-Broeck et Keller* [15]. Dans ce cas, La solution exacte est difficile à trouver explicitement et même impossible. Comme nous le verrons, le problème sera caractérisé par le nombre de *Weber*  $\alpha$ .

**Contenu :**

- 3.1 Introduction.
- 3.2 Formulation générale du problème.
- 3.3 Procédure numérique.
- 3.4 Comportement locale de la vitesse au voisinage des singularités.
- 3.5 Formulation de la série.
- 3.6 Forme de la surface libre.
- 3.7 Résultats et discussion.

### 3.1 Introduction

Dans tout ce qui suit, les variables notées avec tilde ( $\sim$ ) sont des variables avec leurs dimensions physiques et les variables sans tilde ( $\sim$ ) sont des variables sans dimensions exemple  $\tilde{H}$  et  $H$ . Considérons un écoulement potentiel, bidimensionnel et irrotationnel sur le plan horizontal d'un fluide incompressible et non visqueux, passant au dessus d'un obstacle (une marche carré) de coté  $\tilde{H}$  formant derrière la marche une cavité qui s'étend vers l'infini. Nous supposons que la pression à l'intérieur de la cavité est constante et la vitesse est uniforme à l'infini noté  $\tilde{U}$ . Nous choisissons la paroi rigide OB sur l'axe  $y'oy$  et la paroi rigide BC sur la droite d'équation  $y = \tilde{H}$  parallèle à l'axe  $x'ox$  (Fig1b). Comme nous allons voir, l'écoulement sera caractérisé par le nombre de *Weber* défini par :

$$\alpha = \frac{\tilde{\rho} \tilde{U}^2 \tilde{H}}{\tilde{T}} \quad (3.1)$$

ici  $\tilde{T}$  est la tension de surface et  $\tilde{\rho}$  est la densité du fluide.

### 3.2 Formulation générale du problème

Soit un écoulement bidimensionnel, irrotationnel sur un plan horizontal  $x'ox$  d'un fluide incompressible et non visqueux, passant au dessus d'un obstacle ( une marche carré ). L'écoulement forme par la suite derrière l'obstacle une cavité qui s'étend vers l'infini. Nous supposons que lorsque  $x$  tend vers l'infini, la vitesse s'approche de la vitesse uniforme  $\tilde{U}$ , et que la pression à l'intérieur de la cavité est constante.

Le plan  $x'ox, y'oy$  du couple  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  sera considéré comme de la variable complexe  $\tilde{z} = \tilde{x} + i \tilde{y}$ . Soit  $\vec{V} = (\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y}))$  le champ du vecteur vitesse de l'écoulement.

Nous introduisons la fonction potentielle de vitesse  $\tilde{\varphi}$  et la fonction de courant  $\tilde{\psi}$  alors les conditions de *Cauchy-Riemann* sont données par :

$$\begin{cases} \tilde{u} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}} \\ \tilde{v} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} \end{cases} \quad (3.2)$$

La fonction potentielle complexe  $\tilde{f}$  définie par :

$$\tilde{f} = \tilde{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{y}) + i \tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{y})$$

La relation (3.2) implique que la fonction complexe  $\tilde{\xi} = \tilde{u} - i \tilde{v}$  et la fonction potentielle  $\tilde{f}$  sont des fonctions analytiques de variable  $\tilde{z} = \tilde{x} + i \tilde{y}$ .

La condition de *Bernoulli* (3) sur la surface libre devient :

$$\frac{1}{2} \tilde{q}^2 + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} = \frac{1}{2} \tilde{U}^2 + \frac{\tilde{p}_0}{\tilde{\rho}} = \text{const} \quad \text{sur CD} \quad (3.3)$$

où  $\tilde{p}$ ,  $\tilde{q}$ ,  $\tilde{p}_0$  désignant respectivement la pression du fluide sur la surface libre et le module de vitesse  $\tilde{q} = \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}$ ,  $\tilde{p}_0$  est la pression atmosphérique qui constante au dessus de la surface libre.

La relation entre  $\tilde{p}$  et  $\tilde{p}_0$  est donnée par la loi de *Laplace* [5] :

$$\tilde{p} - \tilde{p}_0 = \frac{\tilde{T}}{\tilde{R}} = \tilde{K} \tilde{T} \quad (3.4)$$

où  $\tilde{K}$  est la courbure de la surface libre,  $\tilde{R}$  est le rayon de courbure et  $\tilde{T}$  dénote la tension de surface. Par convention de signe,  $\tilde{K}$  est négatif si le centre de courbure est en dehors du fluide et de signe positif dans le cas contraire. Dans notre cas  $\tilde{K}$  est de signe négatif.

En substituant (3.4) dans (3.3) on trouve :

$$\frac{1}{2} \tilde{q}^2 - \frac{\tilde{T}}{\tilde{\rho}} \tilde{K} = \frac{1}{2} \tilde{U}^2 \quad \text{sur CD} \quad (3.5)$$

Avant de résoudre le problème, nous allons écrire l'équation (3.5) en variables non dimensionnelles, pour cela, on choisi  $\tilde{U}$  comme unité de vitesse et  $\tilde{H}$  comme unité de longueur et on pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} q = \frac{\tilde{q}}{\tilde{U}} \\ R = \frac{\tilde{R}}{\tilde{H}} \end{array} \right.$$

En substituant les relations ci-dessus dans (3.5) on trouve :

$$\frac{1}{2} (\tilde{U}q)^2 - \frac{\tilde{T}}{\tilde{H}R\tilde{\rho}} = \frac{1}{2} \tilde{U}^2 \quad (3.6)$$

D'après la définition du nombre de *Weber* l'équation (3.6) devient alors :

$$q^2 - \frac{2}{\alpha} K = 1 \quad (3.7)$$

On note par  $\xi$  le vecteur de vitesse où  $\xi = \frac{\tilde{u}}{\tilde{U}} - i \frac{\tilde{v}}{\tilde{U}} = u - iv$ , comme  $u - iv$  est analytique dans le domaine de l'écoulement,  $\xi$  peut être écrit sous forme :

$$\xi = u - iv = e^{\tau - i\theta} \quad (3.8)$$

où  $\theta$  désigne l'angle entre le vecteur de vitesse et l'horizontale. Avant d'écrire l'équation (3.7) par les nouvelles variables  $\tau$  et  $\theta$ , nous montrons que :

$$K = \frac{1}{R} = \left| \frac{d\theta}{d\varphi} \right| e^{\tau}$$

Désignons par  $\vec{\eta}$  le vecteur de vitesse, de coordonnées  $(e^{\tau} \cos \theta, e^{\tau} \sin \theta)$ .

En coordonnées intrinsèques on a :

$$\vec{\eta} = \vec{e}_T |\vec{\eta}| = |\zeta| \vec{e}_T$$

où  $\vec{e}_T$  est le vecteur unitaire tangentiel, on déduit que :

$$\vec{e}_T = \cos \theta \vec{i} + i \sin \theta \vec{j}$$

On a aussi par définition :

$$\frac{d\vec{e}_T}{ds} = K \vec{N} = \frac{1}{R} \vec{N}$$

où  $\vec{N}$  désigne le vecteur normal à la courbe et  $ds$  élément de longueur d'arc de la ligne de courant CD donc :

$$1 = R \left| \frac{d\vec{e}_T}{dt} \frac{dt}{ds} \right| = R \left| \frac{d\vec{e}_T}{dt} \right| \frac{1}{|\vec{\eta}|}$$

i.e.,

$$\frac{1}{R} = \left| \frac{d\vec{e}_T}{dt} \right| e^{-\tau} \quad (3.9)$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\vec{e}_T}{dt} \right| &= \left| -\frac{d\theta}{dt} \sin \theta \vec{i} + \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \vec{j} \right| \\ &= \left| \frac{d\theta}{dt} e^{-i\theta} \right| \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\left| \frac{d\vec{e}_T}{dt} \right| = \left| \frac{d\theta}{dt} \right|$$

En substituant l'expression ci-dessus dans (3.9) on trouve :

$$\frac{1}{R} = \left| \frac{d\theta}{dt} \right| e^{-\tau}$$

comme

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{d\theta}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{d\theta}{dy} \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{d\theta}{d\varphi} \left[ \frac{d\varphi}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{dy}{dt} \right] \\ &= \frac{d\theta}{d\varphi} e^{2\tau} \end{aligned}$$

sur la surface libre ( CD )

car

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{\eta} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} = e^\tau \cos \theta \vec{i} + e^\tau \sin \theta \vec{j}$$

donc :

$$K = \frac{1}{R} = \left| \frac{d\theta}{d\varphi} \right| e^\tau$$

On a :  $q = |\vec{\eta}| = e^\tau$ , alors la condition de *Bernoulli* (3.7) en variables non dimen-

sionnelles sur la ligne de courant libre CD s'écrit :

$$e^{2\tau} - \frac{2}{\alpha} \left| \frac{d\theta}{d\varphi} \right| e^\tau = 1 \quad (3.10)$$

avec les conditions

$$\begin{cases} u = 0, \psi = 0, -2 \leq \varphi \leq -1 \\ v = 0, \psi = 0, \varphi \leq -2 \end{cases} \quad (3.11)$$

De plus de la relation (3.8) on tire :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = u = e^\tau \cos \theta \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v = e^\tau \sin \theta \end{cases}$$

Nous cherchons  $\xi(\tau, \theta)$  qui vérifie l'équation (3.10) avec les conditions (3.11). Ce qui termine la formulation du problème.

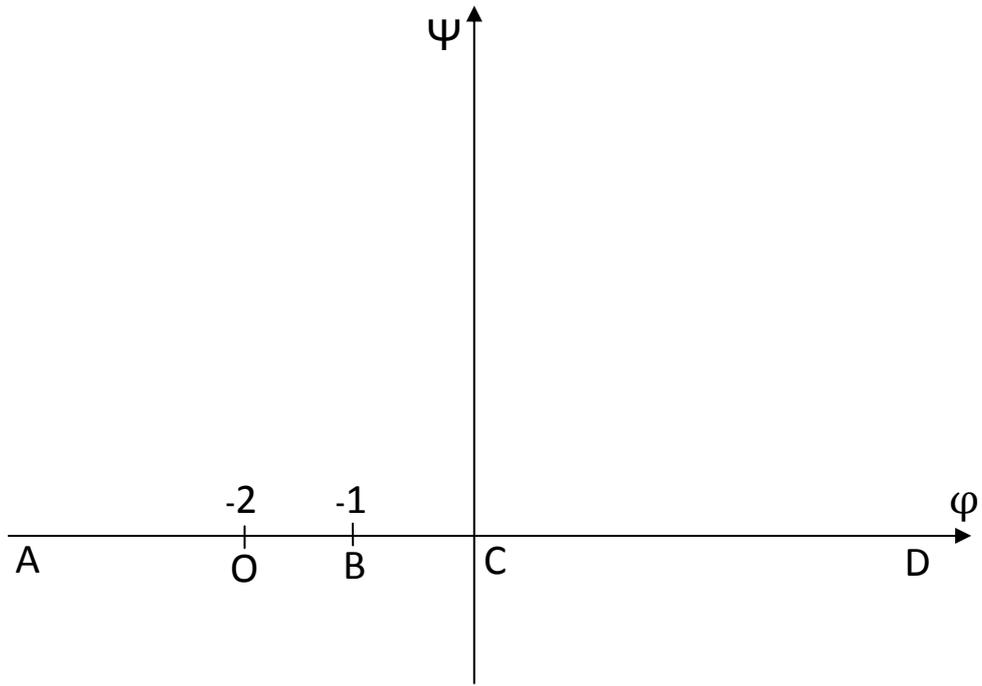
### 3.3 Procédure numérique

Pour résoudre le problème numériquement, on applique la technique de troncation de série utilisée par *Vanden-Broeck et Keller* [15].

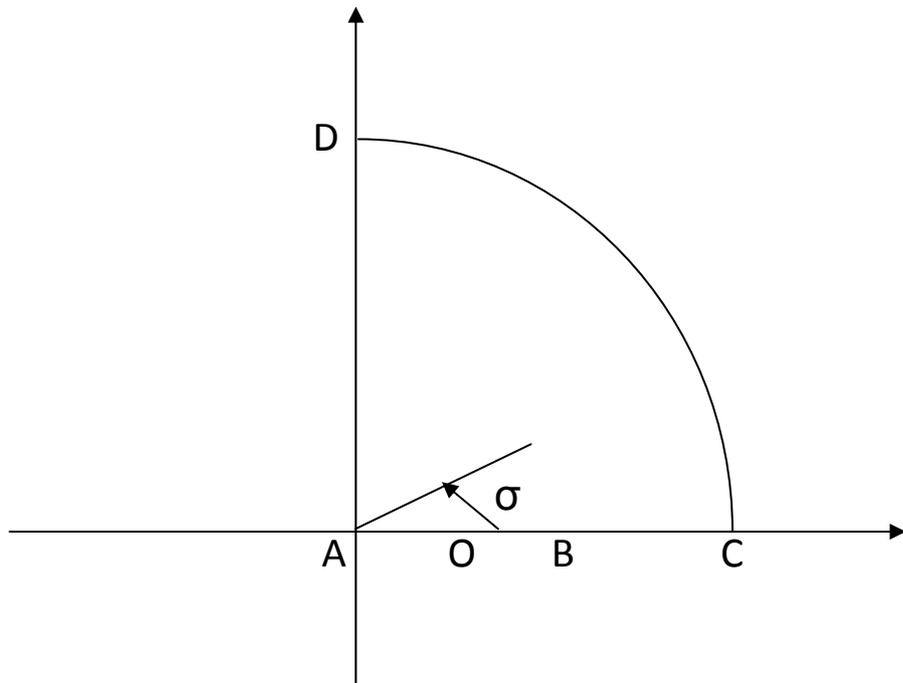
Avant d'écrire la forme de la série, on transforme le domaine occupé par le fluide dans le plan  $f$  (Fig5), en un quart de disque unité dans le premier quadrant de la variable  $t$  (Fig6). Les parois rigides AO, OB et BC se transforment sur les rayons du cercle et la surface libre CD sur la circonférence.

La surface libre dans la nouvelle variable  $t$  est donnée par :

$$t = e^{i\sigma} \quad \text{avec } 0 \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2}$$



*Figure 5. Plan de la variable  $f$*



*Figure 6. Plan de la variable  $t$*

La transformation qui applique le domaine de l'écoulement du plan  $f$  dans le plan  $t$  est donnée par :

$$f = \frac{2}{\pi} \log \frac{2t}{t^2 + 1} \quad (3.12)$$

Les points A , O , B , C et D dans le plan  $f$  se transforment respectivement aux points  $t = 0, t = e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1}, t = e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1}, t = 1$  et  $t = i$  dans le plan  $t$  (Fig6). Les points de la surface libre dans le plan  $t$  sont donnés par la relation :

$$t = |t| e^{i\sigma}. \quad \text{avec } 0 \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2} \quad (3.13)$$

et dans le plan  $f$  par :

$$f = \varphi, \quad \text{avec } 0 \leq \varphi \leq +\infty \quad \text{sur CD}$$

En substituant (3.13) dans l'équation (3.12) on trouve :

$$\begin{aligned} f &= \varphi = \frac{2}{\pi} \log \frac{2e^{i\sigma}}{e^{2i\sigma} + 1} \\ &= \frac{-2}{\pi} \log \operatorname{ch}(i\sigma) \end{aligned}$$

sur la surface libre CD

ce qui implique

$$\begin{aligned} df &= d\varphi = \frac{-2i}{\pi} \tanh(i\sigma) d\sigma \\ &= \frac{2}{\pi} \tan \sigma d\sigma \end{aligned}$$

donc

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = \frac{\pi}{2} \cot \sigma \quad (3.14)$$

sur la surface libre CD.

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right| &= \left| \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \right| \\ &= \left| \frac{\pi}{2} \cot \sigma \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \right| \end{aligned} \quad (3.15)$$

En utilisant (3.15), la condition de Bernoulli (3.10) devient :

$$e^{2\tau} - \frac{\pi}{\alpha} \cot \sigma \left| \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \right| e^\tau = 1 \quad \text{sur CD} \quad (3.16)$$

$$\left( \cot \sigma > 0, \text{ car } 0 < \sigma < \frac{\pi}{2} \right)$$

Reste maintenant à étudier le comportement de la vitesse au voisinage des singularités.

### 3.4 Comportement local de la vitesse au voisinage des singularités

les points singuliers dans le plan de l'écoulement réel  $z$  sont :  $z = 0$  où la vitesse est nulle,  $z_B = i$  et  $z_C = 1 + i$  point de séparation entre la paroi rigide et la surface libre, qui correspondent respectivement aux points  $t = t_O = e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1}$ ,  $t = t_B = e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1}$  et  $t = 1$  dans le plan  $t$ .

### 3.4.1 Comportement asymptotique au voisinage de $t = e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1}$

La configuration de l'écoulement au voisinage de  $t = t_O$  dans le plan  $t$  est la même dans le plan  $z$  au point O, or l'écoulement au voisinage de  $z = 0$  est un écoulement dans un angle de  $\frac{\pi}{2}$ , dont la fonction complexe  $f$  est donnée par :

$$f(z) \sim \frac{a}{2}z^2 - 2 \quad \text{quand} \quad z \longrightarrow 0$$

ce qui donne

$$z^2 \sim \frac{2}{a}(f + 2) \quad \text{lorsque} \quad f \longrightarrow 0$$

On remplace l'équation donnée dans (3.12) dans l'expression ci-dessus

on trouve :

$$z^2 \sim \frac{2}{a} \left[ \frac{2}{\pi} \log \frac{2t}{t^2 + 1} + 2 \right] \quad t \longrightarrow e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1}$$

$$z^2 \sim \frac{4}{a\pi} \left( \log e^\pi \frac{2t}{1 + t^2} \right) \quad t \longrightarrow e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1}$$

puisque

$$\log e^\pi \frac{2t}{1 + t^2} \sim \left( t - \left( e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1} \right) \right)^2 + O((t - t_O)^3) \quad t \longrightarrow e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1}$$

$$\text{et comme } (t - t_O) \sim O\left(t^2 - \left( e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1} \right)^2\right) \quad t \longrightarrow e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1}$$

on peut écrire alors

$$z \sim \left(\frac{4}{a\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(t^2 - \left(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1}\right)^2\right) \quad t \longrightarrow e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1}$$

comme  $\xi = \frac{df}{dz} = az$  ce qui donne :

$$\xi \sim az \quad z \longrightarrow 0$$

i.e.,

$$\xi \sim a \left(\frac{4}{a\pi}\right)^{1/2} \left(t^2 - \left(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1}\right)^2\right) \quad t \longrightarrow e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1}$$

c-à-d

$$\xi \sim O\left(t^2 - \left(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1}\right)^2\right) \quad t \longrightarrow e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1} \quad (3.17)$$

### 3.4.2 Comportement asymptotique au voisinage de $t = e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1}$

L'écoulement au voisinage de  $z = i$  est un écoulement autour d'un angle  $\gamma = \frac{3\pi}{2}$ , dont la fonction complexe  $f$  est donnée par :

$$f \sim \frac{3a}{2} (z - i)^{\frac{2}{3}} - 1 \quad \text{lorsque } z \longrightarrow i \quad (3.18)$$

alors

$$\xi = \frac{df}{dz} \sim a(z-i)^{-\frac{1}{3}} \quad \text{quand } z \longrightarrow i \quad (3.19)$$

puisque sur la surface libre  $\psi = 0$  donc :

$$f = \varphi = \frac{2}{\pi} \log \frac{2t}{t^2 + 1} \quad \text{sur CD} \quad (3.20)$$

de l'équation (3.18) et (3.20) on tire :

$$z - i \sim \left( \frac{2}{3a} \left[ \frac{2}{\pi} \log \frac{2t}{t^2 + 1} + 1 \right] \right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{quand } z \longrightarrow i \quad (3.21)$$

En substituant (3.21) dans (3.19) on trouve :

$$\xi \sim a \left[ \left( \frac{4}{3\pi a} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \log e^{\pi/2} \frac{2t}{t^2 + 1} \right)^{\frac{3}{2}} \right]^{-\frac{1}{3}} \quad \text{quand } t \longrightarrow e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1}$$

puisque

$$\log e^{\pi/2} \frac{2t}{t^2 + 1} \sim (t - (e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1}))^2 + O((t - t_B)^3) \quad t \longrightarrow e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1}$$

$$\text{et comme } (t - t_B) = O\left(t^2 - (e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1})^2\right) \quad t \longrightarrow e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1}$$

on peut écrire alors

$$\xi \sim a \left( \frac{4}{3\pi a} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( t^2 - (e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1})^2 \right)^{-1} \quad \text{lorsque } t \longrightarrow e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1}$$

c'est-à-dire

$$\xi \sim O\left(t^2 - (e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1})^2\right)^{-1} \quad \text{lorsque } t \longrightarrow e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1} \quad (3.22)$$

### 3.4.3 Comportement asymptotique au voisinage de $t = 1$

La configuration de l'écoulement autour du point  $t = 1$  est la même qu'au point  $z_C = 1 + i$ , comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent lorsque la tension de surface est négligeable ( $T = 0$ ), l'angle de séparation entre la surface libre et la paroi rigide ( $\gamma = \pi$ ). Dans le cas où ( $T \neq 0, \gamma \neq \pi$ ) et en ce point de séparation, nous avons un écoulement autour d'un angle  $\gamma > \pi$  où l'écoulement est caractérisé par la fonction potentielle suivante :

$$f \sim \frac{a}{n} (z - z_C)^n \quad \text{lorsque } z \longrightarrow z_C \quad (3.23)$$

où  $z_C = 1 + i$  et  $n = \frac{\pi}{\gamma}$

alors

$$\xi = \frac{df}{dz} \sim a (z - z_C)^{n-1} \quad \text{lorsque } z \longrightarrow z_C \quad (3.24)$$

puisque sur la surface libre  $\psi = 0$ , alors :

$$f = \varphi = \frac{2}{\pi} \log \frac{2t}{t^2 + 1} \quad \text{sur CD} \quad (3.25)$$

de l'équation (3.23) et (3.25) on tire :

$$z - z_C \sim \left(\frac{2}{a\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\pi}} \left(\log \frac{2t}{t^2+1}\right)^{\frac{\gamma}{\pi}} \quad \text{quand } z \longrightarrow z_C \quad (3.26)$$

En substituant (3.26) dans (3.24) on trouve :

$$\xi \sim a \left[ \left(\frac{2}{a\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\pi}} \left(\log \frac{2t}{t^2+1}\right)^{\frac{\gamma}{\pi}} \right]^{\frac{\pi}{\gamma}-1} \quad \text{quand } t \longrightarrow 1$$

puisque

$$\log \frac{2t}{t^2+1} \sim (t-1)^2 + O((t-1)^3) \quad t \longrightarrow 1$$

alors :

$$\xi \sim a \left[ \frac{2}{a\gamma} \right]^{1-\frac{\gamma}{\pi}} (t-1)^{2(1-\frac{\gamma}{\pi})} \quad \text{quand } t \longrightarrow 1$$

c'est-à-dire comportement de l'écoulement au voisinage du point de séparation s'écrit :

$$\xi = O(t-1)^{2(1-\frac{\gamma}{\pi})} \quad \text{quand } t \longrightarrow 1 \quad (3.27)$$

### 3.5 Formulation de la série

Après avoir déterminé le comportement local de l'écoulement au voisinage des singularités  $t = e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1}$ ,  $t = e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1}$  et  $t = 1$ , on cherche  $\xi(t)$  sous la

forme :

$$\xi = g(t) \exp \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^{2k} \quad (3.28)$$

où  $g(t)$  contient les singularités et les zéros données en (3.17) et (3.22) et (3.27).

En utilisant les conditions aux limites (3.11) et les relations (3.17), (3.22) et (3.27), l'équation (3.28) devient alors :

$$\begin{aligned} \xi = u - iv &= \left( t^2 - \left( e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1} \right)^2 \right) \times \left( t^2 - \left( e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1} \right)^2 \right)^{-1} \times \\ & (1-t)^{2(1-\frac{\gamma}{\pi})} \times \exp \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{2k} \right) \end{aligned} \quad (3.29)$$

où les coefficients  $a_k$  et la constante  $\gamma$  sont à déterminer, la série doit être convergente dans le quart de disque unité du plan  $t$ . Il est facile de vérifier que les conditions  $u = 0$  sur AO et  $v = 0$  sur OB sont satisfaites, si on choisit tous les  $a_k$  et  $\gamma$  des réelles. En substituant (3.13) dans (3.29) on obtient :

$$\begin{aligned} \xi = e^{\tau - i\theta} &= \left( 1 + \left( e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1} \right)^4 - 2 \left( e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1} \right)^2 \cos 2\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \times e^{iZ} \\ & \left( 1 + \left( e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1} \right)^4 - 2 \left( e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1} \right)^2 \cos 2\sigma \right)^{\frac{-1}{2}} \times e^{-iW} \times \left( 2 \sin \frac{\sigma}{2} \right)^{2(1-\frac{\gamma}{\pi})} \\ & \times \exp \left[ \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos 2(k-1)\sigma + i(-\pi + \sigma) \times \left( 1 - \frac{\gamma}{\pi} \right) + i \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin 2(k-1)\sigma \right] \\ \text{tel que : } Z &= \tan^{-1} \frac{-\sin 2\sigma}{\left( e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1} \right)^2 - \cos 2\sigma} \quad \text{et } W = \tan^{-1} \frac{-\sin 2\sigma}{\left( e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1} \right)^2 - \cos 2\sigma} \end{aligned}$$

En conséquence :

$$\left\{ \begin{aligned} \theta(\sigma) &= \left[ \begin{aligned} &(-\pi + \sigma) \times \left(\frac{\gamma}{\pi} - 1\right) - \tan^{-1} \frac{-\sin 2\sigma}{(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 - \cos 2\sigma} \\ &+ \tan^{-1} \frac{-\sin 2\sigma}{(e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1})^2 - \cos 2\sigma} - \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin 2(k-1)\sigma \end{aligned} \right] \quad (3.30a) \\ e^{\tau(\sigma)} &= \left(1 + (e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^4 - 2(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 \cos 2\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \times \quad (3.30) \\ &\left(1 + (e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1})^4 - 2(e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1})^2 \cos 2\sigma\right)^{\frac{-1}{2}} \times \left(2 \sin \frac{\sigma}{2}\right)^{2(1-\frac{\gamma}{\pi})} \\ &\times \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos 2(k-1)\sigma\right) \quad (3.30b) \end{aligned} \right.$$

Pour exprimer l'équation de Bernoulli en terme de  $\sigma$ , on remplace  $\tau(\sigma)$

et  $\theta(\sigma)$  par leurs valeurs dans l'équation (3.16) on trouve :

$$\begin{aligned} &\left(1 + (e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^4 - 2(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 \cos 2\sigma\right) \times \exp \sum_{k=1}^{+\infty} 2a_k \cos 2(k-1)\sigma \\ &\left(1 + (e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1})^4 - 2(e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1})^2 \cos 2\sigma\right)^{-1} \times \left(2 \sin \frac{\sigma}{2}\right)^{4(1-\frac{\gamma}{\pi})} - \frac{\pi}{\alpha} \times \cot \sigma \\ &\times \left[ \begin{aligned} &\frac{2(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 \cos 2\sigma - 2}{1 + (e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^4 - 2(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 \cos 2\sigma} - \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 2(k-1) \times \cos 2(k-1)\sigma \\ &+ \frac{2 - 2(e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1})^2 \cos 2\sigma}{1 + (e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1})^4 - 2(e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1})^2 \cos 2\sigma} + \left(\frac{\gamma}{\pi} - 1\right) \end{aligned} \right] \\ &\times \left(1 + (e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^4 - 2(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 \cos 2\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \times \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos 2(k-1)\sigma\right) \times \\ &\left(1 + (e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1})^4 - 2(e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1})^2 \cos 2\sigma\right)^{\frac{-1}{2}} \times \left(2 \sin \frac{\sigma}{2}\right)^{2(1-\frac{\gamma}{\pi})} = 1 \quad (3.31) \end{aligned}$$

Pour déterminer les coefficients  $a_k$  de la série ci-dessus et l'angle  $\gamma$ , on tronque la série donnée dans (3.28) après  $N$  termes. Nous trouvons les  $N$  coefficients  $a_k$  et l'angle de séparation  $\gamma$  par collocation. Ainsi, on discrétise l'intervalle  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  en  $N$  points, On pose :

$$\sigma_I = \frac{\pi}{2N} \left(I - \frac{1}{2}\right), \quad I = 1, 2, \dots, N \quad (3.32)$$

En satisfaisant l'équation (3.31) en des points de collocation (3.32) on obtient un

système de  $N$  équations algébriques non linéaires à  $(N - 1)$  inconnus  $a_1, a_2, \dots, a_{N-1}$

et  $\gamma$ . C'est-à-dire

$$\begin{aligned}
& \left(1 + (e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^4 - 2(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 \cos 2\sigma_I\right) \times \exp \sum_{k=1}^{N-1} 2a_k \cos 2(k-1)\sigma_I \\
& \left(1 + (e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1})^4 - 2(e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1})^2 \cos 2\sigma_I\right)^{-1} \times \left(2 \sin \frac{\sigma_I}{2}\right)^{4(1-\frac{\gamma}{\pi}) - \frac{\pi}{\alpha}} \times \cot \sigma_I \\
& \times \left[ \begin{aligned} & \frac{2(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 \cos 2\sigma_I - 2}{1 + (e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^4 - 2(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 \cos 2\sigma_I} - \sum_{k=1}^{N-1} a_k 2(k-1) \times \cos 2(k-1)\sigma_I \\ & + \frac{2 - 2(e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1})^2 \cos 2\sigma_I}{1 + (e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1})^4 - 2(e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1})^2 \cos 2\sigma_I} + \left(\frac{\gamma}{\pi} - 1\right) \end{aligned} \right] \\
& \times \left(1 + (e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^4 - 2(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 \cos 2\sigma_I\right)^{\frac{1}{2}} \times \exp \left(\sum_{k=1}^{N-1} a_k \cos 2(k-1)\sigma_I\right) \times \\
& \left(1 + (e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1})^4 - 2(e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1})^2 \cos 2\sigma_I\right)^{\frac{-1}{2}} \times \left(2 \sin \frac{\sigma_I}{2}\right)^{2(1-\frac{\gamma}{\pi})} = 1 \quad (3.33)
\end{aligned}$$

où  $I = 1, 2, \dots, N$

Pour calculer les coefficients  $a_k$  et l'angle  $\gamma$  pour différentes valeurs du nombre de Weber  $\alpha$ , on utilise la méthode de *Newton* et l'algorithme de *Jordan* avec pivot total implicite ( cf annexe ).

### 3.6 Forme de la surface libre

Pour déterminer la forme de la surface libre, on utilise la relation suivante :

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} + i \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{1}{u - iv} = e^{-\tau + i\theta}$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = e^{-\tau} \cos \theta \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} = e^{-\tau} \sin \theta \end{cases} \quad (3.34)$$

avec  $\frac{\partial x}{\partial \sigma} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}$  et  $\frac{\partial y}{\partial \sigma} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}$  sur la surface libre.

En substituant (3.14), (3.30) et en utilisant (3.34) on trouve  $\frac{\partial x}{\partial \sigma}, \frac{\partial y}{\partial \sigma}$  en chaque point de collocation  $\sigma_I$  i.e.,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial \sigma}(\sigma_I) = \frac{2}{\pi} \times \tan \sigma \times \left(1 + (e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^4 - 2(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 \cos 2\sigma_I\right)^{\frac{-1}{2}} \times \\ \left(1 + (e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1})^4 - 2(e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1})^2 \cos 2\sigma_I\right)^{\frac{1}{2}} \times \exp \left[ - \sum_{k=1}^{N-1} a_k \cos 2(k-1)\sigma_I \right] \\ \times \left(2 \sin \frac{\sigma_I}{2}\right)^{2\left(\frac{\gamma}{\pi}-1\right)} \times \cos \left[ \begin{array}{l} (-\pi + \sigma) \times \left(\frac{\gamma}{\pi} - 1\right) - \tan^{-1} \frac{-\sin 2\sigma}{(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 - \cos 2\sigma} \\ + \tan^{-1} \frac{-\sin 2\sigma}{(e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1})^2 - \cos 2\sigma} - \sum_{k=1}^{N-1} a_k \sin 2(k-1)\sigma_I \end{array} \right] \\ \frac{\partial y}{\partial \sigma}(\sigma_I) = \frac{2}{\pi} \times \tan \sigma \times \left(1 + (e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^4 - 2(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 \cos 2\sigma_I\right)^{\frac{-1}{2}} \times \\ \left(1 + (e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1})^4 - 2(e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1})^2 \cos 2\sigma_I\right)^{\frac{1}{2}} \times \exp \left[ - \sum_{k=1}^{N-1} a_k \cos 2(k-1)\sigma_I \right] \\ \times \left(2 \sin \frac{\sigma_I}{2}\right)^{2\left(\frac{\gamma}{\pi}-1\right)} \times \sin \left[ \begin{array}{l} (-\pi + \sigma) \times \left(\frac{\gamma}{\pi} - 1\right) - \tan^{-1} \frac{-\sin 2\sigma}{(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 - \cos 2\sigma} \\ + \tan^{-1} \frac{-\sin 2\sigma}{(e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1})^2 - \cos 2\sigma} - \sum_{k=1}^{N-1} a_k \sin 2(k-1)\sigma_I \end{array} \right] \end{array} \right. \quad (3.35)$$

où  $I = 1, 2, \dots, N$

Ainsi, la forme de la surface libre est obtenue en intégrant numériquement les relations (3.35) avec la condition initiale  $x(0) = 1$  et  $y(0) = 1$ . Les résultats présentés ici sont obtenus pour  $N = 50$ .

## 3.7 Résultats et discussion

### 3.7.1 Solution sans tension de surface

lorsque le nombre de *Weber*  $\alpha$  tend vers l'infini, la tension de surface tend vers zéro, le système (3.33) se réduit à :

$$\left(1 + (e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^4 - 2(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 \cos 2\sigma_I\right) \times \left(2 \sin \frac{\sigma_I}{2}\right)^{4\left(1-\frac{\gamma}{\pi}\right)} \times \left(1 + (e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1})^4 - 2(e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1})^2 \cos 2\sigma_I\right)^{-1} \times$$

$$\exp \sum_{k=1}^{N-1} 2a_k \cos 2(k-1)\sigma_I = 1 \quad (3.36)$$

où  $I = 1, 2, \dots, N$  et  $\sigma_I$  sont données par la relation (3.32).

Nous utilisons les méthodes de résolutions décrites ci-dessus, on trouve  $a_k$  et  $\gamma$ . Le tableau ci-dessous montre quelques valeurs de  $a_k$  et  $\gamma$  de la série (3.36) pour  $\alpha \longrightarrow \infty$

$\gamma$	$a_1$	$a_2$	$a_5$	$a_{10}$	$a_{20}$	$a_{30}$	$a_{40}$	$a_{49}$
314159 $10^{-5}$	-6.085 $10^{-5}$	2.575 $10^{-10}$	8.16 $10^{-11}$	-1.765 $10^{-13}$	2.599 $10^{-11}$	-1.21 $10^{-14}$	-3.183 $10^{-12}$	5.319 $10^{-14}$

**Tableau.1**  
**quelques valeurs des coefficients  $a_k$  et l'angle de**  
**séparation  $\gamma$  pour  $\alpha \longrightarrow \infty$**

Nous remarquons que les coefficients  $a_k$  sont presque négligeables et l'angle de séparation  $\gamma \longrightarrow \pi$  avec une erreur  $2.54.10^{-6}$  ce qui implique qu'il n'y pas de singularité au point de séparation C, i.e., le fluide quitte la paroi rigide tangentiellement. Lorsque  $\gamma \longrightarrow \pi$  et les valeurs de la série  $a_k$  sont suffisamment petit (i.e.,  $a_k \longrightarrow 0$ ), la relation (3.29) devient :

$$\xi = u - iv = \left( t^2 - \left( e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1} \right)^2 \right) \left( t^2 - \left( e^{\pi/2} - \sqrt{e^\pi - 1} \right)^2 \right)^{-1} \quad \text{sur CD}$$

et quand  $\alpha \longrightarrow \infty$  l'équation (3.16) s'écrit par :

$$u^2 + v^2 = 1 \quad \text{sur la surface libre}$$

En utilisant la transformation de *Schwarz-Christoffel* on trouve la solution exacte. La figure (7) présente le graphe de forme de la surface libre pour le nombre de *Weber*  $\alpha \longrightarrow \infty$ .

### 3.7.2 Solution avec tension de surface

On utilise la méthode numérique pour résoudre le système non linéaire (3.31) pour différentes valeurs du nombre de *Weber*  $\alpha$ . On trouve la forme de la surface libre pour chaque valeur  $\alpha$ , l'angle  $\gamma$  et les coefficients  $a_k$  de la série (3.33), le tableau ci-dessous présente quelques valeurs  $a_k$  et l'angle  $\gamma$ . La figure ( Fig 8 ) représente la forme de la surface libre pour quelques valeurs du nombre de *Weber*  $\alpha$ .

$\alpha$	$\gamma$	$a_1$	$a_2$	$a_5$	$a_{10}$	$a_{20}$	$a_{30}$	$a_{40}$	$a_{49}$
$10^3$	$31446$ $10^{-4}$	$-1.018$ $10^{-3}$	$-1.258$ $10^{-2}$	$-3.192$ $10^{-4}$	$-1.055$ $10^{-4}$	$-2.235$ $10^{-5}$	$-5.273$ $10^{-6}$	$-9.511$ $10^{-7}$	$-3.233$ $10^{-8}$
100	$31912$ $10^{-4}$	$-1.64$ $10^{-2}$	$-4.267$ $10^{-2}$	$-5.071$ $10^{-3}$	$-1.673$ $10^{-3}$	$-3.388$ $10^{-4}$	$-7.277$ $10^{-5}$	$-8.265$ $10^{-6}$	$7.941$ $10^{-7}$
50	$34814$ $10^{-4}$	$-1.111$ $10^{-1}$	$-2.307$ $10^{-1}$	$-3.475$ $10^{-2}$	$-1.141$ $10^{-2}$	$-2.307$ $10^{-3}$	$-4.991$ $10^{-4}$	$-5.942$ $10^{-5}$	$-3.921$ $10^{-6}$
30	$44153$ $10^{-4}$	$-3.967$ $10^{-1}$	$-2.307$ $10^{-1}$	$-1.165$ $10^{-1}$	$-3.553$ $10^{-2}$	$-6.347$ $10^{-3}$	$-1.261$ $10^{-3}$	$-1.437$ $10^{-4}$	$-1.466$ $10^{-5}$
2	$47$ $10^{-1}$	$9.303$ $10^{-2}$	$-2.636$ $10^{-1}$	$5.731$ $10^{-4}$	$-3.309$ $10^{-4}$	$-3.841$ $10^{-5}$	$-6.582$ $10^{-6}$	$-7.014$ $10^{-7}$	$4.893$ $10^{-6}$
0.88	$471$ $10^{-2}$	$5.212$ $10^{-1}$	$9.811$ $10^{-2}$	$-7.917$ $10^{-3}$	$9.049$ $10^{-4}$	$1.099$ $10^{-4}$	$1.89$ $10^{-5}$	$2.016$ $10^{-6}$	$3.44$ $10^{-8}$
0.2	$474$ $10^{-2}$	$-0.839$ $10^{-1}$	$5.179$ $10^{-1}$	$-8.395$ $10^{-2}$	$-9.584$ $10^{-3}$	$1.088$ $10^{-3}$	$1.848$ $10^{-4}$	$-5.645$ $10^{-4}$	$-1.358$ $10^{-4}$

**Tableau.2**

**quelques valeurs des coefficients  $a_k$  et l'angle de séparation  $\gamma$   
pour quelques valeurs du nombre de Weber  $\alpha$**

Notons que dans le tableau 2 les coefficients  $a_k$  sont décroissants et que la série est uniformément et absolument convergente pour tout nombre de *Weber*  $\alpha$ .

En effet on a :

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} a_k t^{2(k-1)} \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty \quad K \geq 1$$

On constate que, lorsque  $\alpha$  est assez grand, les courbes de la surface libre se rapprochent de la solution exacte. Le tableau suivant montre la variation de l'angle  $\gamma$  en fonction de  $\frac{1}{\alpha}$ , dont le graphe est représenté dans la figure (Fig 9) .

$\gamma$	3.14159	3.16	3.1912	3.4814	4.4153	4.638	4.69	4.7	4.74
$\frac{1}{\alpha}$	0	$5 \times 10^{-3}$	$10^{-2}$	$2 \times 10^{-2}$	$3 \times 10^{-2}$	$5 \times 10^{-2}$	0.076	0.16	5

**Tableau.3**

**quelques valeurs de l'angle de séparation  $\gamma$  en fonction de  $\frac{1}{\alpha}$**

On déduit que, pour chaque valeur du nombre de *Weber*  $\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , il existe un et un seul angle de séparation  $\gamma$ , i.e., la solution du problème existe et elle est unique.

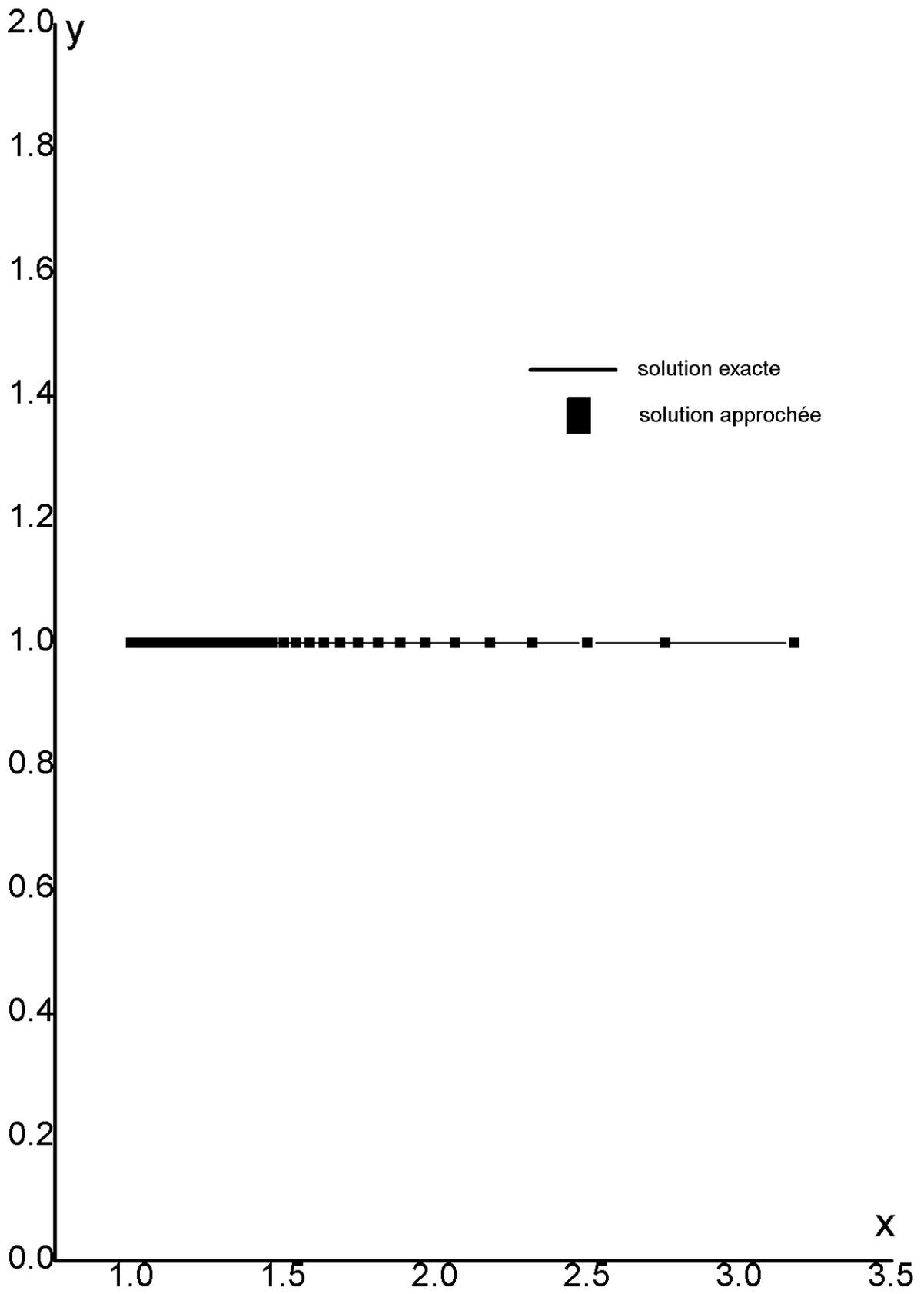


Fig 7 forme de la surface libre lorsque  
le nombre de Weber  $0 \rightarrow \infty$

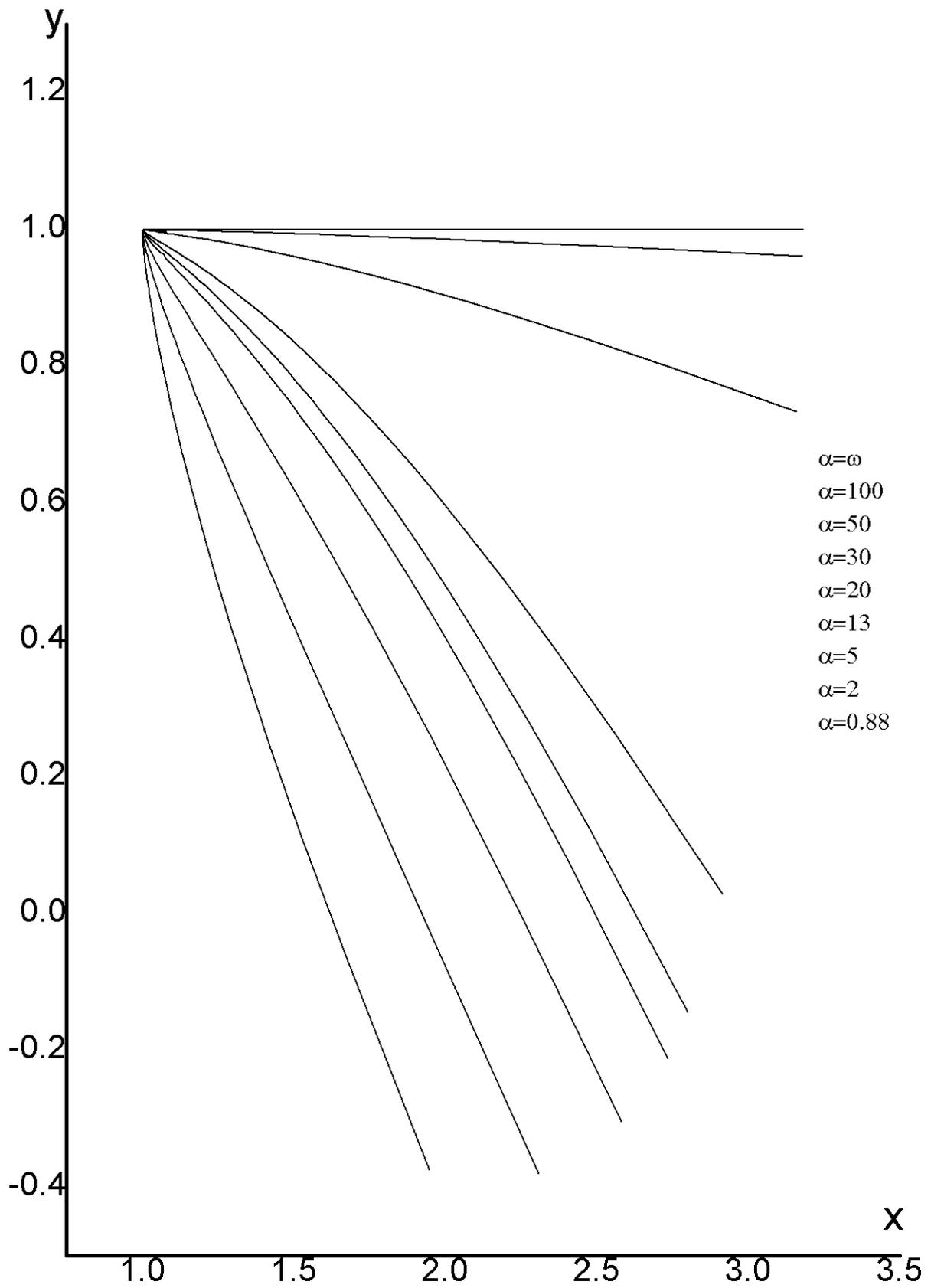


Fig 8 forme de la surface libre pour quelques valeurs du nombre de Weber  $\alpha$

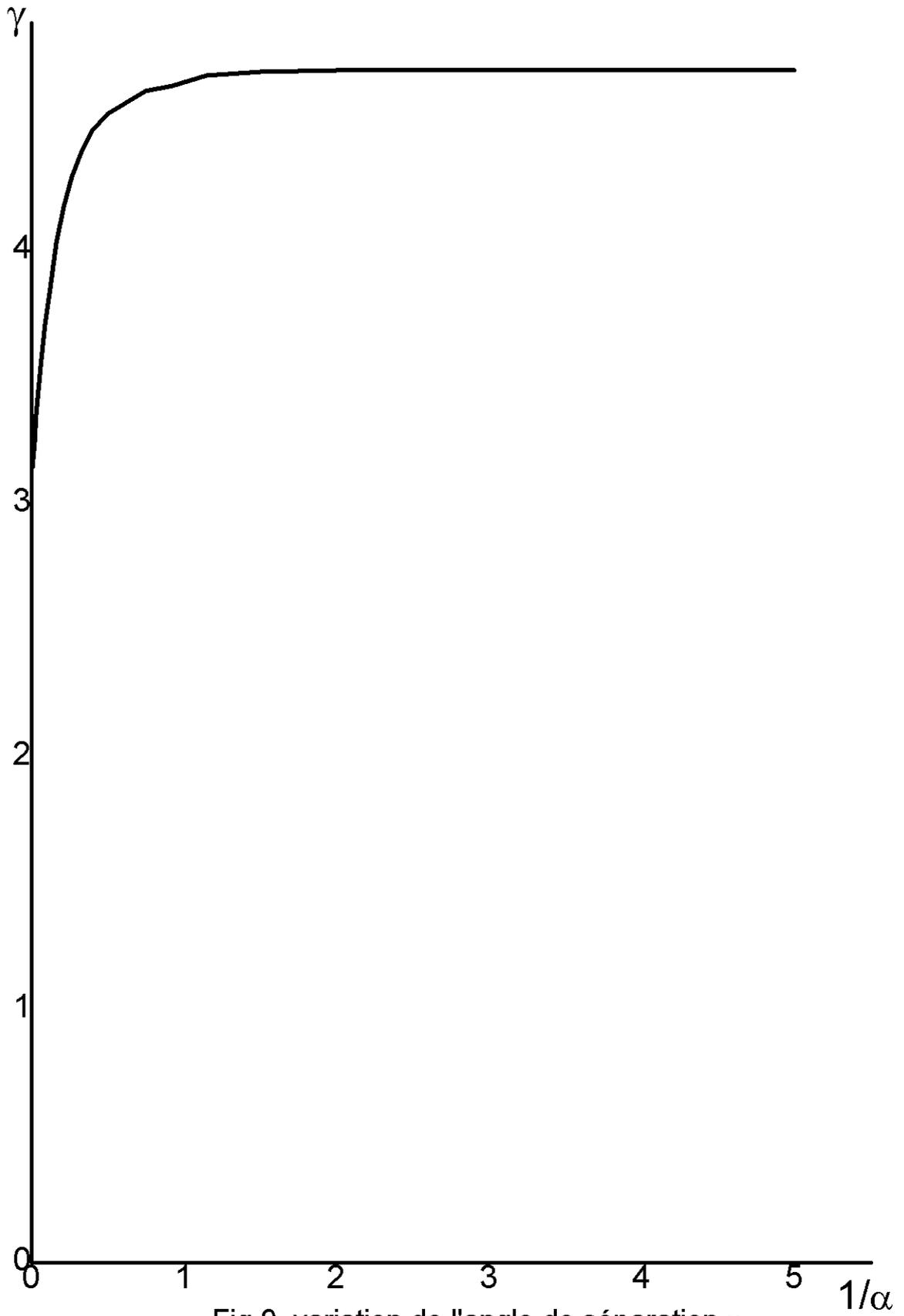


Fig 9 variation de l'angle de séparation  $\gamma$   
en fonction de  $1/\alpha$

# Chapitre 4

## Problème d'un écoulement au dessus d'un rectangle sans tension de surface et avec effet de gravité

**Résumé :** Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution numérique du problème considéré, en tenant compte de la force de gravité et en négligeant les effets de la tension de surface. La technique de résolution utilisée est celle de *Vanden-Broeck et Keller* [15]. Ce problème est caractérisé par le nombre de *Froude*  $F$ .

### **Contenu :**

- 4.1 Introduction.
- 4.2 Formulation générale du problème.
- 4.3 Procédure numérique.
- 4.4 Comportement locale de la vitesse au voisinage des singularités.
- 4.5 Formulation de la série.
- 4.6 Forme de la surface libre.
- 4.7 Résultats et discussion.

## 4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons considérés les effets de la tension de surface sur un écoulement au dessus d'une marche. Dans ce chapitre, nous tiendrons en compte l'effet de la force de gravité et en négligeant les effets de la tension de surface d'un écoulement potentiel, bidimensionnel et irrotationnel d'un fluide incompressible et non visqueux, au dessus d'un obstacle (de forme rectangulaire) de longueur  $\tilde{L}$  et de largeur  $\tilde{W}$  (Fig 10). Dans tout ce qui suit, les variables notées avec tilde( $\sim$ ) sont des variables avec leurs dimensions physiques et les variables sans tilde( $\sim$ ) sont des variables sans dimensions exemple  $\tilde{L}$  et  $L$ . L'écoulement sera caractérisé par le nombre de *Froude*  $F$  défini par :

$$F = \frac{\tilde{U}}{\sqrt{g\tilde{H}}} \quad (4.1)$$

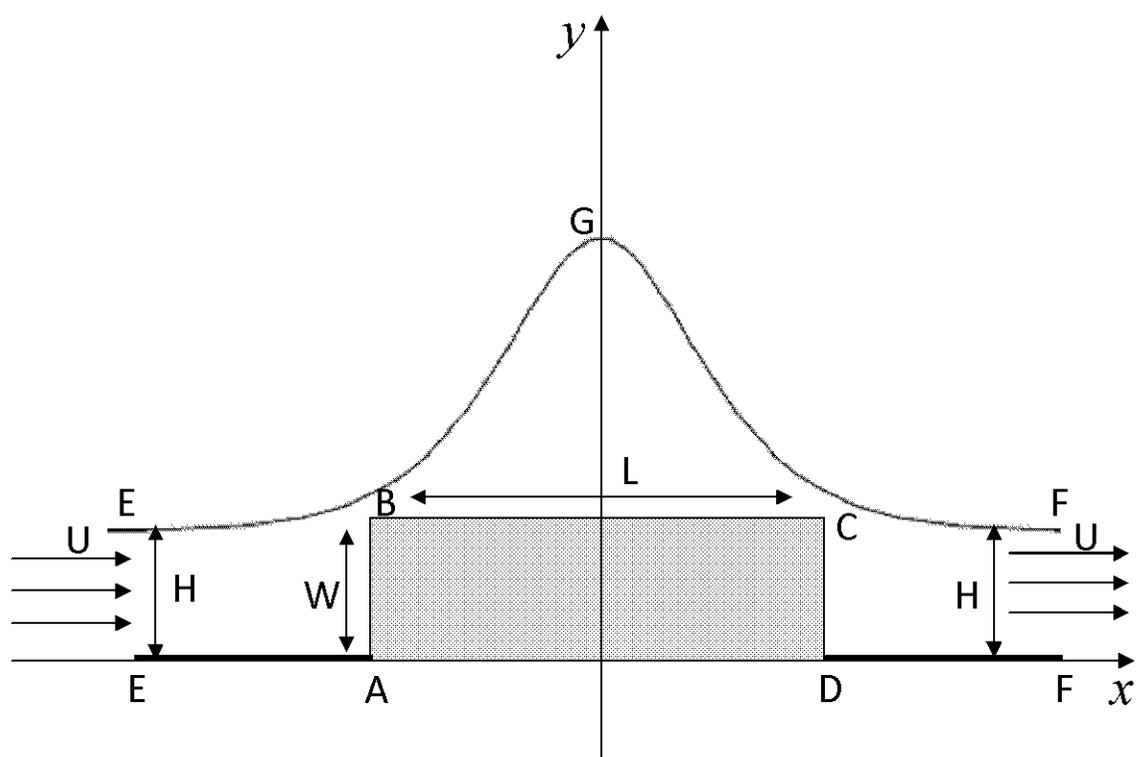
ici  $g$  est l'accélération de gravité,  $\tilde{U}$  et  $\tilde{H}$  sont respectivement la vitesse et la profondeur du fluide à l'infini.

Dû à la présence de la gravité, la solution exacte du problème est impossible à trouver explicitement. Pour cela, le problème sera résolu numériquement en utilisant la procédure de troncation de série, la solution sera déterminer pour chaque valeur du nombre de *Froude*  $F$ .

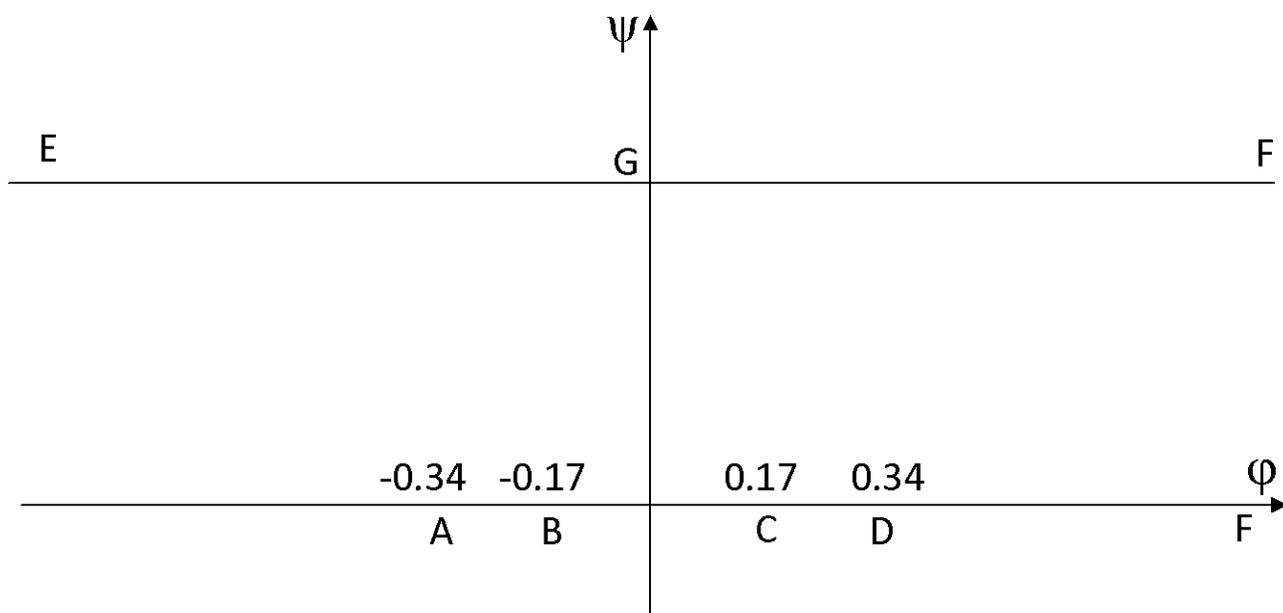
## 4.2 Formulation générale du problème

Nous considérons un écoulement potentiel, bidimensionnel et irrotationnel sur un plan horizontal  $x'ox$  d'un fluide incompressible et non visqueux passant au dessus d'un obstacle (de forme rectangulaire ) de longueur  $\tilde{L}$  et de largeur  $\tilde{W}$ . On choisi  $y'oy$  comme axe de symétrique (Fig 10). Nous supposons que lorsque  $|x| \rightarrow \infty$ , la vitesse de l'écoulement s'approche de la vitesse uniforme  $\tilde{U}$  et l'élévation du fluide est  $\tilde{H}$  où  $\tilde{H} \gg \tilde{W}$ .

Notons par  $\tilde{z} = \tilde{x} + i \tilde{y}$  le plan de la variable  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ ,  $\tilde{\xi} = \tilde{u} - i\tilde{v}$  où  $\tilde{u}$  et  $\tilde{v}$  sont



**Figure 10.** Plan de la variable  $z$ . la surface libre est  $EF$  pour  $F = 3.17$



**Figure 11.** Plan de la variable  $f = \varphi + i \psi$

respectivement les composantes du vecteur vitesse et par  $\tilde{f} = \tilde{\varphi} + i\tilde{\psi}$  la fonction potentielle complexe, où  $\tilde{\varphi}$  et  $\tilde{\psi}$  désignent respectivement la fonction potentielle et la fonction de courant. Puisque l'écoulement est potentiel, les composantes du vecteur vitesse sont alors données en fonction de  $\tilde{\varphi}$  et  $\tilde{\psi}$  par les relations :

$$\begin{cases} \tilde{u} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}} \\ \tilde{v} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} \end{cases}$$

Les relations ci-dessus montrent que la vitesse complexe  $\tilde{\xi}$  et la fonction potentielle  $\tilde{f}$  sont des fonctions analytiques de la variable  $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$ .

On transforme le plan complexe de la variable  $z$  à une bande infinie de la variable  $\tilde{f}$  tels que les points E , A, B, C, D et F dans plan complexe  $\tilde{z}$  se transforment aux points  $f_E = -\infty, f_A = -f_D, f_B = -f_C$  et  $f_F = +\infty$  dans le plan  $\tilde{f}$ . Le domaine d'écoulement dans le plan  $\tilde{f}$  est  $0 \leq \tilde{\psi} \leq \psi_1$  et  $-\infty \leq \tilde{\varphi} \leq +\infty$  où  $\psi_1 = \tilde{Q} = \tilde{U}\tilde{H}$  ,  $\tilde{Q}$  dénote la décharge du fluide ( Fig 11).

Le but du problème consiste à déterminer la fonction complexe  $\tilde{\varphi}(\tilde{z})$  telle que :

$$\Delta \tilde{\varphi} = 0$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} \tilde{v} = 0 & \text{sur EA et DF} \\ \tilde{u} = 0 & \text{sur AB et CD} \end{cases}$$

la condition de *Bernoulli* sur la surface libre est donnée par :

$$\frac{1}{2}\tilde{q}^2 + g\tilde{y} = \frac{1}{2}\tilde{U}^2 + g\tilde{H} = \text{const} \quad \text{sur EF} \quad (4.2)$$

où  $\tilde{q} = \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}$  le module du vecteur de vitesse,  $g$  est l'accélération de gravité et  $\tilde{H}$  est la profondeur du fluide à l'infini.

Avant de résoudre le problème, nous allons écrire l'équation (4.2) en variables non dimensionnelles, pour cela, on choisit  $\tilde{H}$  comme unité de longueur et  $\tilde{U}$  comme unité de vitesse et on pose :

$$\begin{cases} \frac{\tilde{q}}{\tilde{U}} = q \\ y = \frac{\tilde{y}}{\tilde{H}} \end{cases} \quad (4.3)$$

En substituant (4.3) dans (4.2) on trouve :

$$\frac{1}{2} (\tilde{U}q)^2 + g(y\tilde{H}) = \frac{1}{2}\tilde{U}^2 + g\tilde{H} = \text{const} \quad (4.4)$$

L'équation de *Bernoulli* (4.4) devient alors :

$$q^2 + \frac{2}{F^2}(y-1) = 1 \quad (4.5)$$

On note par  $\xi = u - iv$ , comme  $u - iv$  est analytique, on définit la fonction  $\tau - i\theta$  par la relation

$$\xi = u - iv = e^{\tau - i\theta}$$

où  $\theta$  désigne l'angle entre le vecteur vitesse et l'horizontale.

L'équation (4.5) en variables  $\tau$  et  $\theta$  sur la ligne de courant libre EF s'écrit alors :

$$e^{2\tau} + \frac{2}{F^2}(y-1) = 1 \quad \text{sur } \psi = 1 \quad (4.6)$$

### 4.3 Procédure numérique

Pour résoudre le problème numériquement on applique la technique de troncation de la série utilisée par *Vanden-Broeck et Keller*. Avant d'écrire la forme de la série, on transforme le domaine occupé par le fluide dans le plan  $f$  (Fig11), au demi-disque unité supérieur du plan de la variable  $t$  (Fig 12) par la transformation suivante :

$$f = \frac{2}{\pi} \ln \frac{1+t}{1-t} \quad (4.7)$$

la surface libre EF est transformé sur la circonférence du cercle (Fig 12) et les parois rigides sur les rayons du disque. Les points de La surface libre dans le plan  $t$  sont donnés par la relation :

$$t = |t| \exp(i\sigma) = \exp(i\sigma) \quad \text{tel que } 0 \leq \sigma \leq \pi \quad (4.8)$$

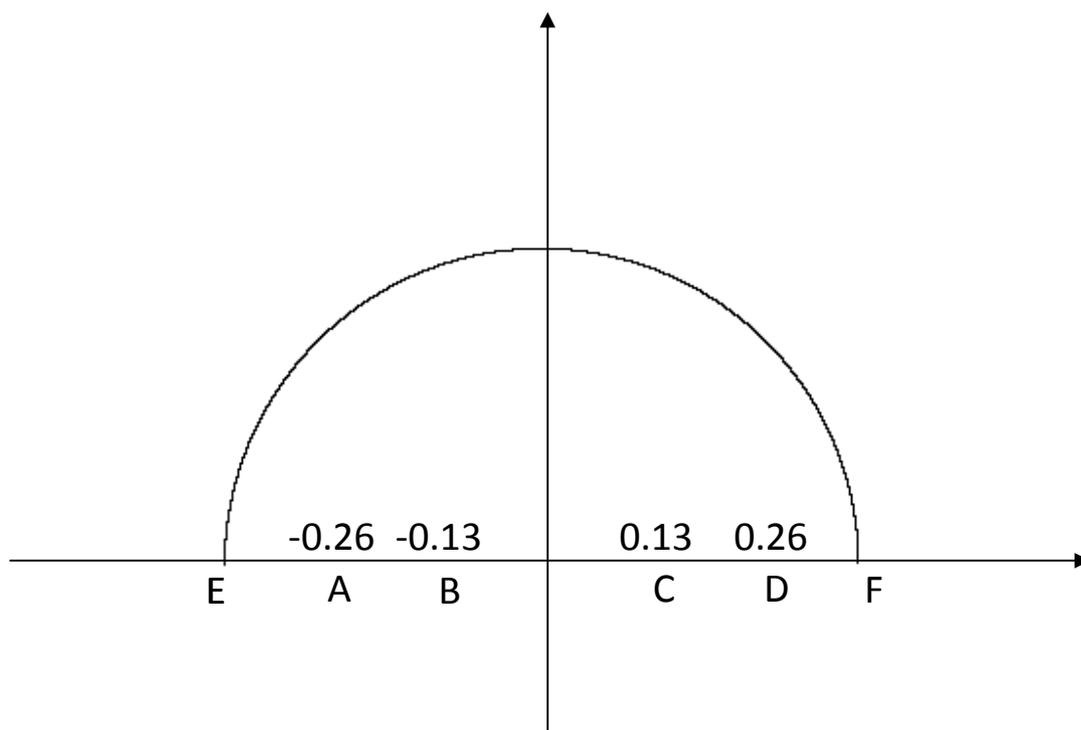
et dans le plan  $f$  par :

$$f = \varphi + i \quad \text{où } -\infty \leq \varphi \leq +\infty \quad \text{sur EF}$$

Les points E , A , B , C , D et F dans le plan  $f$  se transforment respectivement aux points  $t_E = -1, t_B = -t_C, t_A = -t_D$  et  $t_F = 1$  dans le plan  $t$  (Fig12).

En substituant (4.8) dans l'équation (4.7) on trouve :

$$f = \varphi + i = \frac{2}{\pi} \ln \frac{1 + e^{i\sigma}}{1 - e^{i\sigma}} \quad \text{sur EF}$$



*Figure 12. Plan de la variable  $t$*

alors

$$\frac{df}{d\sigma} = \frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{-2}{\pi \sin \sigma}$$

donc

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = \frac{-\pi \sin \sigma}{2} \quad \text{sur EF} \quad (4.9)$$

d'autre part on a :

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = e^{-\tau} \sin \theta$$

On dérive l'équation (4.6) par rapport à  $\sigma$  on trouve :

$$\frac{d}{d\sigma} (e^{2\tau}) + \frac{2}{F^2} \frac{dy}{d\sigma} = 0 \quad \text{sur EF} \quad (4.10)$$

En utilisant la relation suivante :

$$\frac{\partial y}{\partial \sigma} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = \frac{-2}{\pi \sin \sigma} e^{-\tau} \sin \theta$$

L'équation (4.10) devient :

$$\frac{d}{d\sigma} (e^{2\tau}) - \frac{4}{\pi \sin \sigma} \frac{1}{F^2} \times e^{-\tau} \sin \theta = 0 \quad \text{sur } \psi = 1 \quad (4.11)$$

Puisque  $\xi(t) = e^{\tau(t) - i\theta(t)}$  est analytique partout sauf aux points singuliers A, B, C et D, une étude nécessaire ces points est indispensable.

## 4.4 Comportement local de la vitesse au voisinage des singularités

Les points singuliers dans le plan de l'écoulement réel  $z$  sont :  $z_A = -L/2$  et  $z_B = -L/2 + iW$ ,  $z_C = L/2 + iW$  et  $z_D = L/2$  qui correspondent respectivement aux points  $t = t_A, t = t_B, t = t_C$  et  $t = t_D$  dans le plan  $t$ .

### 4.4.1 Comportement asymptotique au voisinage de $t = t_A$

L'écoulement au voisinage de  $t = t_A$  est un écoulement dans un angle de  $\frac{\pi}{2}$ , dans le plan  $z$  au voisinage de  $z_A = -L/2$ , la fonction complexe  $f$  est donnée par :

$$f \sim \frac{a}{2} (z - z_A)^2 + f_A \quad \text{lorsque } z \longrightarrow z_A \quad (4.12)$$

alors

$$\xi = \frac{df}{dz} \sim a (z - z_A) \quad \text{lorsque } z \longrightarrow z_A \quad (4.13)$$

Sur la surface libre  $\psi = 1$  alors :

$$f = \varphi + i = \frac{2}{\pi} \ln \frac{1+t}{1-t} \quad \text{sur EF} \quad (4.14)$$

de l'équation (4.12) et (4.14) on tire :

$$z - z_A \sim \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\pi} \ln \frac{1+t}{1-t} - f_A\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{quand } z \longrightarrow z_A \quad (4.15)$$

En substituant (4.15) dans (4.13) on trouve :

$$\xi \sim a \left[ \frac{4}{a\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \left( \ln e^{-\pi/2f_A} \frac{1+t}{1-t} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{quand } t \longrightarrow t_A$$

mais

$$\ln e^{-\pi/2f_A} \frac{(1+t)}{(1-t)} \sim k(t-t_A) \quad \text{lorsque } t \longrightarrow t_A$$

donc :

$$\xi \sim a \left[ \frac{4}{a\pi} \right]^{\frac{1}{2}} (k(t-t_A))^{\frac{1}{2}} \quad \text{quand } t \longrightarrow t_A$$

c'est-à-dire :

$$\xi = O(t-t_A)^{\frac{1}{2}} \quad \text{quand } t \longrightarrow t_A \quad (4.16)$$

#### 4.4.2 Comportement asymptotique au voisinage de $t = t_B$

L'écoulement au voisinage de  $t = t_B$  est un écoulement autour d'un angle  $\frac{3\pi}{2}$ , dans le plan  $z$  au voisinage de  $z_B = -L/2 + iW$ , la fonction complexe  $f$  est donnée par :

$$f \sim \frac{a}{n} (z - z_B)^n + f_B \quad \text{où } n = \frac{\pi}{\gamma} \quad \text{quand } z \longrightarrow z_B$$

d'où

$$(z - z_B)^n \sim \frac{n}{a} (f - f_B) \quad \text{lorsque } f \longrightarrow f_B$$

On remplace la relation de  $f$  donnée par (4.7) dans l'expression ci-dessus on trouve :

$$(z - z_B)^n \sim \frac{n}{a} \left( \frac{2}{\pi} \ln \frac{1+t}{1-t} - f_B \right) \quad t \longrightarrow t_B$$

i.e.,

$$(z - z_B)^n \sim \frac{2n}{a\pi} \left( \ln e^{-\pi/2f_B} \frac{1+t}{1-t} \right) \quad t \longrightarrow t_B$$

donc

$$(z - z_B) \sim \left( \frac{2n}{a\pi} \right)^{\frac{1}{n}} \left( \ln e^{-\pi/2f_B} \frac{1+t}{1-t} \right)^{\frac{1}{n}} \quad t \longrightarrow t_B$$

comme

$$\ln e^{-\pi/2f_B} \frac{1+t}{1-t} \sim k' (t - t_B) \quad t \longrightarrow t_B$$

et  $\gamma = \frac{3\pi}{2}$  donc :

$$z - z_B \sim \left( \frac{4}{3a\pi} \right)^{\frac{3}{2}} (k' (t - t_B))^{\frac{3}{2}} \quad t \longrightarrow t_B$$

puisque  $\xi = \frac{df}{dz}$  on trouve :

$$\xi \sim a \left( \frac{4k'}{3a\pi} \right)^{\frac{-1}{2}} (t - t_B)^{\frac{-1}{2}} \quad t \longrightarrow t_B$$

c-à-d

$$\xi \sim O(t - t_B)^{\frac{-1}{2}} \quad t \longrightarrow t_B \quad (4.17)$$

### 4.4.3 Comportement asymptotique au voisinage de $t = t_C$

L'écoulement au voisinage de  $t = t_C$  est un écoulement autour d'un angle  $\frac{3\pi}{2}$ , dans le plan  $z$  au voisinage de  $z_C = L/2 + iW$ , la fonction complexe  $f$  est donnée par :

$$f \sim \frac{a}{n} (z - z_C)^n + f_C \quad \text{où} \quad n = \frac{\pi}{\gamma} \quad \text{lorsque} \quad z \longrightarrow z_C$$

alors

$$\xi = \frac{df}{dz} \sim a (z - z_C)^{n-1} \quad \text{quand} \quad z \longrightarrow z_C \quad (4.18)$$

et

$$z - z_C \sim \left( \frac{2n}{a\pi} \left( \ln e^{-\pi/2f_C} \frac{1+t}{1-t} \right) \right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{quand} \quad t \longrightarrow t_C \quad (4.19)$$

En substituant (4.19) dans (4.18) on trouve :

$$\xi \sim a \left[ \left( \frac{2n}{a\pi} \left( \ln e^{-\pi/2f_C} \frac{1+t}{1-t} \right) \right)^{\frac{1}{n}} \right]^{n-1} \quad \text{quand} \quad t \longrightarrow t_C$$

mais :

$$\ln e^{-\pi/2 f_C} \frac{1+t}{1-t} \sim k'' (t - t_C) \quad \text{lorsque } t \longrightarrow t_C$$

et  $\gamma = \frac{3\pi}{2}$  on trouve :

$$\xi \sim a \left( \frac{4k''}{3a\pi} \right)^{\frac{-1}{2}} (t - t_C)^{\frac{-1}{2}} \quad \text{lorsque } t \longrightarrow t_C$$

c-à-d

$$\xi \sim O(t - t_C)^{\frac{-1}{2}} \quad \text{lorsque } t \longrightarrow t_C \quad (4.20)$$

#### 4.4.4 Comportement asymptotique au voisinage de $t = t_D$

L'écoulement au voisinage de  $t = t_D$  est un écoulement dans un angle de  $\frac{\pi}{2}$ , dans le plan  $z$  au voisinage de  $z_D = L/2$ , la fonction complexe  $f$  est donnée par :

$$f \sim \frac{a}{n} (z - z_C)^n + f_D, \quad n = \frac{\pi}{\gamma} \quad \text{lorsque } z \longrightarrow z_D$$

alors

$$\xi = \frac{df}{dz} \sim a (z - z_D)^{n-1} \quad \text{lorsque } z \longrightarrow z_D \quad (4.21)$$

et

$$z - z_D \sim \left( \frac{n}{a} \right)^{\frac{1}{n}} \left( \frac{2}{\pi} \ln \frac{1+t}{1-t} - f_D \right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{quand } z \longrightarrow z_D \quad (4.22)$$

En substituant (4.22) dans (4.21) on trouve :

$$\xi \sim a \left[ \left( \frac{2n}{a\pi} \right)^{\frac{1}{n}} \left( \ln e^{-\pi/2f_D} \frac{1+t}{1-t} \right)^{\frac{1}{n}} \right]^{n-1} \quad \text{quand } t \longrightarrow t_D$$

mais :

$$\ln e^{-\pi/2f_D} \frac{1+t}{1-t} \sim k''' (t - t_D) \quad \text{lorsque } t \longrightarrow t_D$$

et  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  donc :

$$\xi \sim a \left[ \frac{4k'''}{a\pi} \right]^{\frac{1}{2}} (t - t_D)^{\frac{1}{2}} \quad \text{quand } t \longrightarrow t_D$$

c'est-à-dire :

$$\xi = O(t - t_D)^{\frac{1}{2}} \quad \text{quand } t \longrightarrow t_D \quad (4.23)$$

## 4.5 Formulation de la série

Après avoir déterminé le comportement local de l'écoulement au voisinage des singularités  $t = t_A, t = t_B, t = t_C$  et  $t = t_D$ , on cherche  $\xi(t)$  sous la forme :

$$\xi = g(t) \exp \Omega(t) \quad (4.24)$$

où  $g(t)$  contient les singularités et les zéros donnés en (4.16) , (4.17) , (4.20) et (4.23).  
L'équation (4.24) devient alors :

$$\xi = u - iv = (t - t_A)^{\frac{1}{2}} (t - t_B)^{\frac{-1}{2}} (t - t_C)^{\frac{-1}{2}} (t - t_D)^{\frac{1}{2}} \times \exp \left( \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^{2k} \right)$$

On pose  $t_B = -t_C = a$ ,  $t_A = -t_D = b$ , l'équation ci-dessus s'écrit alors :

$$\xi = (t^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} (t^2 - a^2)^{\frac{-1}{2}} \times \exp \left( \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^{2k} \right) \quad (4.25)$$

où les coefficients  $a_k$  sont à déterminer, la série doit être convergente dans le demi-disque unité du plan  $t$  . On choisi tous les  $a_k$  des réelles. En substituant (4.8) dans (4.25) on obtient :

$$\xi = e^{\tau - i \theta} = (1 + a^4 - 2a^2 \cos 2\sigma)^{\frac{-1}{4}} \times e^{-i K} \times (1 + b^4 - 2b^2 \cos 2\sigma)^{\frac{1}{4}} \times e^{i G} \times \exp \left[ \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos 2k\sigma + i \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \sin 2k\sigma \right]$$

$$\text{tel que : } K = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{\sin 2\sigma}{\cos 2\sigma - a^2} \quad \text{et} \quad G = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{\sin 2\sigma}{\cos 2\sigma - b^2}$$

En conséquence :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(\sigma) = \frac{1}{2} \left( \tan^{-1} \frac{\sin 2\sigma}{\cos 2\sigma - a^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \tan^{-1} \frac{\sin 2\sigma}{\cos 2\sigma - b^2} \right) \\ - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \sin 2k\sigma \\ e^{\tau(\sigma)} = (1 + a^4 - 2a^2 \cos 2\sigma)^{\frac{-1}{4}} \times (1 + b^4 - 2b^2 \cos 2\sigma)^{\frac{1}{4}} \times \\ \exp \left( \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos 2k\sigma \right) \end{array} \right. \quad (4.26)$$

En substituant  $\tau(\sigma)$  et  $\theta(\sigma)$  par leurs valeurs dans l'équation (4.11) on trouve :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{-a^2 \sin 2\sigma}{1 + a^4 - 2a^2 \cos 2\sigma} + \frac{b^2 \sin 2\sigma}{1 + b^4 - 2b^2 \cos 2\sigma} \right) \times \\ & \left[ (1 + a^4 - 2a^2 \cos 2\sigma)^{\frac{-1}{4}} \times (1 + b^4 - 2b^2 \cos 2\sigma)^{\frac{1}{4}} \times \exp \left( \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos 2k\sigma \right) \right]^2 \\ & - \frac{2}{\pi \sin \sigma} \times \frac{1}{F^2} \times \left[ (1 + a^4 - 2a^2 \cos 2\sigma)^{\frac{1}{4}} \times (1 + b^4 - 2b^2 \cos 2\sigma)^{\frac{-1}{4}} \times \right. \\ & \left. \exp \left( - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos 2k\sigma \right) \right] \times \\ & \sin \left[ \frac{1}{2} \left( \tan^{-1} \frac{\sin 2\sigma}{\cos 2\sigma - a^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \tan^{-1} \frac{\sin 2\sigma}{\cos 2\sigma - b^2} \right) \right. \\ & \left. - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \sin 2k\sigma \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Pour déterminer les coefficients  $a_k$  de la série (4.27). On tronque la série après  $N$  termes. On trouve les  $N$  coefficients  $a_k$  par collocation, ainsi; on discrétise l'intervalle  $[0, \pi]$  en  $N$  points, on pose :

$$\sigma_I = \frac{\pi}{N} \left( I - \frac{1}{2} \right), \quad I = 1, 2, \dots, N \quad (4.28)$$

En satisfaisant l'équation (4.27) en des points de collocation (4.28) on obtient un système de  $N$  équations algébriques non linéaires à  $N$  inconnus  $a_1, a_2, \dots, a_N$ . C'est-à-dire

$$\begin{aligned} & \left( \frac{-a^2 \sin 2\sigma_I}{1 + a^4 - 2a^2 \cos 2\sigma_I} + \frac{b^2 \sin 2\sigma_I}{1 + b^4 - 2b^2 \cos 2\sigma_I} \right) \times \\ & \left[ (1 + a^4 - 2a^2 \cos 2\sigma_I)^{\frac{-1}{4}} \times (1 + b^4 - 2b^2 \cos 2\sigma_I)^{\frac{1}{4}} \times \exp \left( \sum_{k=1}^N a_k \cos 2(k-1)\sigma_I \right) \right]^2 \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{\pi \sin \sigma_I} \times \frac{1}{F^2} \times \left[ \begin{aligned} & (1 + a^4 - 2a^2 \cos 2\sigma_I)^{\frac{1}{4}} \times (1 + b^4 - 2b^2 \cos 2\sigma_I)^{\frac{-1}{4}} \times \\ & \exp \left( -\sum_{k=1}^N a_k \cos 2(k-1)\sigma_I \right) \end{aligned} \right] \times \\
& \sin \left[ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( \tan^{-1} \frac{\sin 2\sigma_I}{\cos 2\sigma_I - a^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \tan^{-1} \frac{\sin 2\sigma_I}{\cos 2\sigma_I - b^2} \right) \\ & - \sum_{k=1}^N a_k \sin 2(k-1)\sigma_I \end{aligned} \right] = 0 \tag{4.29}
\end{aligned}$$

où  $I = 1, 2, \dots, N$ .

Pour calculer les coefficients  $a_k$  pour différentes valeurs du nombre de *Froude*  $F$ . On utilise la méthode de *Newton* et l'algorithme de *Jordan* avec pivot total implicite (cf annexe).

## 4.6 Forme de la surface libre

Pour déterminer la forme de la surface libre, on utilise la relation suivante :

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} + i \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{1}{u - iv} = e^{-\tau + i\theta}$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = e^{-\tau} \cos \theta \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} = e^{-\tau} \sin \theta \end{cases} \tag{4.30}$$

avec  $\frac{\partial x}{\partial \sigma} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}$  et  $\frac{\partial y}{\partial \sigma} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}$  sur la surface libre.

En substituant (4.9), (4.26) et en utilisant (4.30) on trouve  $\frac{\partial x}{\partial \sigma}, \frac{\partial y}{\partial \sigma}$  en chaque point  $\sigma_I$  i.e.,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial \sigma}(\sigma_I) = \frac{-2}{\pi \sin \sigma_I} \times \left[ \begin{array}{l} (1 + a^4 - 2a^2 \cos 2\sigma_I)^{\frac{1}{4}} \times (1 + b^4 - 2b^2 \cos 2\sigma_I)^{\frac{-1}{4}} \times \\ \exp \left( - \sum_{k=1}^N a_k \cos 2(k-1)\sigma_I \right) \\ \times \cos \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left( \tan^{-1} \frac{\sin 2\sigma_I}{\cos 2\sigma_I - a^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \tan^{-1} \frac{\sin 2\sigma_I}{\cos 2\sigma_I - b^2} \right) \\ - \sum_{k=1}^N a_k \sin 2(k-1)\sigma_I \end{array} \right] \end{array} \right] \\ \frac{\partial y}{\partial \sigma}(\sigma_I) = \frac{-2}{\pi \sin \sigma_I} \times \left[ \begin{array}{l} (1 + a^4 - 2a^2 \cos 2\sigma_I)^{\frac{1}{4}} \times (1 + b^4 - 2b^2 \cos 2\sigma_I)^{\frac{-1}{4}} \times \\ \exp \left( - \sum_{k=1}^N a_k \cos 2(k-1)\sigma_I \right) \\ \times \sin \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left( \tan^{-1} \frac{\sin 2\sigma_I}{\cos 2\sigma_I - a^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \tan^{-1} \frac{\sin 2\sigma_I}{\cos 2\sigma_I - b^2} \right) \\ - \sum_{k=1}^N a_k \sin 2(k-1)\sigma_I \end{array} \right] \end{array} \right] \end{array} \right. \quad (4.31)$$

où  $I = 1, 2, \dots, N$ .

Ainsi, la forme de la surface libre est obtenue en intégrant numériquement les relations (4.31) avec la condition initiale  $x(0) = -8$  et  $y(0) = 1$ . Les résultats présentés ici sont obtenus pour  $N = 40$ .

## 4.7 Résultats et discussion

On utilise la méthode numérique décrite précédemment pour résoudre le système non linéaire (4.29) pour différentes valeurs du nombre de *Froude*  $F$ . On trouve pour chaque valeur de  $F$  les coefficients  $a_k$  de la série (4.24), le tableau ci-dessous présente quelques valeurs de  $a_k$  en fonction du nombre de *Froude*  $F$ .

$F$	$a_1$	$a_2$	$a_{10}$	$a_{20}$	$a_{30}$	$a_{40}$
1000	-4.6607	-2.9224 $10^{-2}$	3.3327 $10^{-6}$	3.8379 $10^{-7}$	1.5502 $10^{-7}$	1.8438 $10^{-8}$
5.5	-1.3559	-2.9224 $10^{-2}$	3.33272 $10^{-6}$	3.83794 $10^{-7}$	1.55027 $10^{-7}$	1.8437 $10^{-8}$
3.17	$-3.9947 \times 10^{-1}$	-2.9224 $10^{-2}$	3.33270 $10^{-6}$	3.83798 $10^{-7}$	1.550276 $10^{-7}$	1.8438 $10^{-8}$
1.31	$-3.9947 \times 10^{-1}$	-2.9224 $10^{-2}$	3.33270 $10^{-6}$	3.83798 $10^{-7}$	1.550276 $10^{-7}$	1.8438 $10^{-8}$
0.64	$7.8055 \times 10^{-2}$	-2.9224 $10^{-2}$	3.33272 $10^{-6}$	3.83787 $10^{-7}$	1.55025 $10^{-7}$	1.84381 $10^{-8}$
0.33	$5.1963 \times 10^{-1}$	-2.9223 $10^{-2}$	3.33266 $10^{-6}$	3.83802 $10^{-7}$	1.55013 $10^{-7}$	1.84392 $10^{-8}$
0.01	1.5344	-8.9481 $10^{-2}$	7.6802 $10^{-3}$	1.0696 $10^{-2}$	4.7301 $10^{-5}$	-5.1556 $10^{-5}$

**Tableau.4**

quelques valeurs des coefficients  $a_k$  pour quelques valeurs du nombre de Froude  $F$

Comme il apparaît dans le tableau 4 les coefficients  $a_k$  sont décroissants. On constate aussi que la série  $\sum_{k=2}^{+\infty} a_k t^{2(k-1)}$  est absolument convergente car on a :

$$\left| \sum_{k=2}^{+\infty} a_k t^{2(k-1)} \right| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} |a_k| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < \infty \quad k \geq 2$$

#### 4.7.1 Conclusion

- Nous avons déterminé avec précision la forme de la surface libre au dessus d'un obstacle de forme rectangulaire. Ces résultats dépendent du paramètre de Froude  $F$ .

- Lorsque  $F$  est assez grand ( $F \rightarrow \infty$ ), l'effet de la gravité est négligeable, les conditions au bord (sur la surface libre) se réduisent à

$$u^2 + v^2 = 1$$

Dans ce cas la solution du problème peut-être obtenue explicitement en utilisant la méthode de transformation d'hodographe de *Kirchhoff* ou les transformations conformes vue dans le chapitre 2. La figure (13) présente la forme de la surface libre pour  $F \rightarrow \infty$ .

- Lorsque  $F$  est négligeable ( $F \rightarrow 0$ ), l'effet de la gravité est assez important, dans ce cas la forme de la surface libre s'aplatie et tend vers une droite horizontale parallèle à l'axe  $x'ox$  (Fig14).

- Pour  $F \neq 0$  et  $F \neq \infty$ , ( $0 < F < \infty$ ) la figure (15) présente la forme de la surface libre pour quelques valeurs du nombre de *Froude*  $F$ , ce qui montre l'influence de la gravité sur la surface libre.

- Le cas où  $F > 1$  l'écoulement est dite supercritique, pour  $F < 1$ , l'écoulement est dite subcritique. La figure (16) montre la variation du nombre de  $F^2$  en fonction de  $g$ .

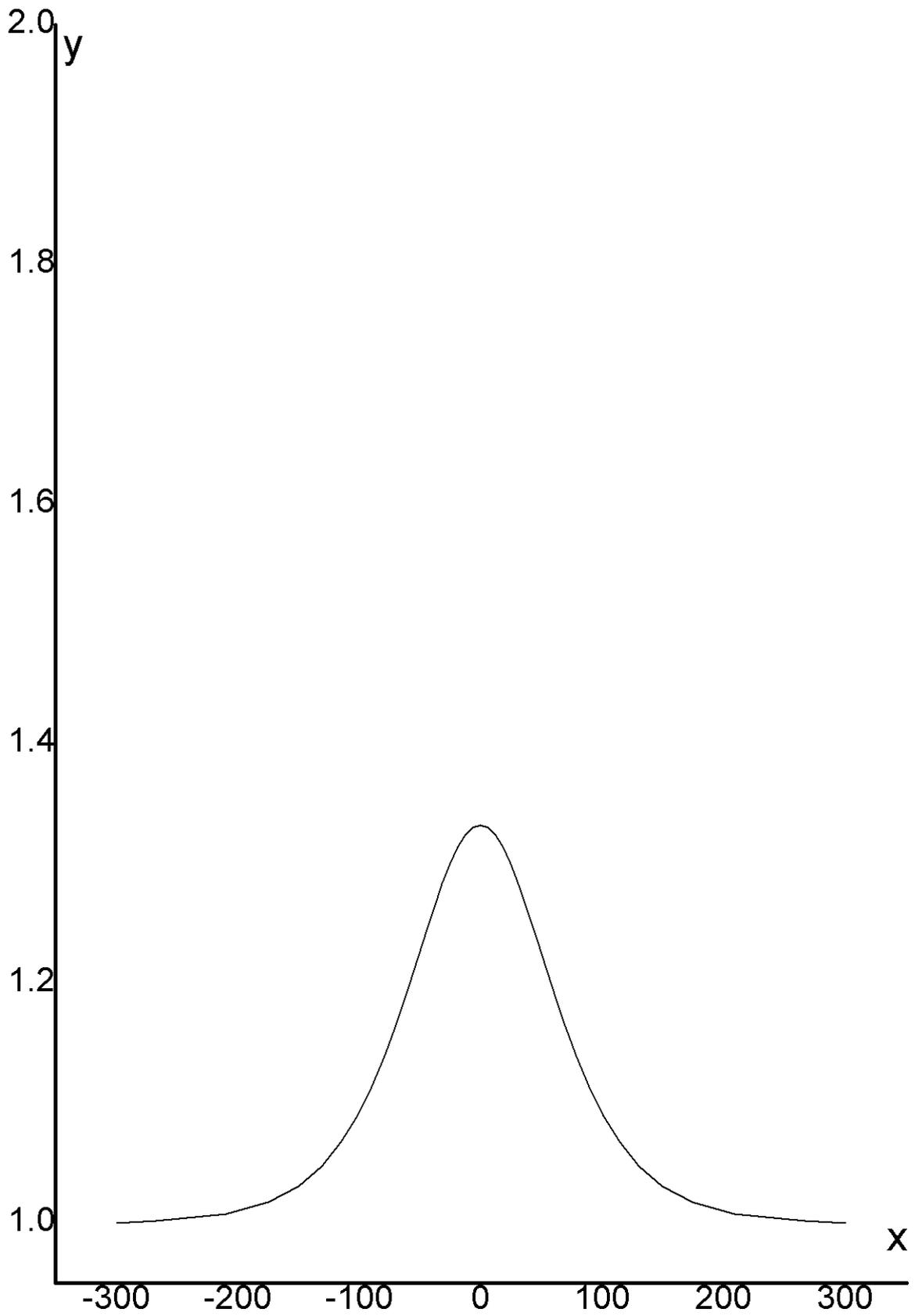


Fig 13 forme de la surface libre pour  $F \rightarrow \infty$

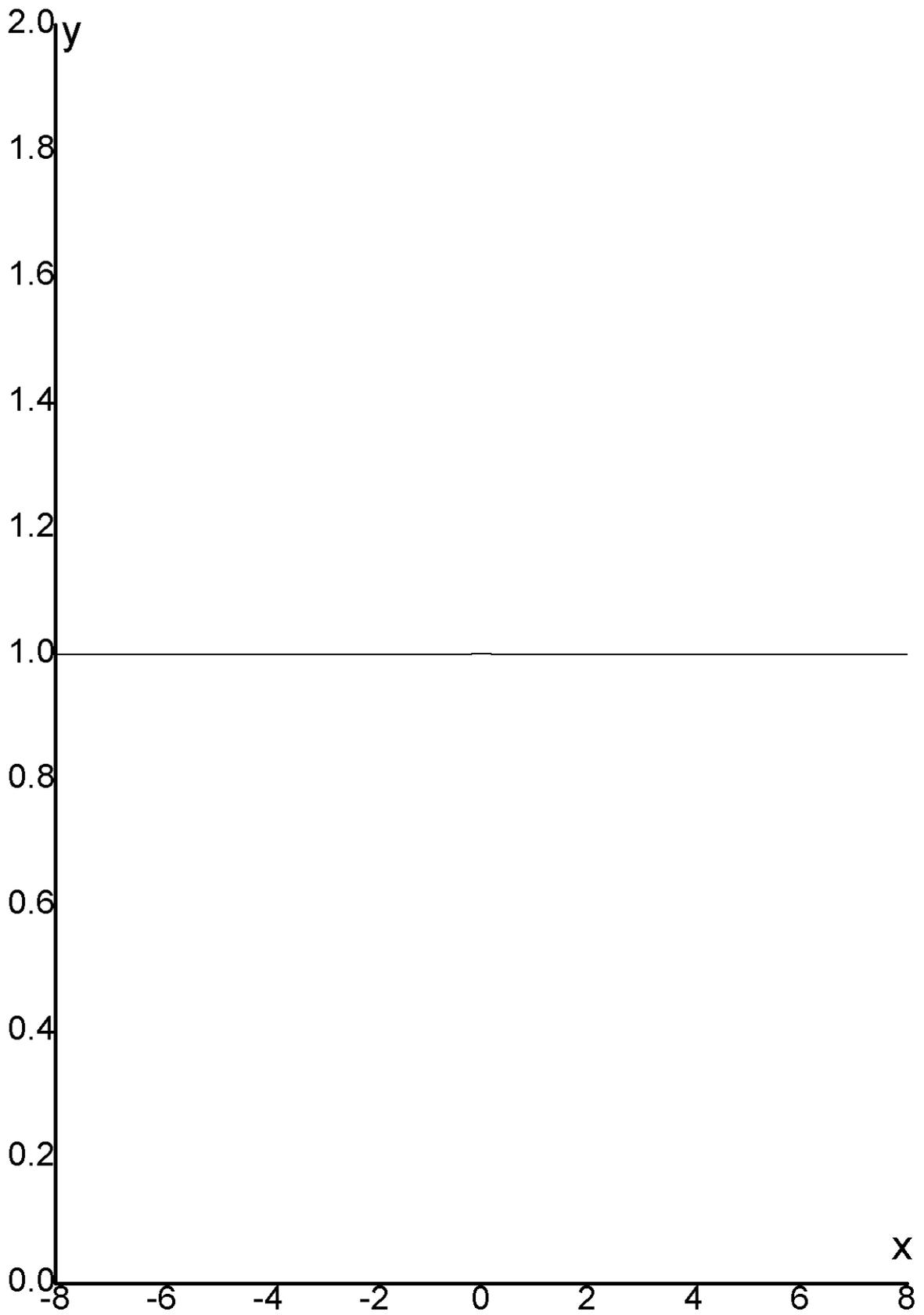


Fig 14 forme de la surface libre pour  $F = 0.01$

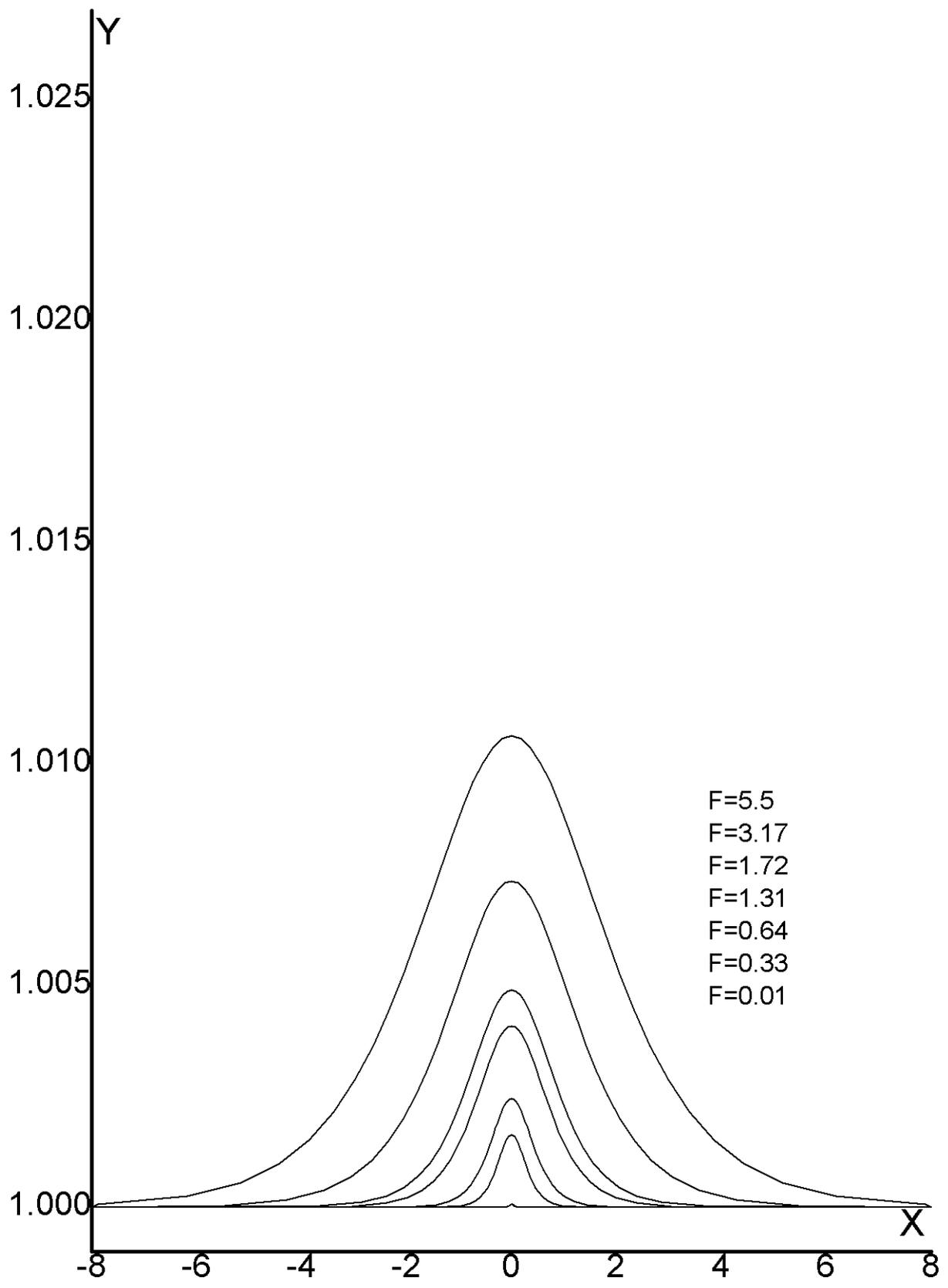


Fig 15 forme de la surface libre pour quelques valeurs du nombre de Froude F

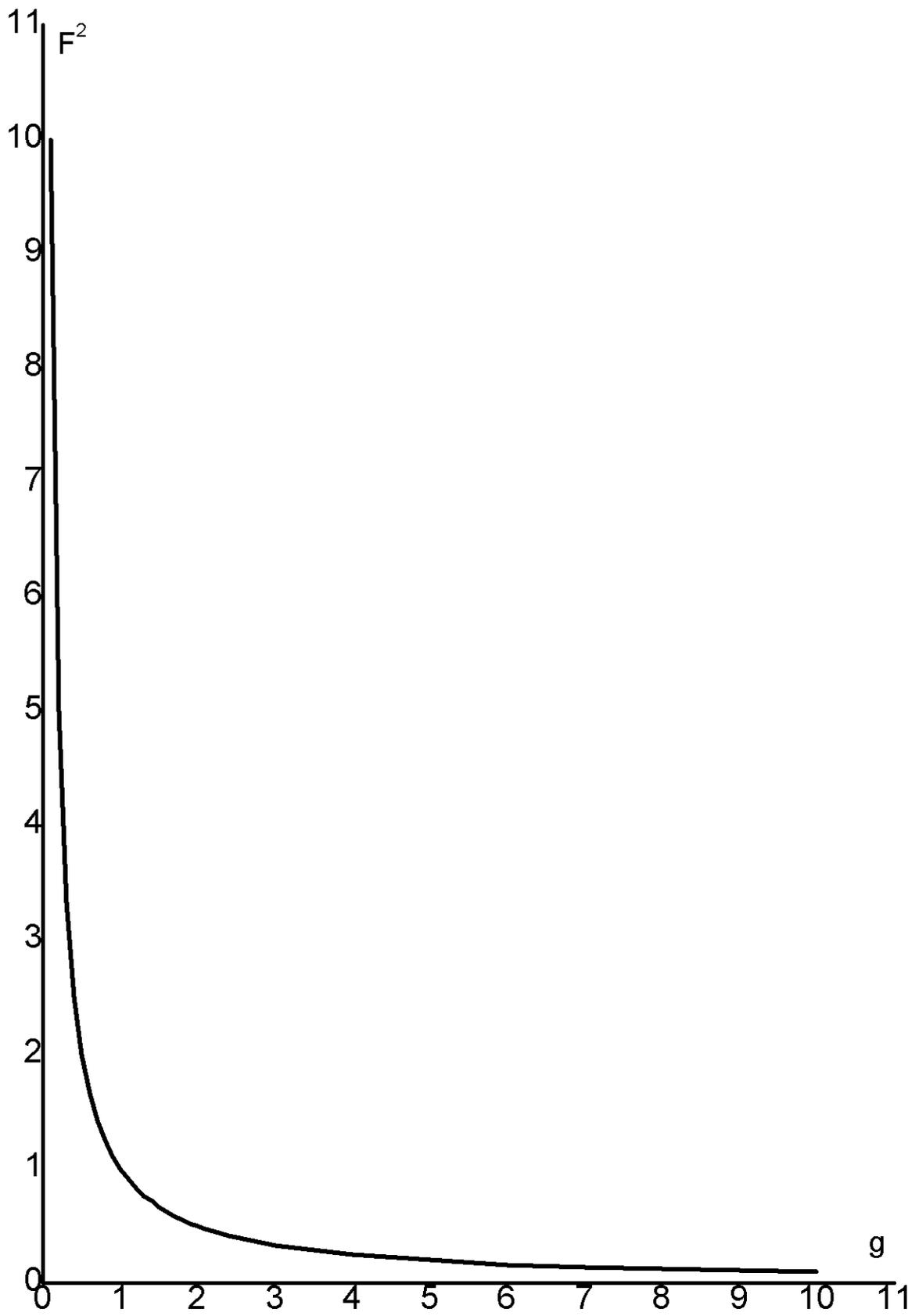


Fig 16 variation de  $F^2$  en fonction de  $g$

# Annexe

## Contenu :

A.1 Méthode de *Newton*

A.2 Algorithme de *Newton* pour la résolution des systèmes non linéaires  $f(x) = 0$

A.3 Algorithme de *Jordan* avec pivotation totale implicite

A.4 Programme de *Newton*

### A.1 Méthode de Newton

Après un rappel sur la méthode de *Newton* pour la résolution d'un système d'équation non linéaire, nous donnons son algorithme, ainsi que l'algorithme de *Jordan* utilisant la méthode du pivot total implicite pour résoudre un système d'équation linéaire. A la fin nous présentons le programme écrit en fortran 90 que nous avons utilisé pour résoudre le système (3.38). La méthode de *Newton* consiste à résoudre le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_3(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{S.1})$$

où les  $f_i$  sont fonctions réelles non linéaires des variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . On peut noter le système suivant sous la forme :

$$F(X) = 0 \text{ où } X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$$

Le problème est donc de trouver un ensemble de  $n$  valeurs réelles :

$X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^t$  vérifiant simultanément les  $n$  équations du système (S.1) Notons que si chaque fonction  $f_i$  est continue et continûment différentiable, alors, par un développement de *Taylor* dans le voisinage d'un estimé  $X^{(k)}$  proche de  $X^*$  ( obtenu à la  $k$ -ième itération ), on obtient :

$$f_i(X^*) = f_i(X^{(k)}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(X)}{\partial x_j} \Big|_{X=X^{(k)}} (x_j^* - x_j^{(k)}) + \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n (x_j^* - x_j^{(k)}) (x_r^* - x_r^{(k)}) \frac{\partial^2 f_i(X)}{\partial x_j \partial x_r} \Big|_{X=X^{(k)}} + \dots = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{S.2})$$

si  $X^{(k)}$  est un estimé proche de  $X^*$  les termes  $(x_j^* - x_j^{(k)})^p$   $p \geq 2$ , sont négligeables.

Le système (S.2) s'écrit alors :

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(X)}{\partial x_j} \Big|_{X=X^{(k)}} (x_j^* - x_j^{(k)}) = -f_i(X^{(k)}) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{S.3})$$

ou en terme matriciel

$$E^{(k)} \cdot \Delta X^{(k)} = F^{(k)} \quad (\text{S.4})$$

avec

$$E_{ij}^{(k)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(X)}{\partial x_j} \Big|_{X=X^{(k)}} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix}, \Delta X_j^{(k)} = x_j^* - x_j^{(k)} \text{ et } F_i^{(k)} = -f_i(X^{(k)})$$

L'équation (S.4) est un système linéaire, où toutes les quantités sont connues sauf les  $\Delta X^{(k)}$ . En utilisant la méthode de *Jordon* avec stratégie du pivot total implicite pour déterminer les  $\Delta X^{(k)}$  dont on présentera dans la suite son algorithme.  $\Delta X^{(k)}$  est l'estimé de l'erreur commise en approximant  $X^*$  par  $X^{(k)}$ . On peut donc obtenir un meilleur estimé  $X^{(k+1)}$  de  $X^*$  par

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \Delta X^{(k)} \quad (\text{S.5})$$

On continue jusqu'à ce que  $|f_i(X^{(k+1)})| < \epsilon$ .

## A.2 Algorithme de Newton pour la résolution de systèmes non linéaires

$F(X)=0$

Etant donnés  $X^{(0)}, \epsilon$

1. Calculer

$$E_{ij}^{(k)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(X)}{\partial X_j} \Big|_{X=X^k} \quad \left. \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, n \end{array} \right\}$$

$$F_i^{(k)} = -f_i(X^{(k)})$$

2. Résoudre le système linéaire :

$$\left. \sum_{j=1}^n E_{ij}^{(k)} \Delta X_j^{(k)} = F_i^{(k)} \right\} i = 1, 2, \dots, n$$

3. Calculer

$$X_i^{(k+1)} = X_i^{(k)} + \Delta X_i^{(k)} \quad \left. \right\} i = 1, 2, \dots, n$$

4. Si

$$|f_i(X^{(k+1)})| < \epsilon \quad i = 1, 2, \dots, n$$

est vérifié, arrêter

### A.3 Résolution d'un système linéaire $AX = b$ par la méthode de Jordan avec stratégie du pivot total implicite

**Algorithme :**

- Choix du pivot

$$p_k = a_{l_k c_k} \quad \text{où } a_{l_k c_k} = \max_{ij} |a_{ij}|$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad i \neq l_1, l_2, \dots, l_{k-1}$$

$$j = 1, 2, \dots, n \quad j \neq c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$$

tel que  $k = 1, 2, \dots, n$

- Normalisation

$$a_{l_k j} = \frac{a_{l_k j}}{p_k} \quad j = 1, 2, \dots, n + 1$$

- Réduction

$$\left. \begin{array}{l} w = a_{i c_k} \\ a_{ij} = a_{ij} - w a_{l_k j} \end{array} \right\} j = 1, 2, \dots, n + 1 \quad \left. \right\} i = 1, 2, \dots, n \text{ et } i \neq l_k$$

- Remise en ordre

$$x_{c_k} = a_{l_k, n+1} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

#### A.4 PROGRAMME DE NEWTON

```
TEXTERNAL sum1,sum2,sum3,sum4
PARAMETER(n=50,nmaxb=100,h2=314159.D-5/(2.*n))
PARAMETER(Epsilon=1.D-5,Pivotmin=1.D-3)
DOUBLE PRECISION A(n-1),sum1,sum2,sum3,sum4,h,F,alpha,t(n),
1 h1(n-1),deltaA(n,1),y(n+1),sa(n),EF(n,n+1),f1(n),f2(n),x(n+1),
1 A1(n-1),lamda,lamda1
pi=314159.D-5
C be=4*datan(1.0d0)
OPEN(7,file='E :\ai_2.txt')
READ(7,*)lamda,(A(i),i=1,n-1)
CLOSE(7)
C DATA alpha/10000.d0/
x(1)=1.
y(1)=1.
WRITE(*,*)'APRES QUELQUES INSTANTS LES RESULTATS
SERONT AFFICHES'
DO 400 nbiteration=1,nmaxb
WRITE(*, '(/1X,80(1h*)/1x,A,I3)')'iteration :',nbiteration
C _____
C *****LA FORMULE QUI EXPRIME LES ANGLE SIGMA*****
C _____
DO 1 i=1,n
t(i)=(314159.D-5/(2.*n))*(float(i)-5.d-1)
1 CONTINUE
C _____
C *****EVALUATION DE LA FONCTION F*****
C _____
```

```

      DO 51 i=1,n
51  EF(i,n+1)=F(A,t(i),n-1,alpha,lamda)
C   WRITE(*,*)EF(1,n)
C   _____
C *****EVALUATION DE LA JACOBIENNE E*****
C   _____

      DO 40 i=1,n
        DO 41 j=1,n-1
          DO 42 k=1,n-1
            h1(k)=0.001
42    CONTINUE
          DO 43 k=1,n-1
            IF(k.NE.j)THEN
              h1(k)=0.
            END IF
43    CONTINUE
          DO 44 k=1,n-1
44    A1(k)=A(k)+h1(k)
            lamda1=lamda+0.001
            EF(i,j)=(F(A1,t(i),n-1,alpha,lamda)-F(A,t(i),n-1,alpha,lamda))/
1 0.001
41    CONTINUE
            EF(i,n)=(F(A,t(i),n-1,alpha,lamda1)-F(A,t(i),n-1,alpha,lamda))/
1 0.001
40    CONTINUE
C   _____
C *****CALCUL DE LA VITESSE*****
C   _____

```

```

R1=(exp(pi/2)-sqrt(exp(pi)-1.))
R0=(exp(pi)-sqrt(exp(2.*pi)-1.))
DO 3 i=1,n
sa(i)=(1.+R0**(4.)-(2.*R0**(2.))*DCOS(2.*(t(i))))
1 *DEXP(2.*sum2(A,t(i),n-1))
1 *(1./(1.+R1**(4.)-(2.*R1**(2.))*DCOS(2.*(t(i)))))
1 *((2.*DSIN(t(i))/2.)**(4.*(1.-lamda/pi)))
3 CONTINUE
C -----
CALL JORDAN(EF,n,deltaA,pivotmin)
C -----
C REACTUALISATION DU VECTEUR X
C -----
DO 8 i=1,n-1
A(i)=A(i)-deltaA(i,1)
8 CONTINUE
lamda=lamda-deltaA(n,1)
C -----
C CALCULE DE LA NORME DE F
C -----
h=0.
DO 9 i=1,n
IF(DABS(F(A,t(i),n-1,alpha,lamda)).gt.DABS(h))THEN
h=F(A,t(i),n-1,alpha,lamda)
END IF
9 CONTINUE
WRITE(*,*)'h=',h
IF(DABS(h).LT.Epsilon) GOTO 100

```

```

400  CONTINUE
100  CONTINUE
      OPEN(7,file='E :\ai_2.txt')
      WRITE(7,*)lamda,(A(i),i=1,n-1)
      CLOSE(7)
      DO 10 i=1,n
f1(i)=(2./pi)*DTAN(t(i))*
1  ((1.+R0**(4.)-(2.*R0**(2.))*DCOS(2.*(t(i))))**(-1./2.))*
1  DEXP(-sum2(A,t(i),n-1))*
1  ((1.+R1**(4.)-(2.*R1**(2.))*DCOS(2.*(t(i))))**(1./2.))
1  *((2.*DSIN(t(i))/2.)**(2.*(-1.+lamda/pi)))
1  *DCOS((-pi+(t(i)))*(lamda/pi-1.)
1  -DATAN((DSIN(2.*(t(i))))/
1  (R0**(2.)-DCOS(2.*(t(i)))))+DATAN((DSIN(2.*(t(i))))/
1  (R1**(2.)-DCOS(2.*(t(i)))) - sum1(A,t(i),n-1))
f2(i)=(2./pi)*DTAN(t(i))*
1  ((1.+R0**(4.)-2.*(R0**(2.))*DCOS(2.*(t(i))))**(-1./2.))*
1  ((1.+R1**(4.)-2.*(R1**(2.))*DCOS(2.*(t(i))))**(1./2.))*
1  DEXP(-sum2(A,t(i),n-1))
1  *DSIN((-pi+(t(i)))*(lamda/pi-1.)
1  -DATAN((DSIN(2.*(t(i))))/
1  (R0**(2.)-DCOS(2.*(t(i)))))+DATAN((DSIN(2.*(t(i))))/
1  (R1**(2.)-DCOS(2.*(t(i))))))
1  -sum1(A,t(i),n-1))
1  *((2.*DSIN(t(i))/2.)**(2.*(-1.+lamda/pi)))
10  CONTINUE
      DO 11 j=1,n
      x(j+1)=x(j)+h2*f1(j)

```

```

    y(j+1)=y(j)+h2*f2(j)
11  CONTINUE
    WRITE(6,*)'lamda=',lamda
    WRITE(6,*)'alpha=',alpha
    WRITE(6,105)'les resultat'
105  FORMAT(1x,80(1h*)/,A,I3)
    WRITE(6,107)'i','T','A','X','Y','speed'
    DO 12 i=1,n
    WRITE(6,106)i,t(i),A(i),x(i),y(i),sa(i)
12  CONTINUE
106  FORMAT(i5,5E12.4)
107  FORMAT(A,T11,A,T23,A,T35,A,T48,A,T59,A,T65,A/)
    CLOSE(6)
C    OPEN(11,file='D :\Desktop\XY_inf.txt')
    DO 122 i=1,n
    WRITE(11,*)x(i),y(i)
122  CONTINUE
    CLOSE(7)
    STOP'FIN DU PROGRAME'
    END
C _____
C *RESOLUTION DE LA N*N+1 SYSTEME LINEAIRE PAR LA METH-
C ODE DE JORDAN AVEC PIVOTATION TOTAL IMPLICIT*
C _____
    SUBROUTINE JORDAN(EF,n,deltaA,pivotmin)
    PARAMETER(Nmax=81)
    INTEGER c(Nmax),l(Nmax),s
    DOUBLE PRECISION EF(n,n+1), deltaa(n,1)

```

```

DOUBLE PRECISION p(Nmax),w
  DO 8 k=1,n
    p(k)=0.
    DO 3 i=1,n
      DO 2 j=1,n
        IF(k.GT.1)THEN
          DO 1 s=1,k-1
            IF(i.EQ.l(s))GOTO 3
            IF(j.EQ.c(s))GOTO 2
1      CONTINUE
          ENDIF
          IF(DABS(EF(i,j)).GT.DABS(p(k)))THEN
            p(k)=EF(i,j)
            l(k)=i
            c(k)=j
          ENDIF
2      CONTINUE
3      CONTINUE
          IF(DABS(p(k)).EQ.pivotmin)THEN
            WRITE(*,'*')'pivot petitmatrice DSINGuliŠre'
            RETURN
          ENDIF
          DO 4 j=1,n+1
            EF(l(k),j)=EF(l(k),j)/p(k)
4      CONTINUE
          DO 6 i=1,n
            IF(i.NE.l(k))THEN
              w=EF(i,c(k))

```

```

        DO 7 j=1,n+1
        EF(i,j)=EF(i,j)-w*EF(l(k),j)
7    CONTINUE
        ENDIF
6    CONTINUE
8    CONTINUE
        DO 9 k=1,n
        DO 9 j=n+1,n+1
        deltaA(c(k),j-n)=EF(l(k),j)
9    CONTINUE
        RETURN
        END

```

---

```

C
DOUBLE PRECISION function sum1(c,s,m)
DOUBLE PRECISION c(81)
DOUBLE PRECISION s
sum1=0.
        DO 1 k=1,m
sum1=sum1+c(k)*DSIN(2.*(k-1)*s)
1    CONTINUE
        RETURN
        END

```

---

```

C
DOUBLE PRECISION function sum2(c,s,m)
DOUBLE PRECISION c(81)
DOUBLE PRECISION s
sum2=0.
        DO 1 k=1,m

```

```

1  sum2=sum2+c(k)*DCOS(2.*(k-1)*s)
   RETURN
   END

C -----

   DOUBLE PRECISION function sum3(c,s,m)
   DOUBLE PRECISION c(81)
   DOUBLE PRECISION s
   sum3=0.
   DO 1 k=1,m
1  sum3=sum3+2.*(k-1)*c(k)*DSIN(2.*(k-1)*s)
   RETURN
   END

C -----

   DOUBLE PRECISION function sum4(c,s,m)
   DOUBLE PRECISION c(81)
   DOUBLE PRECISION s
   sum4=0.
   DO 1 k=1,m
1  sum4=sum4+2.*(k-1)*c(k)*DCOS(2.*(k-1)*s)
   RETURN
   END

C -----

   DOUBLE PRECISION function F(c,s,m,alpha,r)
   DOUBLE PRECISION c(81)
   DOUBLE PRECISION s,alpha,sum2,sum4,r
   PARAMETER (pi=314159.D-5)
   R1=(exp(pi/2)-sqrt(exp(pi)-1.))
   R0=(exp(pi)-sqrt(exp(2.*pi)-1.))

```

```

F= -1.+(1.+R0**(4.)-(2.*R0**(2.))*
1 DCOS(2.*s))*DEXP(2.*sum2(c,s,m))
1 *(1./(1.+R1**(4.)-2.*(R1**(2.))*
1 DCOS(2.*s)))*((2.*DSIN(s/2))**(4.*(1.-r/pi)))
1 -(pi/alpha)*DCOTAN(s)*
1 DABS (((2*R0**(2.))*DCOS(2.*s)-2.)/
1 (1.+ (R0**4.d0)-2.*(R0**(2.))*DCOS(2.*s))
1 +(2.-(2*R1**(2.))*DCOS(2.*s))/
1 (1.+ (R1**4.d0)-2.*(R1**(2.))*DCOS(2.*s))
1 +(r/pi-1.)- sum4(c,s,n))
1 *((1.+R0**(4.)-(2.*R0**(2.))*DCOS(2.*s))**(1./2.))
1 *((1.+R1**(4.)-(2.*R1**(2.))*DCOS(2.*s))**(-1./2.))
1 *((2.*DSIN(s/2))**(2.*(1.-r/pi)))
1 *DEXP(sum2(c,s,m))

RETURN
END

```

# Bibliographie

- [1] **Brahim. Bouderah, Wahiba delloume et Abdelkader Gasmi** *A Free Surface Flow over a polygonal obstacle, International Mathematical Forum, 2, 2007 no. 66, 3279 - 3284.*
- [2] **G. Birkhoff et E. H. Zarantonello** *Jets, Wakes, And Cavities, New-York (1957).*
- [3] **G. K. Batchelor** *An introduction to fluid dynamics, Université de Cambridge, 1967.*
- [4] **M. Boumahrat A. Gourdin** *Méthodes numériques appliquées ( O.P.U ). 1991.*
- [5] **Chia-Shun Yih** *fluid Mechanics, West river press Michigan 1979.*
- [6] **Christophe Ancey** *Mécanique des fluides, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne Ecublens, 26 juin 2010.*
- [7] **Abdelkader Gasmi, H. Mekias** *A Jet from Container and Flow past a Vertical Flat Plate in a Channel With the Surface Tension Effects, Applied Math Sciences, vol.1, 2007, no. 54, 2687 - 2698.*
- [8] **F. Guechi, H. Mekias et A. Merzougui** *Two dimensional free surface flow computation, Applied Math Sciences, vol.1, 2007, no. 44, 2153 - 2161.*
- [9] **F. Guechi, H. Mekias et A. Merzougui** *Free surface Flow with surface Tension and gravity, Applied Math Sciences, vol.1, 2007, no. 49, 2399 - 2408.*
- [10] **M. i. Gurevich** *The Theory of Jets in an ideal fluid, International Series of Monographs in Pure and Applied Math, vol. 93, Oxford-London (1966).*

- [11] **S. N. hanna** *Free surface flow over a polygonal and smooth topography*, *Acta Mechanica*, Springer-Verlag, 1993, 241 - 251.
- [12] **S. N. hanna, M. N. Abel-Malek et M. B. Abd-el-Malek** *Super-critical free surface over trapezoidal obstacle*, *Journal of Computation and Applied Math.* 66 (1996) 279 - 291.
- [13] **A. Merzougui, H. Mekias et F. Guechi** *Surface tension effect on a two dimensional channel flow against an inclined wall*, *Applied Math Sciences*, vol.1, 2007, no. 47, 2313 - 2326.
- [14] **A. Merzougui, H. Mekias et F. Guechi** *A waveless two-dimensional flow channel against an inclined wall with surface tension effect*, al 2007 *J. Phys, A : Math. Theor.* vol. 40. n<sup>o</sup> 47. pp 14317-14328.
- [15] **Jean-Marc Vanden-Broeck** *The influence of surface tension on cavitating flow past a curved obstacle*, *J. Fluid. Mech.* (1983), vol.133, pp 255 - 264.
- [16] **Jean-Marc Vanden-Broeck et J. B. Keeller** *Free surface flow due to a sink*, *J. Fluid. Mech.* vol. 175 : pp 109 - 117 (1987).
- [17] **J. Roussel** *Cours de Mécanique des fluides*, C.P.I.2-Chem.I.St2 : 2005 - 2006.
- [18] **Murray R. Spiegel** *Variables complexes cours et problèmes (série schaum)*.
- [19] **Stéphane Ravier et Mattieu Rigaut** *Mécanique des fluides*, Ecole Normale Supérieure de LYON, janvier 2000.
- [20] **Y. f. Li, J. M. chuang et C. C. Hsiung** *Computation Nonlinear 2-D free surface flow using the Hilbert method*, Univesity of Nova Scotia Halifax, Canada.

**ملخص :** في هذا العمل نهتم بدراسة مسألة تدفق سائل غير قابل للانضغاط و غير لزج و يكون هذا التدفق كموني في فضاء ذو بعدين. و لقد درسنا بصفة خاصة مسألتين الأولى تدفق سائل أمام عقبة درجة السلم ( خطوة ) و الثانية تدفق سائل أمام عقبة مربع. المسألة تتميز بشرط غير خطي معطى من طرف ( معادلة برنولي ) على السطح الحر للسائل ذو شكل غير معروف. نعتد على طريقة التحويلات المتطابقة لدراسة السطح الحر للسائل. تقنية الحل هي الطريقة نفسها المستعملة من طرف الباحثين (Vanden-Broeck et Keller).  
النتائج المحصل عليها من أجل عدد ويبر  $\alpha$  بالنسبة للمسألة الأولى و من أجل عدد فرود  $F$  بالنسبة للمسألة الثانية.

**كلمات المفاتيح:** سائل, تدفق, سطح حر, تدفق كموني, عدد ويبر, توتر سطحي, عدد فرود.

### Abstract

In this work, we study a two dimensional and irrotationnal flow of an incompressible and inviscid fluid over an obstacle (flow over a step and flow over a rectangle ). The flow is characterized by the nonlinear condition (the Bernoulli condition) on the free surface of unknown equation. We adopted a method of conformal transformation which reduces the problem of discretization only on the free surface. The solution technique used by Vanden-Broeck and Keller. We computed the results for all Weber number  $\alpha \geq 2.10^{-9}$  for the first problem and for ( $F \geq 0.01$  and  $F < \infty$ ) for the second problem.

**Keywords:** Free surface flow, Surface tension, Weber number, Froude number.

### Résumé

Dans ce travail, on s'intéresse à un problème d'écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux, passant au dessus des obstacles (écoulement au dessus d'une marche et écoulement au dessus d'un rectangle). Le problème est caractérisé par la condition non linéaire donnée par l'équation de Bernoulli sur la surface libre qui est de forme inconnue. Nous adoptons une méthode des transformations conformes qui réduit le problème de discrétisation uniquement sur la surface libre. La technique de résolution utilisée par de Vanden-Broeck et Keller. Nous avons trouvé les résultats pour  $\alpha \geq 2.10^{-9}$  pour le premier problème et pour ( $F \geq 0.01$  et  $F < \infty$ ) pour le deuxième problème.

**Mots-clés :** Écoulement à surface libre, tension de surface, nombre de Weber, nombre de Froude.