République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Kadi-Merbah Ouargla
Faculté des Mathématique et Sciences de la Matière
Département : Physique
Filière : Physique Physique Théorique

N° d'ordre :

THESE

Présentée Pour l'obtention du Diplôme de Doctorat és Science en Physique Théorique

Sysrème de Covariance sur l'espace-temps Compactifié Conforme

Par

Mohamed Abdelwahab Benbitour

devant le jury composé de :

- J. A. Chacha,	Président	Pr. (Université de Ouargla)
- M. T. Meftah,	Rapporteur	Pr. (Université de Ouargla)
- K. Nouicer,	Examinateur	Pr. (Université de Jijel)
- T. Boudjdaa,	Examinateur	Pr. (Université de Jijel)
- M. Merad,	Examinateur	Pr. (Université de Oum bouaghi)
- Aomar. Boukraa,	Examinateur	Pr. (Université de Ouargla)

–2014–

Remerciements et Dédicace

J'exprime toute ma gratitude au Professeur M. T. Meftah, pour m'avoir encouragé d'aller au terme de cette thèse dans d'excellentes conditions.

Je remercie les différents membres du jury d'avoir accepté de lire et d'évaluer mon travail : Mr. T. Boudjdaa, Professeur à l'Université de *Jijel*, Mr. K. Nouicer, Professeur à l'Université de *Jijel*, Mr. M. Merad, Professeur à l'Université de *Oum Bouaghi,* Mr. Aomar. Boukraa, Professeur à l'Université de *Ouargla* et Mr. J. A. Chacha, Professeur à l'Université de *Ouargla* d'avoir bien voulu présider ce jury.

Je remercie chaleureusement mes collègues enseignants, ceux qui m'ont aidé ou conseillé à un moment ou à un autre.

Enfin, et surtout, je dédie ce travail à la mémoire de mon Père.

Table des matières

Introduction générale

L'espace-temps de la mécanique classique non relativiste, est l'espace de Galilée à quatre dimensions $(t, \mathbf{x})$, c'est l'ensemble des événements possibles, marqués par de vraies particules. En principe, à chaque instant t, les coordonnées spatiales $\mathbf{x}$, de toute particule, peuvent être mesurées avec une précision absolue. Cependant, l'espace de Galilée a un sens physique seulement comme un espace d'événements pour des particules réelles, la notion d'espace vide de Galilée n'a pas de signification physique. En effet, il n'y aurait aucun moyen de mesurer les coordonnées d'un tel espace.

L'espace-temps de Minkowski de la mécanique relativiste classique est, comme l'espace de Galilée, un ensemble d'événements et les remarques ci-dessus peuvent être appliquées à cet espace. Cependant, les distances dans l'espace de Minkowski sont définies par le tenseur métrique diagonal $(\eta_{\mu\nu})$. L'espace de Minkowski est aussi l'espace-temps des champs, qui peuvent être mesurés, en différents points de l'espace-temps, à l'aide de particules tests et par conséquent l'espace de Minkowski n'a de sens physique que par la présence de particules, mais pas comme un espace vide.

En relativité générale les géométries de l'espace-temps sont dynamiques. Elles sont définies par les équations d'Einstein, qui lient la courbure et la métrique de l'espace-temps à la densité d'énergie. Les coordonnées et la courbure de l'espace-temps sont des quantités physiques obtenues à partir de mesures en utilisant des objets macroscopiques. Puisque la matière est traitée comme une source du champ gravitationnel, alors formellement, lorsque la matière en question disparaît, le champ gravitationnel devrait disparaître aussi. Dans cette limite, les solutions des équations d'Einstein sont, soit l'espace de Minkowski si la constante cosmologique est nulle, soit l'espace de de Sitter (dS) si elle est positive et soit l'espace anti-de Sitter (AdS) quand elle est négative. Ainsi, selon la relativité générale les espaces de Minkowski, dS, ou AdS ne peuvent être que des espaces vides, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas physiques.

Il existe d'autres approches, elles sont fondées sur le principe holographique, où il est postulé que l'espace-temps n'est qu'un espace émergent et il n'est pas fondamental, l'espace-temps n'a de sens que si la matière est présente.

Du point de vue de la théorie quantique, toute quantité physique ne peut être envisagée qu'uniquement en association avec un opérateur qui l'a défini. On serait tenté de définir le temps t comme un opérateur conjugué avec l'hamiltonien $[H, t] = i\hbar$. Cependant, un tel traitement n'est pas correct. Dans la théorie quantique la variable t n'est qu'un paramètre classique décrivant l'évolution d'un système quantique. Mais, cela pose une nouvelle question, à savoire pourquoi la règle que chaque grandeur physique est définie par un opérateur ne s'applique pas pour le temps ? C'est pour ces raisons que dans la théorie quantique, on peut seulement décrire les transitions par la matrice S de Heisenberg, du passé au futur lointain. Bien qu'aucun opérateur autoadjoint ne puisse être associé avec le temps, une question est de savoir s'il est toujours possible de définir l'opérateur de position. Ces problèmes seront discutés en détail le long du manuscrit.

Dans la théorie quantique des champs, on n'a pas besoin d'opérateurs de position, mais on utilise des champs quantiques locaux. Un champ est la superposition de deux représentations irréductibles, d'énergie positive et négative, l'une est associée à une particule et l'autre à l'antiparticule correspondante. Les champs locaux dépendent de x parce que l'espace-temps est un espace quotient du groupe de symétries (Poincaré,...). Alors, il n'y a pas d'opérateur physique correspondant à x, x n'est pas mesurable.

En théorie quantique on postule que les représentations, coordonnées et quantité de mouvement, de la fonction d'onde sont liées par une transformation de Fourier. Comme il est bien connu en mécanique quantique, si la phase de la fonction d'onde oscille rapidement, alors dans la limite semiclassique $\hbar \to 0$, l'équation de Schrödinger devient l'équation de Hamilton-Jacobi. Alors les paquets d'ondes de la mécanique quantique se propagent le long des trajectoires classiques, cette situation est analogue à l'approximation de l'optique géométrique en électrodynamique classique, lorsque la phase, des champs, oscille rapidement. En raison de cette similarité, un paquet d'ondes quantiques libres s'étale inévitablement, en outre, dans la théorie quantique cet effet est beaucoup plus prononcé que dans l'électrodynamique classique. L'effet d'étalement du paquet d'ondes a été étudiée par de Broglie, Darwin et Schrödinger, il a été jugé comme inacceptable et qu'il est une indication que la théorie quantique standard devrait être modifiée.

Même si l'étalement du paquet d'ondes est un phénomène qui reste inaperçu, le problème se pose fortement pour les photons, qui peuvent voyager depuis des objets très éloignés de la Terre, (à des milliards d'années-lumière). Pour les photons émis même par des étoiles proches, cet effet devrait être si fort que nous ne devrions pas pouvoir distinguer les étoiles les unes des autres, et nous devrions voir un fond presque continu d'étoiles. En outre, les données les plus récentes ne montrent aucun signe d'étalement des fonctions d'onde des photons. En fait ce paradoxe provient du fait que la définition standard de l'opérateur de position n'est pas juste. La définition de l'opérateur de position n'est pas seulement un problème académique, mais conduit à de réels paradoxes.

Comme nous l'avons indiqué plus haut, les particules élémentaires, dans la théorie quantique, sont décrites par une représentation irréductible de l'algèbre de symétrie. Les espaces de représentations de l'algèbre de symétrie sont des espaces d'Hilbert de fonctions $\varphi(\mathbf{p})$ à carré sommable, et dans ces représentations l'opérateur impulsion n'est rien d'autre que l'opérateur multiplication par $\mathbf{p}$ et l'opérateur position est $i\hbar\partial_{\mathbf{p}}$. Cependant, l'approximation semi-classique ne peut être valable dans la situation où l'impulsion est assez petite et dans ce cas la définition de l'opérateur position, comme un opérateur $i\hbar\partial_{\mathbf{p}}$, ne peut être justifiée et n'a pas un de sens physique. En général la définition standard de toutes les composantes de l'opérateur de position ne peut être physique que pour des choix particuliers des axes de coordonnées. La situation où une définition d'un opérateur est physique ou non, selon le choix du repère, n'est pas acceptable.

Dans le formalisme usuel de la mécanique quantique, les observables sont représentés par des opérateurs autoadjoints ou, de façon équivalente, par des mesures spectrales. Il est largement reconnu que ce concept est trop étroit. En effet, les mesures spectrales correspondent à des mesures avec une parfaite précision, impossible dans des expériences réelles. Une formulation mathématique moins restrictive d'une observable en mécanique quantique est donnée par la mesure positive, normalisée, à valeurs opératorielles ou

POV-mesures. Cette généralisation permet, parmi d'autres choses, de décrire des mesures avec une précision limitée [11]. Les POV-mesures normalisées sont utilisées pour décrire les observables en mécanique quantique. Leur introduction est justifiée par l'analyse de certaines expériences idéales qui montre qu'il existe des événements quantiques qui ne peuvent pas être décrits par les opérateurs autoadjoints. Elles sont également utilisées pour généraliser le système d'imprimitivité de Mackey, et d'étudier le problème de la mesure conjointe des observables incompatibles.

En théorie quantique des champs ainsi que dans la physique classique, les positions spatio-temporelles sont introduites a priori, c'est-à-dire indépendamment d'un autre phénomène physique fondamental. Il devrait cependant être évident que la position dans l'espace-temps est elle-même une notion physique qui doit être confrontée à la mesure. Ces mesures doivent s'appuyer sur des systèmes physiques et sur les lois de la physique. Une première étape dans une approche constructive, est la définition des procédures de localisation. Pour décrire les phénomènes physiques de localisation, il est en effet nécessaire d'établir les relations entre les événements en différents endroits dans l'espace-temps.

Une procédure de localisation peut alors être construite sur la propagation du champ universel, la lumière de vitesse c. En effet, l'espace-temps est finalement basé sur les symétries de la propagation du champ électromagnétique. La localisation dans l'espace-temps doit donc être construite sur les quantités conservées associées à des symétries. D'autre part, ces symétries constituent l'expression fondamentale des lois déterminant les effets relativistes des transformations spatio-temporelles entre les repères. Les symétries des translations et de Lorentz jouent donc un rôle primordial.

Par ailleurs, le rôle joué par la dilatation est moins souvent discuté bien que l'invariance des équations de Maxwell sous les dilatations soit connue depuis longtemps. En outre , les équations de Maxwell sont également invariantes sous le groupe de transformations conformes. Cette invariance peut être comprise comme une manifestation de l'invariance de la propagation de la lumière sous une transformation conforme de la métrique, qui est aussi à un changement de l'échelle de temps. Les transformations conformes des coordonnées englobent non seulement les transformations d'un référentiel inertiel à un autre référentiel inertiel, mais aussi des transformations à des référentiels accélérés. La symétrie conforme devrait donc permettre dé d'établir comment les observables changent dans de telles transformations.

Ces concepts ont été introduits dans le cadre de la relativité classique où les observables sont représentés par des nombres réels qui peuvent, en principe, être déterminés avec une précision arbitraire. Ils doivent rester pertinentes dans un contexte quantique où les observables sont des opérateurs et possèdent des fluctuations quantiques. La localisation dans l'espace-temps décrit en termes d'observables quantiques est liées aux générateurs de la symétrie. La technique est de plonger l'algèbre de la symétrie dans l'algèbre des observables quantiques. Toutes les propriétés peuvent, ainsi, être déduites de l'algèbre conforme. Les générateurs de l'algèbre sont utilisés pour définir des observables de localisation, et leurs commutateurs pour décrire leurs relations de commutation quantique ainsi que leurs changements sous les transformations de repère. En conséquence, les observables de la localisation peuvent être définies dans un cadre quantique et être pleinement compatible avec la relativiste. Dans le premier chapitre nous vérons quelques aspects fondamentaux de ce formalisme. Au second chapitre, on discutera sur le problème des systèmes de covariances sur les espace-temps de Newton-Cartan et Minkowski conforme. Dans le troisième chapitre, nous allons donner une caractérisation complète des observables quantiques associés au problème de la localisation dans l'espace-temps conforme.

La conjecture de Maldacena [28] sur la correspondance AdS/CFT, est une équivalence mathématique entre la limite de basse énergie de la théorie des cordes de type IIB sur l'espace $AdS_5 \times S^5$ et une théorie conforme des champs. Depuis l'avènement de cette conjecture, diverses généralisations de ce principe de dualité ont été considéré, impliquant d'autres théories de jauge. L'espoir est de trouver une géométrie qui imite la chromodynamique quantique, facilitant ainsi l'utilisation de la théorie des cordes afin de déterminer les propriétés des interactions fortes. Il existe, pour cela deux approches principales.

Soit développer des théories des cordes cohérentes et essayer de déterminer les propriétés de leurs théories des champs duales. Ces théories sont à dix dimensions et doivent ensuite être compacifiée avec toute l'ambiguïté qui en découle.

Soit de concevoir une approche plus phénoménologique, où on essaye de deviner, en s'inspirant de la théorie des cordes, la théorie des champs effectifs dans une géométrie à cinq dimensions dont la duale est une théorie à quatre dimensions qui aurait les propriétés de la QCD. Ce qui nous intéresse est le cas d'une géométrie compatible avec le potentiel de Cornell [30][31]

$$V(r) = -\frac{\kappa}{r} + \frac{r}{a^2} + C \tag{1}$$

Ceci sera le sujet du dernier chapitre.

Chapitre 1

Système de Covariance

1.1 Mesure à valeurs Operatorielle : POV-mesure

Les concepts de base de la mécanique quantique sont les deux notions d'État et d'Observable, les deux étant définis dans leurs formes les plus générales en termes d'opérateurs agissant sur un espace d'Hilbert. Il s'agit d'une hypothèse classique de la théorie quantique que chaque vecteur dans l'espace d'Hilbert d'un système est un état possible pour le système. Cette hypothèse est souvent exprimée comme le principe de superposition, qui affirme que les combinaisons linéaires (normalisés) des vecteurs d'état sont encore des vecteurs d'état.

En mécanique quantique usuelle, les états d'un système sont décrits par des droites dans un espace d'Hilbert séparable complexe, ou par des opérateurs normalisés positifs, tandis que les observables sont décrits par des opérateurs autoadjoints, ou de manière équivalente, par des mesures spectrales. Cependant, il est bien connu que les mesures spectrales ne peuvent pas décrire la mesure conjointe d'observables incompatibles, ni la mesure du temps, en effet le théorème de Pauli interdit la description à l'aide d'un opérateur autoadjoint une observable conjuguée à l'hamiltonien avec un spectre semi-borné. Néanmoins, cette description nécessite une structure mathématique différente, une généralisation des mesures spectrales qui sont les mesures positives à valeurs opératoire (

POV-mesure). Le théorème de Gleason assure qu'elles sont les structures mathématiques les plus générales décrivant les observables compatibles avec l'interprétation probabiliste de la mécanique quantique, dans ce chapitre nous allons discuter ces idées.

1.1.1 Etats Quantiques

En mécanique quantique un système physique $\mathbb{S}$ est représenté au moyen d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathbb{S}}$. Les états du système sont représentés par des opérateurs, ρ, positif de trace unité ($\mathbf{Tr}\left[\rho\right] = 1$). On désignera par, $\mathcal{L}\left(\mathcal{H}_{\mathbb{S}}\right)$ l'espace des opérateurs bornés sur $\mathcal{H}_{\mathbb{S}}$, par $\mathcal{L}\left(\mathcal{H}_{\mathbb{S}}\right)^{+}$ le sous-espace des opérateurs positifs et par $\mathcal{T}_1\left(\mathcal{H}_{\mathbb{S}}\right)^{+}$ le sous espace des opérateurs de trace 1, alors les états du système, ρ, sont les éléments de ce dernier sous espace convexe $\mathcal{T}_1\left(\mathcal{H}_{\mathbb{S}}\right)^{+}$. En raison de la structure linéaire sous jacente de l'espace d'Hilbert du système $\mathcal{H}_{\mathbb{S}}$, les superpositions vectorielles d'états forment de nouveaux vecteurs d'états. La convexité de l'espace des états représente la possibilité de préparer de nouveaux états à partir d'autres états.

1.1.2 Les Observables

Les quantités physiques, où les propriétés physiques, dont la valeur, est au moins en principe mesurable sont les observables de la théorie. Mathématiquement elles sont représentées par des opérateurs autoadjoints sur l'espace d'Hilbert, la manière de représenter ces observables par les opérateurs autoadjoints peut dépendre de la situation physique. D'autre part, le théorème spectral stipule que tout observable peut être identifié avec une famille spectrale d'opérateurs de projection, ainsi l'observable devient une application entre ensembles boréliens, des valeurs possibles de l'observable, vers les éléments de la famille spectrale. Nous allons examiner ces idées plus en detail dans la suite du texte.

Il est souvent utile d'adopter une notion plus large pour décrire une observable physique. Au lieu de se restreindre à une famille spectrale, ont élargi cette notion à celle d'une mesure à valeur opératoire positive (POV-mesure) [8]. Dans cette approche, nous commençons par considérer l'ensemble des valeurs possibles de l'observable comme un espace topologique localement compact, Ω, mais dans la majorité des cas, Ω est simplement un sous-ensemble des nombres réels.

En effet, soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable avec un produit scalaire $\langle .| .\rangle$.

Définition 1 *Soit $\mathcal{H}$ un espace d'Hilbert (espace des etats) et Ω l'espace des résultats possibles. Une POV-mesure, sur Ω, est une application de la σ-Algèbre $\mathcal{B}(\Omega)$ des ensembles Boréliens de Ω vers l'ensemble, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, des opérateurs bornés positifs sur $\mathcal{H}$*

$$E : \mathcal{B}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}), \tag{1.1}$$

ayant les propriétés suivantes :

1) $E(\Delta) \geq E(\phi) = 0, \forall \Delta \in \mathcal{B}(\Omega)$, (positive, cad $\langle u, E(\Delta) u\rangle \geq 0, \ \ \forall u \in \mathcal{H}$)

2) $E(\Omega) = 1$

3) $E(\bigcup\limits_n \Delta_n) = \sum\limits_n E(\Delta_n)$, convergeance dans la topologie faible

où $\{\Delta_n\}$ est une collection denombrable d'éléments disjoints de $\mathcal{B}(\Omega)$. On appelle les opérateurs $E(\Delta_n)$ des "effets"

Si en plus de ces propriétés, l'application E possède la propriété multiplicative suivante : $E(I \cap J) = E(I) E(J)$ pour I et J de $\mathcal{B}(\Omega)$, ou de façon equivalente $E(I)^2 = E(I)$ pour tout I, cette POV-mesure devient une mesure à valeur projective ou PV-mesure, et les opérateurs $E(\Delta)$ d'une PV-mesure sont des projecteurs. En effet, il est visible que les images de E sont des projecteurs et la famille $\{E(\Delta_n)\}$ est une famille spectrale.

Si Ω est un simple intervale de réels et si E est une PV-mesure alors E est une représentation spectrale d'un opérateur autoadjoin A unique

$$A = \int_{\Omega} xE(dx) \tag{1.2}$$

On notera qu'une POV-mesure est une Observable généralisée alors qu'une PV-mesure est une observable ordinaire de la mécanique quantique. Plutôt que de considérer directement les valeurs possibles d'une observable, on peut aussi considérer la famille spectrale correspondante. Selon l'axiome d'additivité des probabilités, une mesure de probabilité, p, définie sur les opérateurs de projection devrait être telle que

$$p(P_1 + P_2) = p(P_1) + p(P_1), \tag{1.3}$$

si $P_1 P_2 = 0$. Pour l'instant, si on considère seulement le cas de PV-mesure, une mesure de probabilité sur les projecteurs sur un espace de Hilbert est simplement une application, p, de l'ensemble des projecteurs vers l'intervalle $[0, 1]$, additive sur l'ensemble de projections orthogonales.

Contrairement au cas d'une Pv-mesure, l'additivité dénombrable pour les opérateurs "effets" d'une POV-mesure est une notion un peu plus subtile. En effet, les effets d'une POV-mesure, ne sont pas mis en correspondance avec des sous-espaces, et la notion d'orthogonalité ne s'applique pas. Cependant, on peut généraliser ce concept d'une façon naturelle en disant que la probabilité de la somme des effets est la somme des probabilités individuelles.

D'où le théorème [5][6]

Théorème 2 *Soit $\mathcal{H}$ un espace d'Hilbert de dimensions 3 ou plus. Alors toute mesure de probabilité μ sur les projecteurs (ou de façon équivalente les sous espace fermés) de $\mathcal{H}$ est générée par un certain opérateur, ρ, positif de trace 1 sur $\mathcal{H}$; si P est un projecteur on a*

$$\mu(P) = \mathbf{Tr}(\rho P). \tag{1.4}$$

Ce théorème est dû à Gleason (1957). Le théorème de Gleason peut-être généraliser au cas des POV-mesure, mais la preuve n'est pas triviale. Dans cette généralisation, les mesures de probabilité des effets sont également déterminées par des opérateurs de densité.

Soit ρ un état et soit E une POV-mesure on définit alors une mesure de probabilité, μ_ρ^E, sur la σ-algèbre des ensembles Boréliens, Δ, de Ω, des valeurs possibles de l'observable représenté par la POV-mesure E.

$$\mu_\rho^E(\Delta) = \mathbf{Tr}[\rho E(\Delta)]. \tag{1.5}$$

La quantité $\mu_\rho^E(\Delta)$ est interprétée comme la probabilité que le résultat de la mesure, de l'observable généralisée E dans l'état ρ, soit dans Δ.

La théorie standard des probabilités classique généralement concerne les mesures des événements sur les sigma -algèbres. Ces sigma- algèbres sont définies en termes des opérations habituelles de complément et de l'union. Cependant, dans la théorie quantique, nous avons affaire à une structure différente, mais qui est suffisamment analogue à la structure classique que, au moins au niveau formel, on peut donc facilement transporter sur les considérations de la théorie classique des probabilités. L'espace des échantillons est, dans ce cas, l'ensemble de toutes les projections unidimensionnelles, le complément devient l'orthogonal $E_\perp$, l'union $E \cup F$ devient l'espace $(E \vee F)$ engendré par E et F, tandis que l'intersection reste inchangée et l'inclusion devient l'inclusion de sous $E \leq F$. La théorie de la probabilité quantique est, alors, la théorie des mesures normalisées (POV mesure) sur une telle structure.

Qu'en est-il des probabilités conditionnelles ? Bien que son interprétation pût être très controversée, et son application quelque peu délicate, mais il existe pour les probabilités conditionnelles de la théorie quantique des règles standard appelées les règles de Lüder. En effet, dans la théorie des probabilités classique, la probabilité conditionnelle, $Pr(A/B)$, de l'événement, A, compte tenu de l'autre événement, B, est définie par $Pr(A/B) = Pr(A \cap B)/Pr(B)$. L'idée derrière cette définition est claire. En effet, si A est contenu dans$B$, alors $Pr(A/B)$ est seulement une renormalisation de la mesure de probabilité initiale pour une probabilité qui attribue 1 à B. Il s'avère que cette condition est suffisante pour déterminer la forme de la mesure de probabilité conditionnelle sur les sous-espaces fermés (ou projection sur) de l'espace de Hilbert. En d'autres termes , soit P_ρ la mesure probabilité associée à l'opérateur de densité, ρ, sur $\mathcal{H}$. Soit X un sous-espace tel que $P_\rho(X) = \mathbf{Tr}[\rho X] \neq 0$. Alors, il existe une mesure de probabilité, unique, $\mu_\rho^X(.)$ sur les sous-espaces fermés de $\mathcal{H}$ telle que, pour tous sous-espace $Y \leq X$

$$\mu_\rho^X(Y) = \frac{\mathbf{Tr}[X\rho XY]}{\mathbf{Tr}[\rho X]}. \tag{1.6}$$

Cette formulation de la probabilité conditionnelle est la règle de Lüder.

Une conséquence immédiate de ce formalisme est le fait qu'il doit exister des quantités physiques incompatibles, dans le sens que, si un état assigne une probabilité 1 à une certaine quantité physique, il doit affecter nécessairement une probabilité ni 0 ni 1 aux autres observables, donc ces autres observables n'ont pas de valeurs déterminées. Ce fait découle directement du théorème de Gleason.

L'incompatibilité est étroitement liée à la non-commutativité, en effet les deux termes sont utilisés de façon interchangeable. Considérons deux opérateurs de projection, E et F. Alors si E et F ne commutent pas il n'existe pas d'état qui assigne une probabilité 1 à E non plus 0 ou 1 à F. En effet, le seul état qui attribu une probabilité de 1 pour une projection unidimensionnelle, E, est l'état E lui-même, et il est facile de montrer que E affecte une probabilité non triviale à tout F qui ne commute pas avec lui.

Enfin, La solution "standard" au problème de la mesure est le fameux postulat de la réduction de l'état, aussi appelé "postulat de la projection". Le postulat peut être formulé de plusieurs façons, tels que :

Axiome 3 *Lors de la mesure d'une observable F sur un système dans l'état ρ, le résultat de la mesure sera une valeur propre appartenant à un certains sous-espace propre, $P\mathcal{H}$ de F, (P est la projection) et l'état du système sera alors aprés mesure*

$$\frac{P\rho P}{\mathbf{Tr}[P\rho P]} \tag{1.7}$$

La théorie quantique admet donc une évolution unitaire mais ponctuée par des discontinuités irréversible, probabiliste et instantanées. De toute évidence, ils sont liés à la mesure. Mais, qu'est-ce qui fait que la mesure est spéciale ? Hélas, il n'y a pas de réponse convaincante. En effet, le problème le plus évident avec le postulat de la réduction est qu'il repose sur une notion non bien définie de la mesure. Pour la plupart des chercheurs dans les fondements de la théorie quantique semblent être d'accord que si la théorie quantique est censée être une théorie fondamentale, elle devrait bien définir la notion de mesure.

1.2 Système de Covariance

Il existe d'autres aspects du formalisme, en plus des observables et des probabilités, qui sont importantes pour comprendre les fondements de la mesure quantique. En effet, les transformations, à la fois des états des systèmes physiques et des observables associées aux systèmes sont fondamentaux pour la mécanique quantique. Les lois du mouvement, classique, ne dépendent pas de la vitesse de l'observateur, ni de sa localisation dans l'espace et le temps, ni de son orientation dans l'espace. En d'autres termes , les lois sont invariantes par certaines transformations, à savoir, les changements de vitesse, translations spatiales et temporelles et les rotations. Ces transformations sont représentées, mathématiquement, par un groupe, qui dans le cas des transformations galiléennes est le groupe est appelé le groupe de Galilée. Ainsi la théorie des groupes est le contexte naturel dans lequel on étudie les invariances de la théorie quantique.

En effet, les propriétés d'un groupe sont identiques aux propriétés des transformations d'invariance. En particulier, si g et g' sont deux transformations qui laissent les lois inchangées, alors la composition de g suivie de g' est également une transformation d'invariance. De même, si g est transformation d'invariance, alors la transformation inverse l'est aussi, et enfin, l'identité représente aucun changement. Les groupes apparaissent dans d'autres contextes aussi. En effet, considérons la dynamique d'un système physique fermé. On peu voire que le temps l'évolution de l'état d'un système est une transformation sur l'ensemble des états. L'ensemble de toutes ces évolutions temporelles devrait former un groupe, ou un semi-groupe.

Le fait que les groupes sont considérés comme des ensembles de transformations de symétries, suggère qu'ils ne devraient pas modifier les relations entre les États. En particulier, une transformation de symétrie sur l'espace des états doit être telle que le système dans l'état ρ génèrent les mêmes probabilités pour les observables que l'état après la transformation. Heureusement, un opérateur unitaire correspond très bien à cela. En effet, nous définissons un opérateur unitaire comme une transformation qui préserve le produit scalaire. D'où le théorème important, dû à Wigner, qui stipule l'inverse de ce fait.

Théorème 4 *Soit $\mathcal{H}$ un espace d'Hilbert sur $\mathbb{C}$ et soit $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ une application bijective (pas nécessairement linéaire) qui préserve le produit scalaire $\langle T\varphi | T\psi \rangle = \langle \varphi | \psi \rangle$ pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$. Alors*

$$|T\varphi\rangle = \theta\left(|\varphi\rangle\right) U \left|\varphi\right\rangle, \tag{1.8}$$

où θ est une fonction complexe sur $\mathcal{H}$, de module 1, appelée phase. U est un opérateur, qui est soit unitaire ou soit anti-unitaire.

Notons tout d'abord, que tout opérateur antiunitaire, T , peut-être écrit comme la produit d'un opérateur unitaire avec une conjugaison complexe. Ainsi, les transformations antiunitaires sont juste des transformations unitaires suivies par la conjugaison complexe. Un exemple bien connu est le renversement temporel. Comme regle générale, le cas antiunitaire est lié à la nature non physique de ces transformations.

Dans la majorité des cas, le groupe est continu et est paramétré par un ensemble de réels, de sorte que le groupe devient un groupe de Lie. Dans ces cas, une topologie est bien connue et les transformations du groupe sont construites par des transformations infinitésimales. D'autre part, si les symétries sont censées correspondre à des processus physiques réels (comme une évolution), l'unitarité des opérateurs devient nécessaire.

Du théorème de Wigner, on cherche souvent des transformations unitaires avec une phase 1, dans ce cas, la représentation du groupe de symétrie est juste donnée en termes d'un groupe d'opérateurs unitaires, qu'on appelle une représentation unitaire. Ces représentations sont particulièrement simples. Mais, souvent on n'est pas toujours capable d'être en mesure de trouver de telle représentation, parfois, la fonction de phase persiste.

Dans ce cas, la représentation est appelée projective.

La raison en est la suivante : Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, et considérons l'ensemble, $\mathbb{P}(\mathcal{H})$, espace de Hilbert projectif, des classes d'équivalence des vecteurs de $\mathcal{H}$, où deux vecteurs sont équivalents si et seulement s'ils sont colinéaires. La structure de l'espace $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ est donnée par les angles entre les vecteurs de $\mathcal{H}$. Lorsque la fonction de phase n'est pas triviale, la transformation résultante génère toujours un automorphisme de $\mathbb{P}(\mathcal{H})$. Tandis que les représentations unitaires ont tendance à être plus facile à manipuler, on est parfois forcé d'utiliser les représentations projectives.

Les représentations unitaires sont particulièrement simples, car ils peuvent être générés par des opérateurs autoadjoints. En premier lieu, étant donné que tout opérateur autoadjoint T, l'opérateur e^{iT} est unitaire, donc la famille d'opérateurs $e^{i\alpha T}$ avec α un paramètre réel forme un groupe continu d'opérateurs unitaires. Considérons la représentation d'un groupe continue, G, paramétrée comme une famille d'opérateurs unitaires sur un espace d'Hilbert. Citons pour cela le Théorème de Stones

Théorème 5 *Soit U_α une représentation (faiblement) continue unitaire d'un groupe G sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Alors, il existe un opérateur autoadjoint, F, sur $\mathcal{H}$ tel que $U_\alpha = e^{-i\alpha F}$.*

Ce théorème, dù a Stone (1932), requiert une importance fondamentale les théories quantiques, car beaucoup de groupes de symétrie non-relativiste et relativiste ont les propriétés requises.

Considérons un groupe, G, son action sur un ensemble, S, induits une équivalence entre les éléments de S, deux éléments sont équivalents s'ils sont reliés par un élément de G. On peut facilement vérifier que G ainsi partitione S dans des classes d'équivalences, et G est un groupe de symétries sur S, dans le sens que les éléments de S qui sont dans une même classe sont physiquement équivalents. Comme exemple, prenons l'ensemble S l'espace tout entier. Une translation spatiale des points de S est une symétrie, car toutes les distances et d'autres relations spatiales entre les particules restent les mêmes. Nous devrons poser une condition que E préserver le comportement de S sous les transformations. Pour cela, nous aurons besoin de deux choses, d'une représentation du groupe de symétries agissant sur l'espace d'Hilbert, et d'une application $\mathcal{B}(S) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Prenons l'exemple du groupe des translations $\mathbb{R}^3$ et le groupe $\mathcal{V}$ des changements de vitesses, ces deux groupes sont des sous-groupes du groupe de Galilée. Soient $U(\mathbf{a})$ et $V(\mathbf{v})$ les deux opérateurs, agissant dans l'espace d'Hilbert, qui représentent l'action d'une translation $\mathbf{a}$ et d'un changement de vitesse $\mathbf{v}$ respectivement

$$\begin{aligned} U(\mathbf{a}) &= e^{-i\mathbf{a}\hat{p}}, \\ V(\mathbf{v}) &= e^{-im\hat{q}}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

où $\hat{p}$ et $\hat{q}$ sont l'opérateur quantité de mouvement et position respectivement. Soit maintenant, la POV-mesure E_q qui représente la position

$$E_q : \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3) \rightarrow E_q(\Delta) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}). \tag{1.10}$$

Alors, la covariance de la position sous les translations est traduite par

$$U(\mathbf{a})E_q(\Delta)\, U^{-1}(\mathbf{a}) = E_q(\mathbf{a}\Delta), \tag{1.11}$$

où $\mathbf{a}\Delta$ est l'ensemble Borelien translaté. L'invariance de la position sous les changements de vitesse est traduite par

$$V(\mathbf{v})E_q(\Delta)\, V^{-1}(\mathbf{v}) = E_q(\Delta). \tag{1.12}$$

De même, la POV-mesure E_p doit être invariant sous les translations et covariante sous les changements de vitesses. En effet, ces conditions se révèlent être assez suffisantes par eux-mêmes pour déterminer les applications E_q et E_p.

De manière générale, soit G un groupe localement compact, Ω un espace mesurable sur le quel le groupe G opére comme un groupe de transformations et soit U une représentation unitaire de G sur un espace d'Hilbert $\mathcal{H}$. Si E est une POV-mesure sur $\mathcal{B}(\Omega)$ a valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})^{+}$, alors E est dite covariante parapport à U si

$$U(g)\, E(\Delta)\, U^{-1}(g) = E(g\Delta), \tag{1.13}$$

pour tout $\Delta \in \mathcal{B}(\Omega)$ et pour tout $g \in G$, et l'ensemble $(\mathcal{H}, E, \Omega, G, U)$ est dit système de covariance. Si E est une PV-mesure alors l'ensemble est un système de imprimitivité.

Les systèmes d'imprimitivités ont des propriétés importantes en partie résumées par le théorème de Mackey. Dans un système d'imprimitivité, Ω est souvent considéré comme étant un espace métrique et G un groupe localement compact et séparable des isométries de Ω. Dans le cas non-relativiste, il est naturel de prendre l'éspace Ω comme $\mathbb{R}^3$, et G comme le produit semi-direct des translations et des rotations $\mathbb{R}^3 \ltimes SO(3)$. Il est plus utile de prendre, alors, Ω, comme isomorphe au groupe topologique quotient $G/SO(3)$, qui est clairement isomorphe à $\mathbb{R}^3$ comme espace topologique. On exige alors que la PV-mesure pour la position, E_q, doit être covariantes par rapport à G. Citons alors le théorème de Mackey

Théorème 6 *Soit U une représentation unitaire d'un groupe topologique G séparables localement compact, sur un espace d'Hilbert séparable $\mathcal{H}$, et soit K un sous-groupe fermé de G. Soit E une PV-mesure, dont le domaine est G/K, telle que ($\mathcal{H}$, G/K, G, U, E) est un système d'imprimitivité. Pour toute représentation, V de K sur un espace de Hilbert, $\mathcal{H}'$, la représentantion de G induite par V sur l'espace de Hilbert $L^2(G/K) \otimes \mathcal{H}'$ est unitairement équivalente à U. En outre, $E(\Delta)$ doit être le produit tensoriel de l'opérateur de multiplication χ_Δ sur $L^2(G/K)$ avec l'identité sur $\mathcal{H}'$:*

$$E(\Delta) = \chi_\Delta \otimes 1 \tag{1.14}$$

Ainsi, dans le cas plus haut, nous avons $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ et soit D^j une représentation du groupe des rotations sur $\mathcal{H}'$, considérons la representation induite de G. Cette représentation induite doit être unitairement équivalent à n'importe quelle représentation de G, et $E_q(\Delta) = \chi_\Delta \otimes 1$. L'intégration sur l'ensemble S donne l'opérateur de position usuel

$$\hat{q} = \int \mathbf{x} dE_q(\mathbf{x}) \tag{1.15}$$

Par conséquent, la condition que la PV-mesure de position soit covariante par rapport aux translations et les rotations implique, selon le théorème, la forme de l'opérateur position. Le théorème de Mackey établit de façon unique (à une transformation unitaire prés) l'opérateur de position. En effet, le théorème de Mackey établit également la relation entre la représentation position et la représentation du groupe de Galilée. Enfin, il faut noter la généralité du théorème de Mackey, il est valable pour tout les observable (POV-mesure) qui forment un système d'imprimitivité (ou covariance) vis-à-vis de certains groupes de symétries, comme le moment angulaire et le spin. Le theorème de Mackey traite d'une façon unifié les systèmes d'imprimitivités, mais pas les systèmes de covariances. Cependant, avec le théorème suivant, qui est une version covariante du théorème de dilatation de Naimark [14], on peut construire un système de covariance à partir d'un système d'imprimitivité.

Théorème 7 *Soit $(\mathcal{H}, S, G, U, E)$ un système de covariance. Alors, il existe un système d'imprimitivité $(\mathcal{H}', S, G, V, F)$, où $\mathcal{H}'$ est un espace de Hilbert, V une représentation unitaire fortement continue du groupe de symétrie G agissant dans $\mathcal{H}'$, F est une mesure spectrale sur la $\sigma-$algèbre $\mathcal{B}(S)$, et il existe un opérateur d'entrelacement $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$, avec la propriété de $UA(g) = V(g)$, pour tout $g \in G$, de sorte que*

$$E(I) = A^{+} F(I) A. \tag{1.16}$$

1.3 Observables Covariants de l'Espace des Phases

Commensons par donner quelques définitions.

Définition 8 (Position) *Une observable* $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}^3) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *est dite observable position sur* $\mathbb{R}^3$ *si pour tout* $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, $r \in SO(3)$ *et* $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$.

$$\begin{aligned} U(\mathbf{q}) E(I) U^{-1}(\mathbf{q}) &= E(I + \mathbf{q}) \\ V(\mathbf{p}) E(I) V^{-1}(\mathbf{p}) &= E(I) \\ D(r) E(I) D^{-1}(r) &= E(rI) \end{aligned} \tag{1.17}$$

Définition 9 (Impulsion) *Une observable* $F : \mathcal{B}(\mathbb{R}^3) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *est dite observable impulsion sur* $\mathbb{R}^3$ *si pour tout* $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, $r \in SO(3)$ *et* $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$.

$$\begin{aligned} U(\mathbf{q}) F(I) U^{-1}(\mathbf{q}) &= F(I) \\ V(\mathbf{p}) F(I) V^{-1}(\mathbf{p}) &= F(I + \mathbf{p}) \\ D(r) F(I) D^{-1}(r) &= F(rI) \end{aligned} \tag{1.18}$$

On peut établir, à partir de ces résultats, la conclusion que la position et l'impulsion doivent obeir aux relations de Weyl

$$U(\mathbf{q}).V(\mathbf{p}) = e^{i\mathbf{qp}} V(\mathbf{p}) U(\mathbf{q}). \tag{1.19}$$

Cette expression est une autre version des relations de commutations canoniques entre $\hat{q}$ et $\hat{p}$. En d'autres termes, l'hypothèse que la position et l'impulsion sont des générateurs du groupe de Galilée mène directement à leur incompatibilité. D'où le rôle que les opérateurs de position et impulsion (POVMs) jouent dans les représentations du groupe de Galilée. En effet, les relations de commutation entre $\hat{\mathbf{q}}$ et $\hat{\mathbf{p}}$, sont fixées par les faits suivants : la position et l'impulsion satisfont aux conditions d'invariance et de covariance donnée ci-dessus, et que la position et l'impulsion, peuvent être représentées dans un espace d'Hilbert.

Nous commençons par examiner un couple de groupes à un paramètre unitaire et continue d'opérateurs $U(\mathbf{q})$ et $V(\mathbf{p})$. Nous les appellerons un couple de Weyl s'ils satisfont la relation 1.19 . Par le théorème de Stone $U(\mathbf{a})$ et $V(\mathbf{v})$ peuvent être écrits comme

$$U(\mathbf{a}) = e^{-i\mathbf{a}\hat{\mathbf{q}}}, \quad V(\mathbf{v}) = e^{-i\mathbf{v}\hat{\mathbf{p}}}, \tag{1.20}$$

où $\hat{\mathbf{q}}$ et $\hat{\mathbf{p}}$ sont des opérateurs autoadjoints non bornés, définis sur un domaine commun (dense), enfin, l'écriture de ces exponentielles comme développement en série formelle donne les relations de commutations bien connues.

Selon les relations de Weyl, tout couple de Weyl est unitairement équivalent à la paire Weyl générée par les opérateurs de position et d'impulsion de Schrödinger. Ce résultat, dû à V. Neumann (1931), implique que les générateurs de n'importe quelle paire de Weyl doivent avoir des spectres qui sont toute la droite réelle.

Dans le formalisme usuel de Von Neumann, les observables qui ne commutent pas n'ont pas de distribution de probabilités conjointes. Ainsi, dans le formalisme de von Neumann il n'est même pas possible de parler de mesurabilité commune de la position et de l'impulsion. Cependant, dans le cadre des POV-mesures, les observables qui ne commutent pas peuvent avoir une mesure de probabilité commune mais "flou" "unsharp" [7], par ce formalisme, il est possible de décrire conjointement les mesures d'observables qui ne commutent pas, à condition que la mesure soit suffisamment floue. En effet, on définit l'observable covariante commune à l'observable position et impulsion.

Définition 10 *Soient E et F les observables position et impulsion. L'observable G : $\mathcal{B}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est l'observable commune si pour tout $I, J \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$*

$$\begin{aligned} E(I) &= G(I \times \mathbb{R}^3) \\ F(J) &= G\left(\mathbb{R}^3 \times J\right). \end{aligned} \tag{1.21}$$

D'autre part, on définit aussi une représentation irréductible projéctive W, comme une application sur le groupe des translations dans l'espace des phases,

$$W : (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^3 \times \hat{\mathbb{R}}^3 \to W(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{p}} U(\mathbf{q}) V(\mathbf{p}) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}). \tag{1.22}$$

L'observable $G : \mathcal{B}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est dite observable covariante de l'espace des phases si pour tout $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^3 \times \hat{\mathbb{R}}^3$ et $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$

$$W(\mathbf{q}, \mathbf{p}) G(\Omega) W^{-1}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = G(\Omega + (\mathbf{q}, \mathbf{p})). \tag{1.23}$$

Il s'avert que [9] les observables covariants de l'espace des phases sont de la forme suivante, pour un état ρ donné

$$G_\rho(\Omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_\Omega W(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rho W^{-1}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d\mathbf{p} d\mathbf{q}. \tag{1.24}$$

Les observables position et impulsion deviennent alors des observables marginales de G. En effet, soit $\sum w_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i|$ la décomposition spectrale de ρ, il est facile de montrer que les observables marginales, $E_\rho(I) = G_\rho(I \times \mathbb{R}^3)$ et $F_\rho(J) = G_\rho(\mathbb{R}^3 \times J)$, sont données par les expressions

$$\begin{aligned} E_\rho(I) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_I \sum_i w_i |\psi_i(\mathbf{q} - \mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} dE(\mathbf{q}), \\ F_\rho(J) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_J \sum_i w_i \left|\tilde{\psi}_i(\mathbf{p} - \mathbf{y})\right|^2 d\mathbf{y} dF(\mathbf{p}), \end{aligned} \tag{1.25}$$

où $\tilde{\psi}$ est la transformée de Fourier de ψ.

1.4 Résumé

Tout observable est défini en terme d'une expérience de mesure. Les statistiques des mesures, qui en découlent, doivent être décrites dans la théorie quantique par des mesures de probabilité qui dépendent des états. De ce fait, on représente une observable mesurable E comme un objet mathématique qui donne pour tout état ρ une mesure de probabilité $\mu_\rho^E : I \mapsto \mu_\rho^E(I) = \mathbf{Tr}[\rho E(I)]$, où I est un sous-ensemble Borélien de l'espace des résultats possibles. L'application $\rho \mapsto \mu_\rho^E$ préserve la structure convexe de l'espace des états. Donc, tout observable mesurable est une mesure positive à valeurs opératorielle POV-mesure. Les observables représentées comme des opérateurs autoadjoints avec des mesures spectrales ne sont qu'un cas particulier de la définition en terme de POV-mesures. Les opérateurs autoadjoints sont en fait des PV-mesures.

Chapitre 2

L'espace-temps de Newton-Cartan Compactifié

Avant d'examiner la structure d'espace-temps de Minkowski compactifié, nous discuterons, en premiére étape, la structure de l'espace-temps non-relativiste de Newton-Cartan. En effet, le principe de l'équivalence de la relativité générale reste toujours valable même dans physique non-relativiste. Il est donc possible de formuler la théorie gravitationnelle non relativiste dans un langage géométrique analogue à celui de la théorie d'Einstein. Aprés, nous allons considéré une structure conforme, sur cet espace, definit par les transformations conformes de Galilée. Une fois éclairé par cette structure, nous allons definir le cas relativiste.

2.1 L'espace-temps de Newton-Cartan

Il existe plusieures approches différentes pour formaliser l'espace-temps de la théorie de la gravitation de Newton. Dans l'approche affine pure de Newton-Cartan, on definit le potentiel Newtonien comme une connexion affine, mais dans ce modèle il n'existe pas une métrique à quatre dimensions. D'autre part, dans l'approche "quasi affine" on construit la connexion affine en terme d'un tenseur de rang 3 et de certains champs de vecteurs. Toutefois il faut noter que toutes ces constructions n'ont rien à voir avec la gravitation Einsteiniene. Ceci est dû à l'incompatibilité du potentiel Newtonien avec le temps non relativiste. En revanche, l'approche métrique de la théorie de Newton-Cartan [1] est basée sur l'hypothese qu'une formulation à quatre dimensions de la théorie de Newton sur gravitation est une représentation dégénérée de la théorie Einsteinien de la gravitation. Tout d'abord, il est utile de définir le cadre géométrique de la théorie quatre dimensionelles de Newton-Cartan ayant le groupe de Galilée comme groupe de symmétries.

La description géométrique l'espace-temps de la gravitation newtonienne remonte aux années (1920) par E. Cartan [1] et K. Friedrichs [2]. En l'absence de pesanteur, la géométrie de l'espace-temps plat non relativiste peut être donné en termes de tenseur métrique indépendants d'espace et de temps tous les deux dégénérés et par la métrique compatible avec une connexion linéaire de torsion nulle et dont la courbure est nulle. Le regain d'intérêt pour ces théories a commencé dans les années 1960 avec les travaux de Trautman [3], qui écrivit la loi de la gravitation de Newton en termes de tenseur de courbure d'une connexion convenablement choisis.

Une structure de Newton-Cartan (NC) sur l'espace-temps, est un triplet (M, g, τ, ∇), où M est une variété différentiable à 4 dimensions, une 1-forme fermée, partout non nulle, $\tau = \tau_a dx^a$ appelée 1-forme temps et un champs tensoriel deux fois contravariant $g = g^{ab}\partial_a \otimes \partial_b$ dont le noyau est engendré par la 1-forme de temps. En d'autres termes, il existe un champ de vecteurs $V \neq 0$ sur M tel que $\tau(V) = 0$ alors $g(V, X) = 0$, pour tout champ de vecteurs X. Enfin une connexion linéaire symétrique ∇,dont le tenseur de courbure est R^a_{bcd}, satisfaisant à :

$$\begin{aligned} \nabla\tau &= 0, \qquad \nabla g = 0 \\ g^{\alpha c} R^a_{bcd} &= g^{ac} R^\alpha_{bcd}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

La 1-forme τ, avait été appelée 1-forme de temps, parse qu'on peut, grace à cette forme, définir les surfaces de simultanéités. En effet, le noyau de τ est integrable car elle est fermée. Alors, les variétés maximales intégrales de ce noyau sont par définition les surfaces de simultanéités.

Il existe des repères, dits Galiléens, (e_a), où on a

$$\begin{aligned} \tau\left(e_0\right) &= 1, \qquad \tau\left(e_i\right)=0 \\ g\left(\theta^a,\theta^b\right) &= \delta_i^a\delta^{ij}\delta_j^b \end{aligned} \tag{2.2}$$

où $i,\ j=1,2,3$ et (θ^a) est le repère duale de (e_a), ou co-repére. Les reférentiels, locaux, (e_a), ainsi définis, sont des repères inertiels pour la gravitation non relativiste. En effet, les seules composantes non nulles de la connexion, dans ces coordonnées, sont Γ^i_{00} et $\Gamma^i_{j0}=\Gamma^i_{0j}$. Les équations du champ gravitationnel sont alors

$$R_{ab}=4\pi G\rho\tau_a\tau_b, \tag{2.3}$$

où G est la constante de couplage universelle, ρ la densité de masse et R le tenseur de Richi de la connexion. Sous des conditions appropriées [3], dans le système de coordonnées Galiléennes les composantes, non nulle, de la connexion sont

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{00} &= \omega_{i0} \\ \Gamma^i_{j0} &= \Gamma^i_{0j}=\frac{1}{2}\omega_{ij,} \end{aligned} \tag{2.4}$$

où ω est une 2-forme différentielle qu'on peut écrire comme $\omega=\tau\wedge d\phi$, avec ϕ le potentiel Newtonien. Alors les équations, du champ, se réduisent à

$$\Delta\phi=4\pi G\rho. \tag{2.5}$$

Nous concluons notre discussion sur la formulation géométrique de l'espace-temps. Toutefois, nous considérons ici que la structure géométrique de l'espace-temps de Newton-

Cartan (M, g, τ, ∇) est donnée et nous discutons la mécanique quantique dans cette géométrie, nous n'allons donc pas faire usage des équations de champ.

Dans le prochain paragraphe, nous discutons les propriétés des POV-mesures sur l'espace-temps de Newton-Cartan qui sont covariantes par rapport au groupe de Bargmann.

2.2 Système de Covariance sur l'espace-temps de Newton-Cartan

Soit un système de coordonnées normales $(x^0, \mathbf{x})$ definit par un repère galiléen (e_a) en un point x de la variété espace-temps et soit $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3, d^3\mathbf{x})$ l'état d'un système quantique attribué par l'observateur (e_a). Alors un second observateur (e'_a), voit le même système dans un état $\psi' \in L^2(\mathbb{R}^3, d^3\mathbf{x}')$, selon le principe d'équivalence les deux états sont liées par

$$\psi'(\mathbf{x}') = (U(\Lambda)\psi)(\mathbf{x}'), \tag{2.6}$$

où $\Lambda = (r, \mathbf{v}, \mathbf{a}, a^0, 0)$ est un élément de l'extension centrale du groupe de Galilée, dit groupe de Bargmann à 11 dimensions. Une transformation quelconque $\Lambda = (r, \mathbf{v}, \mathbf{a}, a^0, \lambda)$ de ce groupe, est la composition d'une rotation $r \in SO(3)$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ boost de vitesse, $(\mathbf{a}, a^0)$ translation spatio-temporelle et $\lambda \in \mathbb{R}$ un élément du centre.

On utilise ce groupe de Galilée étendue, $\tilde{G}$, car la représentation U est projective pour le groupe de Galilée mais vectorielle pour le groupe de Bargmann. La loi de ce groupe est

$$\left(r, \mathbf{v}, \mathbf{a}, a^0, \lambda\right)\left(r', \mathbf{v}', \mathbf{a}', a'^0, \lambda'\right) = \left(rr', \mathbf{v}+r\mathbf{v}', \mathbf{a}+r\mathbf{a}' + a'^0\mathbf{v}, a^0 + a'^0, \lambda + \lambda' + \frac{1}{2}a'^0\mathbf{v}^2 + \mathbf{v}r\mathbf{a}\right). \tag{2.7}$$

Une représentation irréductible unitaire de masse m et de spin zéro du groupe de Bargmann est donnée par

$$\left(U\left(g\right)\psi\right)\left(\mathbf{x}\right)=e^{i\lambda m}e^{iH_0a^0}e^{-i\mathbf{Pa}}e^{im\mathbf{vx}}\psi\left(r^{-1}\mathbf{x}\right). \tag{2.8}$$

D'autre part, le groupe de Galilée est le groupe de tous les difféomorphismes, Λ, qui préservent la structure d'espace-temps de Newton-Cartan

$$\Lambda_* g=g, \quad \Lambda_*\tau=\tau, \quad \Lambda_*\nabla=\nabla. \tag{2.9}$$

L'algèbre de Lie de ce groupe est généré par les champs de vecteurs X sur M tels que

$$L_X g=0, \quad L_X\tau=0, \quad L_X\nabla=0, \tag{2.10}$$

ces champs de vecteurs sont alors

$$X=X^0\frac{\partial}{\partial t}+\left\{a^i+\omega^i_j\left(t\right)x^j+v^it\right\}\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{2.11}$$

où X^0 est un réel, ω^i_j sont les paramètres d'une rotation, a^i translation spatiale, v^i les paramètres d'un Boost.

L'objectif, maintenant est d'utiliser une POV-mesure pour décrire les coordonnées, d'un système quantique, mesurées par rapport à un repère Galiléen classique dans l'espace-temps de Newton-Cartan. Pour cela, nous considérons une POV-mesure normalisée $E\left(I\right)$ sur l'espace-temps $\left(M,g,\tau,\nabla\right)$.

Soit le vecteur ψ de l'espace d'Hilbert $L^2\left(\mathbb{R}^3,d^3\mathbf{x}\right)$ décrivant l'état du système, la probabilité que le système se trouve dans l'ensemble Borélien $I\subset M$ est donnée par $p\left(I\right)=\left\langle\psi\left|E\left(I\right)\psi\right.\right\rangle$. Alors, on définit l'opérateur position par

$$\mathbf{x}=\int_M\mathbf{x}dE\left(x\right). \tag{2.12}$$

2.2.1 Opérateur Temps Non-relativiste

En mécanique quantique non relativiste, le temps joue le rôle d'un paramètre extérieur. D'autre part , le temps peut aussi être considéré comme une observable mesurable, comme exemple ; les instants d'apparition des différents événements sont des quantités observables qui doivent être formalisées . Ce problème a motivé plusieurs tentatives de définir l'opérateur de temps. Mais il y a un obstacle de principe en raison du théorème de Pauli qui stipule qu'il n'existe pas d'opérateur de temps autoadjoint si le spectre d'énergie borné par le dessous. Cependant, on peut éviter cette obstruction par le concept de POV-mesure, qui relax la condition d'autoadjoint. Seule la condition de covariance de la POV-mesure par rapport aux translations spatio-temporelles est nécessaire.

Plusieurs auteurs [10] ont considéré le problème de l'opérateur temps en mécanique quantique. Cet opérateur est écrit comme une représentation spectrale généralisée

$$\hat{T} = \int t d\tau, \tag{2.13}$$

où τ est une POV-mesure sur la droite réelle. Etant donné que T n'est pas autoadjoint, τ ne peut pas être une PV-mesure. Citons le theorème de Pauli qui stipule que

Théorème 11 (Pauli) *Soit une observable T, temps, avec la commutation suivante* $(\hbar = 1)$

$$[T, H] = -i, \tag{2.14}$$

où H est l'hamiltonien du système. Alors T ne peut être autoadjoint.

En effet, si τ est une POV-mesure, sur l'axe des réels, covariante sous les translations, alors pour tout intervalle $[t, t']$ la quantité $\langle\psi|\, \tau\left([t, t']\right) |\psi\rangle$ n'est jamais nul et donc τ ne peut être une PV-mesure.

Cependant la POV-mesure τ n'est pas déterminée de façon unique par l'opérateur T, mais elle décrit uniquement la probabilité que le résultat, d'une mesure de temps, appartienne à un intervalle I, elle est donnée par

$$\mu_{\rho}^{\tau}(I) = \mathbf{Tr}\left[\rho\tau(I)\right], \tag{2.15}$$

où ρ est l'état quantique de l'horloge .

L'opérateur temps T, defini par (2.14) a été l'objet de beaucoup de débats [12]. Considérons le cas simple d'une particule libre non relativiste de masse m a une dimension dont l'hamiltonien est $H = \frac{P^2}{2m}$, alors formellement l'opérateur de temps hermétique est donné par

$$T = \frac{m}{2}\left(xp^{-1} + p^{-1}x\right). \tag{2.16}$$

Dans la représentation impulsion cet opérateur est défini comme

$$T = i\frac{m}{2}\left(\frac{1}{p}\frac{d}{dp} + \frac{d}{dp}\frac{1}{p}\right), \tag{2.17}$$

ainssi, dans la représentation impulsion, le domaine de définition $D(T) \subset L^2(\mathbb{R})$, de cet opérateur, est l'espace des fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^*$. Les fonctions propres, solution de l'équation aux valeurs propres, de T

$$T\varphi(p) = t\varphi(p), \tag{2.18}$$

sont donc

$$\varphi_t^{\pm}(p) = \theta(\pm p)\sqrt{\frac{|p|}{2\pi}}e^{\left(-\frac{it}{2}p^2\right)}. \tag{2.19}$$

Ces fonctions propres ne sont pas orthogonales

$$\left\langle \varphi_t^{\pm} \middle| \varphi_{t'}^{\pm} \right\rangle = \frac{1}{2}\delta(t-t') + i\mathcal{P}\frac{1}{\pi(t-t')} \tag{2.20}$$

Cependant, nous avons toujours la relation de fermeture

$$\sum_{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} dt \, |\varphi_t^{\varepsilon}\rangle \langle \varphi_t^{\varepsilon}| = 1. \tag{2.21}$$

D'autre part, le théorème de Pauli stipule que l'opérateur T, ne constitue pas une PV-mesure, mais il peut-être une POV-mesure. Soit τ la POV-mesure décrivant l'opérateur T, elle doit être covariante sous les translations temporelles

$$e^{-itH} \tau (I) \, e^{itH} = \tau (I + t) \,, \tag{2.22}$$

pour tout $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, et elle doit aussi donnée une mesure de probabilité

$$\langle \psi | \, T \, |\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} t \, \langle \psi | \, \tau (dt) \, |\psi\rangle \, . \tag{2.23}$$

Alors, une solution est donnée par

$$\tau (dt) = \sum_{\varepsilon} dt \, |\varphi_t^{\varepsilon}\rangle \langle \varphi_t^{\varepsilon}| \,, \tag{2.24}$$

et la POV-mesure recherchée est

$$\tau (I) = \sum_{\varepsilon} \int_I dt \, |\varphi_t^{\varepsilon}\rangle \langle \varphi_t^{\varepsilon}| \,, \tag{2.25}$$

qui constitue bien un système de covariance avec la représentation $U(t) = e^{-itH}$. En conclusion, nous pouvons dire que τ est une observable temps généralisée. Par ailleurs, la non-orthogonalité des vecteurs propres de T, fait que τ n'est pas un PV-mesure, il n'y a donc pas de contradiction avec le théorème de Pauli.

2.3 L'espace-temps Conforme de Newton-Cartan

Le groupe de symétries de l'équation de Schrödinger libre, appelée groupe de Schrodinger, est généré par les transformations qui commutent avec l'opérateur de Schrödinger

$$S = \partial_t + \frac{1}{2m}\partial_i^2. \tag{2.26}$$

Ce groupe possède en plus des transformations de Galilée, deux générateurs en plus, dont l'action est donnée par

$$(\mathbf{x}, t) \mapsto \left(\lambda \mathbf{x}, \lambda^2 t\right), \tag{2.27}$$

où λ est un paramètre réel non nul, cette transformation est dite dilatation. L'autre transformation, dite transformation spéciale ou inversion ou encore expansion est donnée par

$$(\mathbf{x}, t) \mapsto (\Omega(t)\, \mathbf{x}, \Omega(t)\, t), \tag{2.28}$$

où cette fois

$$\Omega(t) = \frac{1}{\mu t + 1}, \tag{2.29}$$

μ est un paramètre réel. La symétrie Schrodinger est généralement liée aux cas des systèmes de masse non nulle.

La symétrie conforme de Galilei a été découverte par Barut comme une contraction de l'algèbre de Lie relativiste, mais abandonnée par la suite. En effet, si on remplace, ∂_0 par $-im+\partial_t$, m par $\frac{m}{\varepsilon^2}$ et x_i par εx_i avec $\varepsilon = \frac{v}{c}$, dans l'équation de Klein-Gordon, elle se réduit à l'équation de Schrödinger. Cependant, cette contraction mène à des transformations conformes différentes $(\mathbf{x}, t) \mapsto (\lambda \mathbf{x}, \lambda t)$ et $(\mathbf{x}, t) \mapsto (\Omega(t)\, \mathbf{x}, \Omega^2(t)\, t)$. La différence est exprimée par l'exposant dynamique z, qu'on définira plus tard. De plus, ce deuxième type de transformations conformes s'applique seulement pour les systèmes de masse nule. Cependant, ces deux types de symétries non relativistes sont liés à la structure d'espace-temps non relativiste de Newton-Cartan. Ces deux algèbres sont en fait, deux cas particuliers d'une classe, plus large, d'algèbres de Lie d'exposant dynamique $z = \frac{2}{n}$.

On appelle une transformation conforme de Galilée sur (M, g, τ, ∇) tout difféomorphisme de M qui préserve la direction de g et sachant que $g^{ab}\tau_b = 0$ elle préserve automatiquement la direction du temps définit par la 1-forme τ. La forme infinitésimale d'une transformation conforme de Galilée est décrite par un champ vectoriel X sur (M, g, τ, ∇) tel que la dérivée de Lie de la métrique (g, τ) selon la direction X soit

$$L_X g = \chi_X g, \quad L_X \tau = \xi_X \tau, \tag{2.30}$$

où χ_X et ξ_X sont des fonction différentiables sur M, dépendants de X. Il s'avert que la fonction ξ_X ne dépend que de $t = x^0$ ce n'est donc qu'une paramétrisation du temps. L'ensemble $Cgal\,(M, g, \tau)$, de tous ces champs de vecteurs qui vérifient (2.30), munit des crochets de Lie, constitue une algèbre de Lie c'est l'algèbre de Lie du groupe conforme de Galilée. Dans le cas, plat où les composantes de la connéxion sont nulles, les éléments $X = X^a \partial_a$ de cette algèbre sont donnés par

$$X = X^0\,(t)\,\frac{\partial}{\partial t} + \left\{a^i\,(t) + \rho(t)x^i + \omega^i_j\,(t)\,x^j + \left(\kappa^i x_j - 2x^i \kappa_j\right)x^j\right\}\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{2.31}$$

où $X^0\,(t)$ est une simple re-paramétrisation du temps, $\omega^i_j\,(t)$ sont les paramètres d'une rotation, $a^i\,(t)$ translation spatiale, $\rho(t)$ dilatation et $\kappa^i\,(t)$ les paramètres d'une transformation conforme spéciale (inversion).

En raison de la dégénérescence de la métrique (g, τ), l'exposant dynamique z, des transformations conformes de Galilée [4], est defini par la contrainte imposée aux fonctions χ_X et ξ_X

$$\chi_X + \frac{2}{z}\xi_X = 0, \tag{2.32}$$

donc la fonction χ_X ne doit dépendre que de t aussi. Alors, l'algèbre $Cgal_z\,(M, g, \tau)$ qui en résulte est dite algèbre de Lie du groupe conforme de Galilée d'exposant z, et en particulier, l'algèbre $Cgal_2\,(M, g, \tau)$ est l'espace des champs de vecteurs de la forme

$$X = 2X^0\,(t)\,\frac{\partial}{\partial t} + \left\{a^i\,(t) + \rho(t)x^i + \omega^i_j\,(t)\,x^j + \left(\kappa^i x_j - 2x^i \kappa_j\right)x^j\right\}\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{2.33}$$

D'autre part, nous nous intéressons maintenant à une sous algèbre particulière de $Cgal_2\,(M,g,\tau)$, qu'on note $sch\,(M,g,\tau)$ appelée algèbre de Lie de Schrödinger. C'est l'algèbre de Lie des champs de vecteurs qui sont des transformations conformes, d'exposant $z=2$, et qui sont aussi projectives, en d'autre termes elles verifient

$$L_X\Gamma^a_{bc} = \dot{\chi}\delta^a_{(b}\tau_{c)}. \tag{2.34}$$

L'algébre $sch\,(M,g,\tau)$ de ce groupe est générée par les champs de vecteurs

$$X = \left(\alpha t^2 + 2\rho t + \varepsilon\right)\frac{\partial}{\partial t} + \left\{\omega^i_j x^j + \alpha t x^i + \rho x^i + v^i t + a^i\right\}\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{2.35}$$

Par ailleurs, le groupe de Schrödinger G_{Sch}, comprend, en plus des transformations normales de Galilée, les transformations projectives de l'axe du temps, $PSL(2,\mathbb{R})$. L'action projective de ce groupe est donnée par

$$(\mathbf{x},t) \mapsto \left(\frac{R\mathbf{x}+\mathbf{v}t+\mathbf{a}}{ct+d}, \frac{at+b}{ct+d}\right), \tag{2.36}$$

telle que $ad-bc=1$, definie sur le sous-espace de l'espace-temps où $ct+d\neq 0$. En fait, le groupe de Schrödinger n'agit pas sur l'espace-temps Galilei, mais plutôt sur un espace-temps de Galilée où l'axe des temps est compactifié

$$\mathcal{M} = \frac{\mathbb{R}^3\times\left(\mathbb{R}^2\backslash\{0\}\right)}{\mathbb{R}^*} = \frac{\mathbb{R}^3\times S^1}{\mathbb{Z}_2}, \tag{2.37}$$

qui est un espace quotient du groupe de Schrödinger

$$\mathcal{M} = \frac{G_{Sch}}{H}, \tag{2.38}$$

où H est le sous-groupe des rotations, dilatations, inversions et boosts. Plus tard, nous aurons affaire à l'espace-temps compactifié de Minkowski où l'espace et le temps sont tous les deux compactifiés. L'espace-temps $\mathcal{M}$ revêt une structure de Newton-Cartan.

2.4 Opérateur Temps sur L'espace-temps Conforme de Newton-Cartan

Étant donné que l'opérateur temps ne peut pas être auto-adjoint, nous allons reformuler le problème en termes de POV-mesure sur l'axe du temps compactifié, covariant par rapport au groupe conforme. Il est facile de voir que les transformations, affectant le temps dans (2.36), constituent un groupe $SL(2,\mathbb{R})$ dont les élements sont

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{2.39}$$

avec $ad - bc = 1$. En vertu de la décomposition de Bruhat, pour $d \neq 0$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{d} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{d} & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.40}$$

l'axe compactifié des temps, qu'on notera $\mathcal{T}$, est l'espace quotient

$$\mathcal{T} = \frac{SL(2,\mathbb{R})}{K}, \tag{2.41}$$

où K est le sous-groupe des éléments k de la forme

$$k = k\,(d,e) = \pm \begin{pmatrix} \frac{1}{|d|} & 0 \\ e\,|d| & |d| \end{pmatrix}. \tag{2.42}$$

La coordonnée t est alors identifiée à $t = \frac{b}{d}$. Toutes les matrices avec $d = 0$, forment une classe unique interpretée comme le point à l'infinie de la droite projective $\mathbb{R}P^1$. Il est commode de choisir dans chaque classe un représentant $t_G \in SL(2,\mathbb{R})$, nous avons alors une injection $t \mapsto t_G$ de l'espace homogène dans le groupe. Une fois un tel choix a été fait il en résulte le système de facteurs $\Lambda t_G = (\Lambda t)_G (\Lambda, t)_K$ avec

$$(\Lambda t)_G = \begin{pmatrix} 1 & \frac{at+b}{ct+d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.43}$$

Soit maintenant τ, une POV-mesure sur l'axe des temps compactifié, l'opérateur temps compactifié sera

$$\hat{T} = \int_{\mathcal{T}} t\tau\,(dt)\,. \tag{2.44}$$

Cette POV-mesure doit être covariante sous l'action de la représentation U du groupe $SL(2,\mathbb{R})$, donc on doit chercher un système de covariance ($\mathcal{H}$, $\mathcal{T}$, $SL(2,\mathbb{R})$, U, τ). En premier lieu, nous devons discuter les représentations unitaires irréductibles du groupe $SL(2,\mathbb{R})$. Un traitement complet, des représentations unitaires irréductibles de $SL(2,\mathbb{R})$, peut être trouvé dans les références [15]. Rappelons ici des aspects, qu'on doit utiliser.

L'algèbre de Lie du groupe $SL(2,\mathbb{R})$, est généré par trois générateurs H, D et C correspondant aux translations temporelles, dilatation et inversion conforme respectivement. Cette algèbre est caractérisée par

$$[H,C] = -2iD, \quad [D,H] = iH, \quad [D,C] = -iC, \tag{2.45}$$

si la représentation opère sur les états physiques, alors le générateur H, correspondant aux translations du temps, est appelé opérateur énergie. Il est montré que les représentations à énergie positive, forment une série discrète $\left\{D^j, \quad j = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, ...\right\}$. Il en résulte que les représentations, qui agissent sur les états physiques, sont une somme directe de représentations unitaire irréductibles. Dans chaque espace, de représentation, invariant de D^j, on peut choisir une base $\{\Phi_m^j, \quad m = j, j+1, j+2, ...\}$, comme celle du spin mais un peu différente, telle que

$$\begin{aligned} M\Phi_m^j &= m\Phi_m^j, \quad m = j, j+1, ... \\ J_{\pm}\Phi_m^j &= \sqrt{m\,(m\pm 1) - j\,(j-1)}\Phi_{m\pm 1}^j, \end{aligned} \tag{2.46}$$

où

$$M=\frac{1}{2}\left(H+C\right),\quad J_{\pm}=\frac{1}{2}\left(H-C\right)\pm iD. \tag{2.47}$$

Il faut souligner que l'opérateur M doit être positif. Alors, l'état $\psi\in\mathcal{H}$ est donc projeté sur la base $\{\Phi_m^j\}$ comme

$$\psi=\sum_{j,m}\psi_{\alpha jm}\Phi_m^j \tag{2.48}$$

et l'action de la représentation est

$$\left[U\left(\Lambda\right)\psi\right]_{\alpha jm}(t)=\sum_{m'}D^j_{m,m'}\left(\Lambda\right)\psi_{\alpha jm'}. \tag{2.49}$$

Afin de trouver les systèmes de covariances requis, la deuxième étape est la construction de tous les systèmes d'imprimitivités, $(\mathcal{H}',\ \mathcal{T}=\frac{SL(2,\mathbb{R})}{K},\ SL(2,\mathbb{R}),\ V,\ F)$, basées sur le groupe $SL(2,\mathbb{R})$ et l'espace homogène $\mathcal{T}$. Ceci peut être obtenu au moyen du théorème de Mackey, cité dans le premier chapitre. En effet, soit l'espace $\mathcal{H}'$, des fonctions de carré intégrable ϕ sur $\mathcal{T}$, sur lequel agit la représentation V. Soit la PV-mesure F défini par

$$\left(F\left(I\right)\phi\right)(t)=\mu_I\left(t\right)\phi\left(t\right), \tag{2.50}$$

où μ_I est la fonction caractéristique de l'ensemble I. Alors on peut construire un système de covariance $(\mathcal{H},\ \mathcal{T},\ SL(2,\mathbb{R}),\ U,\ \tau)$ si on se donne un opérateur d'entrelacement A : $\psi\in\mathcal{H}\mapsto\phi\in\mathcal{H}'$ des représentations U et V tel que

$$\left\langle\psi\left|\tau\left(I\right)\psi\right.\right\rangle_{\mathcal{H}}=\left\langle A\psi\left|F\left(I\right)A\psi\right.\right\rangle_{\mathcal{H}'}=\int_I\left|\phi\left(t\right)\right|^2dt. \tag{2.51}$$

Cependant, lorsqu'on décompose la représentation V en somme directe de représentations d'énergie positive $\{D^j\}$, alors sur les bases $\{\Phi_m^j\}$ les éléments de matrice de l'opérateur A s'ecrivent $A^{j,j'}_{m,m',\alpha,\alpha'}$. Mais par le lemme de Schur et vue que les représentations D^j sont irréductibles, alors l'opérateur A est diagonale en j et ne dépend pas de m, on a donc

$A^j_{\alpha,\alpha'}$. Nous avons donc

$$[A\psi](t) = \sum_{\alpha,j,m} \sum_{\beta} A^j_{\alpha,\beta} \psi_{\beta jm} \Phi^j_m (t) \tag{2.52}$$

Par ailleurs, nous voulons construire un système de covariance normalisé, donc nous exigeons que $A^+A = 1$,

$$\sum_{\beta} A^j_{\alpha,\beta} \bar{A}^j_{\beta,\alpha'} = \delta_{\alpha,\alpha'}. \tag{2.53}$$

Selon le théorème de Mackey, la représentation V est induite à partir d'une représentation unitaire Δ du sous-groupe K, qu'on notera alors $V = Ind_K^{SL(2,R)}(\Delta)$. Rappelons que toute représentation Δ du groupe K, agissant sur un espace linéaire $\mathcal{L}_\Delta$, peut induire une représentation V du groupe totale $SL(2,R)$ sur $\mathcal{H}'$. Cette représentation induite est definie comme suit : Un vecteur ϕ de $\mathcal{H}'$ est une fonction sur $\mathcal{T}$ à valeurs dans $\mathcal{L}_\Delta$ et la loi de transformation est

$$(V(\Lambda)\phi)(t) = \Delta\left(\left(\Lambda^{-1}, t\right)^{-1}\right) \phi\left(\Lambda^{-1}t\right), \tag{2.54}$$

et en particulier nous avons

$$(V(\Lambda)\phi)(t) = \frac{1}{|a - ct|} \Delta(k_t) \phi\left(\frac{dt - b}{a - ct}\right), \tag{2.55}$$

où

$$k_t = \begin{pmatrix} a - ct & 0 \\ c & \frac{1}{a-ct} \end{pmatrix}. \tag{2.56}$$

D'autre part le sous-groupe K peut être décomposé en

$$K = K_0 \times \mathbb{Z}_2 \tag{2.57}$$

où K_0 est le sous-groupe des éléments k tels que $d > 0$. Alors la représentation unitaire

Δ est en fait de deux types $\{\Delta_\varepsilon, \varepsilon = 0, 1\}$ telle que

$$\Delta_\varepsilon (d, e) = \left(\frac{d}{|d|}\right)^\varepsilon \Pi (|d|, e)$$

où Π est une représentation irreductible unitaire de K_0. Il existe trois classes de représentations unitaires irreductibles $\left\{\Pi^\lambda, \Pi^\pm, \quad \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ du groupe K_0 [15].

La première classe de représentation $\left\{\Pi^\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}\right\}$, sont uni-dimensionelles

$$\Pi^\lambda (|d|, e) = |d|^{-i\lambda}. \tag{2.58}$$

Ainsi, la représentation de K devient $\Delta_\varepsilon^\lambda (d, e) = \left(\frac{d}{|d|}\right)^\varepsilon \Pi^\lambda (|d|)$, et alors de (2.55), la représentation induite, $V^{\lambda,\varepsilon} = Ind_K^{SL(2,R)} \left(\Delta_\varepsilon^\lambda\right)$, agit de la manière suivante

$$\left(V^{\lambda,\varepsilon} (\Lambda) \phi\right)(t) = \frac{|a - ct|^{\varepsilon + i\lambda - 1}}{(a - ct)^\varepsilon} \phi \left(\frac{dt - b}{a - ct}\right). \tag{2.59}$$

Les générateurs sont donc exprimés par

$$H = i\frac{d}{dt}, \quad D = -\frac{i + \lambda}{2} + it\frac{d}{dt}, \quad C = (i + \lambda) t + it^2 \frac{d}{dt}, \tag{2.60}$$

en termes des expréssions 2.60, les opérateurs M, $J_\pm$ sont

$$\begin{aligned} M &= \frac{i + \lambda}{2} t + \frac{i}{2} \left(1 + t^2\right) \frac{d}{dt}, \\ J_\pm &= -\frac{i + \lambda}{2} (t \pm i) - \frac{i}{2} (t \pm i)^2 \frac{d}{dt}. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Sachant que

$$M\Phi_j^j = j\Phi_j^j, \quad J_-\Phi_j^j = 0, \tag{2.62}$$

nous avons

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{i+\lambda}{2}t+\frac{i}{2}\left(1+t^2\right)\frac{d}{dt}\right]\Phi_j^j(t) &= j\Phi_j^j(t), \\
\left[i(t-i)\frac{d}{dt}+i+\lambda\right]\Phi_j^j(t) &= 0,
\end{aligned} \tag{2.63}
$$

on obtient facilement

$$
\begin{aligned}
\Phi_j^j(t) &= (t-i)^{i\lambda-1}, \\
j &= \frac{1-i\lambda}{2}.
\end{aligned} \tag{2.64}
$$

Enfin, pour que l'opérateur M soit positif dans l'espace de représentation de $V^{\lambda,\varepsilon}$ il faut que $j-\frac{\varepsilon}{2}$ soit entier, la seule possibilité est que $\varepsilon=2$ et $\lambda=0$. Alors, seule la représentation $V^{\lambda=0,\varepsilon=2}$, contient une représentation d'énergie positive et c'est la la représentation $D^{\frac{1}{2}}$, dont l'espace de représentation est $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}$ de base $\left\{\Phi_m^{\frac{1}{2}}(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(1-it)^{m-\frac{1}{2}}(1+it)^{-m-\frac{1}{2}}\right\}$. D'autre part l'opérateur d'entrelacement A, agit selon 2.52

$$
[A\psi](t)=\sum_{\alpha,\beta}\sum_m A_{\alpha,\beta}^{\frac{1}{2}}\psi_{\beta,\frac{1}{2},m}\Phi_m^{\frac{1}{2}}(t) \tag{2.65}
$$

La deuxième classe des représentations Π^σ, $\sigma=\pm1$, agit sur l'espace $\mathcal{L}_\Pi$ des fonctions η, à carré sommable, sur la demi-droite réelle $\{r>0, \quad r\in\mathbb{R}\}$, dont l'action est donnée par

$$
\left[\Pi^\sigma(|d|,e)\eta\right](r)=e^{-\sigma ier}|d|\,\eta\left(d^2r\right). \tag{2.66}
$$

La représentation de K devient dans ce cas $\Delta_\varepsilon^\sigma(d,e)=\left(\frac{d}{|d|}\right)^\varepsilon\Pi^\sigma(|d|)$, et la représentation induite, $V^{\sigma,\varepsilon}=Ind_K^{SL(2,R)}\left(\Delta_\varepsilon^\sigma\right)$, agit de la manière suivante

$$
\left(V^{\sigma,\varepsilon}(\Lambda)\phi\right)(t,r)=\exp\left[-\sigma i\frac{cr}{a-ct}\right]\frac{|a-ct|^{\varepsilon-2}}{(a-ct)^\varepsilon}\phi\left(\frac{dt-b}{a-ct},\frac{r}{(a-ct)^2}\right). \tag{2.67}
$$

Dans cette représentation les générateurs s'expriment alors par

$$H = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad D = -i - ir\frac{\partial}{\partial r} - it\frac{\partial}{\partial t}, \quad C = \sigma r + 2it + 2itr\frac{\partial}{\partial r} + it^2\frac{\partial}{\partial t}, \tag{2.68}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} M &= \sigma\frac{r}{2} + it + itr\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{2}\left(1+t^2\right)\frac{\partial}{\partial t}, \\ J_\pm &= -\sigma\frac{r}{2} + i\left(t \pm i\right)\left(1 + r\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{i}{2}\left(t \pm i\right)^2\frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned} \tag{2.69}$$

Cherchons les fonctions de base Φ_m^j, pour ce cas, nous avons à resoudre $J_-\Phi_j^j\left(t,r\right) = 0$ et $M\Phi_j^j\left(t,r\right) = j\Phi_j^j\left(t,r\right)$

$$\begin{aligned} \left\{-\sigma\frac{r}{2} + i\left(t-i\right)\left(1 + r\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{i}{2}\left(t-i\right)^2\frac{\partial}{\partial t}\right\}\Phi_j^j\left(t,r\right) &= 0 \\ \left\{\sigma\frac{r}{2} + it + itr\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{2}\left(1+t^2\right)\frac{\partial}{\partial t}\right\}\Phi_j^j\left(t,r\right) &= j\Phi_j^j\left(t,r\right) \end{aligned} \tag{2.70}$$

une solution est donnée par

$$\Phi_j^j\left(t,r\right) = N\left(1+it\right)^{-2r} r^{j-1}\exp\left(-\frac{\sigma r}{1+it}\right), \tag{2.71}$$

où N est une constante. La condition de normalisation

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\infty} dr \left|\Phi_j^j\left(t,r\right)\right|^2 = 1 \tag{2.72}$$

implique que $\sigma = 1$ et $j > \frac{1}{2}$. Les autres fonctions de base $\Phi_m^j\left(t,r\right)$ se déduises par action successive de l'opérateur J_+, elles sont données par

$$\Phi_m^j\left(t,r\right) = \sqrt{\frac{2\left(2j-1\right)\left(m-j\right)!}{\pi\left(m+j-1\right)!}}\left(\frac{1-it}{1+it}\right)^m \frac{\left(2r\right)^{j-1}}{\left(1+t^2\right)^j} L_{m-j}^{2j-1}\left(\frac{2r}{1+t^2}\right)\exp\left(-\frac{r}{1+it}\right). \tag{2.73}$$

Donc, la représentation induite $V^{\sigma,\varepsilon}$ contient des sous-representations d'énergie positive D^j que pour $\sigma = 1$ et $j > \frac{1}{2}$. Cette décomposition en termes de D^j est comme suit

$$\begin{aligned} V^{1,0} &= D^1 \oplus D^2 \oplus D^3 \oplus ... \\ V^{1,1} &= D^{\frac{3}{2}} \oplus D^{\frac{5}{2}} \oplus D^{\frac{7}{2}} \oplus ... \end{aligned} \tag{2.74}$$

L'opérateur d'entrelacement A, agit cette fois comme

$$[A\psi](t,r) = \sum_{\beta\alpha} \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{m=\frac{j}{2}}^{\infty} A^{\frac{j}{2}}_{\alpha,\beta} \psi_{\beta,\frac{j}{2},m} \Phi^{\frac{j}{2}}_m (t,r)$$

En utilisant le fait que A est une isométrie (2.53) et (2.51) nous aurons la mesure de probabilité de notre système de covariance τ

$$\begin{aligned} \langle \psi \left| \tau (I) \psi \right\rangle_{\mathcal{H}} &= \int_I \|\phi(t)\|^2 dt \\ &= \sum_\beta \int_I \left| \sum_m \psi_{\beta,\frac{1}{2},m} \Phi^{\frac{1}{2}}_m (t) \right|^2 + \\ &\quad \sum_\beta \int_I \int_0^\infty \left| \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{m=\frac{j}{2}}^{\infty} A^{\frac{j}{2}}_{\beta,\alpha} \psi_{\alpha,\frac{j}{2},m} \Phi^{\frac{j}{2}}_m (t,r) \right|^2 dr. \end{aligned} \tag{2.75}$$

Chapitre 3

L'espace-temps de Minkowski Compactifié

3.1 Système de Covariance sur l'espace de Minkowski

L'objectif du présent chapitre est d'étudier comment exprimer, d'une manière quantique, un point dans l'espace-temps de Minkowski (un événement). Cette étude à caractère formel, peut aider à clarifier le sens opérationnel de la notion d'événement, ou en d'autres termes sa définition en termes d'observables. Il est naturel de considérer les coordonnées spatio-temporelles de l'événement comme des observables quantiques décrites par des opérateurs hermitiens (X^{μ}).

Cependant, les opérateurs (X^{μ}) ne peuvent avoir une représentations spectrale, et leurs interprétation statistique nécessite une certaine attention particulière. Ceci est une conséquence de la relation de commutation suivante

$$\exp\left(ip_{\alpha}X^{\alpha}\right)P^{\nu}\exp\left(-ip_{\alpha}X^{\alpha}\right)=P^{\nu}+p^{\nu}, \tag{3.1}$$

il s'ensuit que le spectre commun des quatre opérateurs (P^{ν}) de la quantité de mouvement est invariant par translation dans la direction du quatre-vecteur (p^{ν}). Etant donné que ce spectre commun est contenue dans le cône futur, alors $p_\alpha X^\alpha$ ne peut pas être autoadjoint. Ce raisonnement est en fait trés général et est exprimé une forme rigoureuse par le "no-go théorèmes" dû à Malament (1996) [16].

Le théorème de Malament établit qu'il n'y a pas de mécanique quantique relativiste dans laquelle les particules peuvent être totalement localisées dans des régions spatiales avec des bords nets. Afin de présenter le théorème de Malament, nous aurons besoin des definitions suivantes.

Définition 12 (localisation) *On appel un système de localisation sur M, la donnée de $(M, S, E, \mathcal{H}, U)$, où S une famille d'hyperplans genre espace couvrants M, $\mathcal{H}$ un espace d'Hilbert, E une application $I \mapsto E_I$, où I est un sous-ensemble borné d'un hyperplan de S, vers les opérateurs de projections E_I dans $\mathcal{H}$ et U une représentation unitaire, continue fortement, $a \mapsto U(a)$ du groupe des translations dans $\mathcal{H}$*

Les états pures de la particule sont représentés par des droites dans $\mathcal{H}$, et E_I représente la proposition selon laquelle ; le résultat de la mesure de la position de la particule est certainement dans I.

Tout système de localisation doit vérifier les conditions suivantes

C1 Covariance sous translations : Pour toute translation de paramétre a et pour tout I on a

$$U(a) E_I U^+(a) = E_{I+a}. \tag{3.2}$$

Cette condition de covariance implique que la particule a une dynamique unitaire.

C2 Localisabilité : Si I et J sont deux sous-ensembles disjoint d'un même hyperplan alors

$$E_I E_J = 0. \tag{3.3}$$

La particule ne peut être détectée dans deux régions spatiale disjointes à un instant donné.

C3 Energie borné : Pour toute translation de genre temps a dans M, le générateur $H(a)$ du groupe à un paramétre $\{U(ta), \quad t \in \mathbb{R}\}$, ou l'Hamiltonien, a un spectre borné en dessous. Cette condition affirme que, relativement à un observateur en chute libre, la particule a un état de plus basse énergie.

C4 Micro-causalité : Si I et J sont deux sous-ensembles pas necessairement d'un même hyperplan et si les translations les reliants sont de genre espace

$$E_I E_J = E_J E_I. \tag{3.4}$$

En d'autre termes, la probabilité, que la particule soit détectée dans I, est statistiquement indépendante d'une expérience de mesure de sa position en J.

On peut maintenant énoncer le théorème de Malament [16]

Théorème 13 (Malament) *Soit $(M, S, E, \mathcal{H}, U)$ un système de localisation sur l'espace-temps de Minkowski verifiant les conditions $C1 - C4$, alors E est identiquement nule $E(I) = 0$ pour tout I.*

Cependant, le théorème laisse ouverte la possibilité de construire des observables généralisées en utilisant le formalisme des POV-mesure pour décrire la position d'une particule en mécanique quantique. En d'autres termes, la signification physique des probabilités issues d'une POV-mesure reste la même que pour la PV-mesure et est parfaitement compatible avec l'interprétation standard de la mécanique quantique.

Nous présentons maintenant comment appliquer le formalisme de PV-mesure aux coordonnées (X^μ) d'un événement de l'espace-temps, mesuré par rapport à un repère classique.

Physiquement, les états à une particule, ainsi que l'état du vide, ne peuvent pas définir un événement. La raison en est, qu'ils sont trop simples pour spécifier un événement, nous avons besoin par exemple des collisions entre particules pour déterminer cet événement. Ainsi, notre espace d'Hilbert $\mathcal{H}$ est donc l'espace des états à plusieurs particules.

Désignons par G le groupe de revêtement universel du groupe orthochrone de Poincaré, et par (a, A) les éléments de G, où a est un quatre-vecteur, paramètre d'une translation et $A \in SL(2, \mathbb{C})$ décrit une transformation générale de Lorentz Λ. En effet, G est le produit semi-directe $T \ltimes SL(2,\mathbb{C})$. La représentation U est défini par

$$U(a,\Lambda) = \mathcal{T}(a)\, D(A)\,, \tag{3.5}$$

où $\mathcal{T}$ est une représentation unitaire du groupe des translations et D une représentation unitaire, de dimension finie, du groupe de Lorentz, $SL(2,\mathbb{C})$.

Considérons une mesure spectrale τ sur l'espace $\mathbb{P}$ des impulsions quadridimensionnelles, qui assigne à tout ensemble Borelien $I \subset \mathbb{P}$ un opérateur de projection $\tau(I)$ vérifiant les conditions d'additivité indiquées au premier chapitre, ainsi que la covariance suivante

$$D(\Lambda)\,\tau(I)\, D^{+}(\Lambda) \tag{3.6}$$

Alors, les opérateurs de translations $\mathcal{T}(a)$ ont la décomposition spactrale suivante

$$\mathcal{T}(a) = \int_{\mathbb{P}} e^{ipa}\tau(dp)\,. \tag{3.7}$$

Alors selon le théorème de Mackey [19], la représentation unitaire D et la mesure spectrale τ forment un système d'imprimitivité. Si la mesure τ est restreinte à un hyperboloïd de masse $\mathcal{V}_{\mu}^{+} = \{p = (p_0, \mathbf{p}) / \quad p^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2 = \mu^2, \quad p_0 > 0\}$, où D agit de façon transitive alors le système d'imprimitivité est dit transitive et dans ce cas, la représentation D est une représentation induite. Cependant, nous devons envisager des systèmes d'imprimitivité non transitives, car l'espace d'Hilbert est celui des états à plusieures particules. Le support de la mesure spectrale τ est donc l'espace,

$$\mathcal{V}^{+} = \bigcup_{\mu} \mathcal{V}_{\mu}^{+}. \tag{3.8}$$

La représentation U peut être décomposée en une somme directe de représentations unitaires irréductibles, d'énergie positive, U_m^s de G. Les représentations unitaires irréductibles U_{μ}^s de G, decrivent les particules relativistes de masse μ et de spin s entier ou demi-entier. Il n'est pas nécessaire de spécifier la masse, pour la représentation, car dans ce cas elle est fonction de p.

Les représentations U^s sont definies sur les espace d'Hilbert $\mathcal{H}_s = \mathbb{C}^{2s+1} \otimes L^2\left(\mathcal{V}_\mu^+, \frac{d^3\mathbf{p}}{p_0}\right)$, qu'on appellera, comme dans ([18]), l'espace des états réels de la particule. Elles sont induites par des représentations $\Delta_{\mu,s}$, du sous-groupe $T \ltimes SU(2)$, des translations et des rotations, données par

$$\Delta_{\mu,s}(a,u) = e^{i\mu a^0} \Delta^s(u), \tag{3.9}$$

où Δ^s sont les représentations unitaires irreductibles, sur l'espace linéaire $\mathcal{L}_\Delta$ de dimensions $2s+1$, du sous-groupe $SU(2)$. En prenant le point $e_0(\mu) = (\mu, 0, 0, 0)$ comme point origine dans chaque orbite $\mathcal{V}_\mu^+$, le groupe stabilisateur est alors bien $T \ltimes SU(2)$. Tout $p \in \mathcal{V}_\mu^+$ est lié à cette origine par

$$p = \Lambda(h(p))\, e_0(\mu), \tag{3.10}$$

où $h(p)$ est l'élement de $SL(2,\mathbb{C})$ correspondant à la transformation de Lorentz pure (boost), menant de $e_0(\mu)$ à p. Alors $\mathcal{V}_\mu^+$ devient bien un espace homogène $G/T \ltimes SU(2)$ et les représentations induites sont unitaire irreductibles

$$\left(U^s(a,A)\, \psi_{s,m_s}\right)(p) = e^{ipa} \Delta^s \left\{h(p)\, A h\left(\Lambda^{-1} p\right)\right\} \psi_{s,m_s}\left(\Lambda^{-1} p\right). \tag{3.11}$$

En génerale, l'état est décrit par la fonction d'onde ψ_{σ,s,m_s}, où $m_s = -s, -s+1, ..., s$ et σ représente les autre nombre quantique, sa norme est

$$\|\psi\|^2 = \int_{\mathcal{V}^+} \sum_{\sigma,s,m_s} \left|\psi_{\sigma,s,m_s}(p)\right|^2 d^4p. \tag{3.12}$$

L'action du groupe des translations sur les états est

$$\left(U^s(a,1)\, \psi_{\sigma,s,m_s}\right)(p) = (\mathcal{T}(a)\, \psi)_{\sigma,s,m_s}(p) = e^{ipa} \psi_{\sigma,s,m_s}(p). \tag{3.13}$$

Alors la probabilité que l'événement se trouve dans l'ensemble Borel $I \subset M$ est donnée par

$$p(I) = \langle \psi | \tau(I) \psi \rangle . \tag{3.14}$$

La covariance sous les transformations du groupe Poincaré est exprimée par

$$U(a, \Lambda) \tau(I) U^{+}(a, \Lambda) = \tau(\Lambda I + a), \tag{3.15}$$

L'opérateur position est alors

$$X^{\mu} = \int_{M} x^{\mu} \tau(dx), \tag{3.16}$$

où U est une représentation unitaire du groupe, et (a, Λ) sont les paramètres des translations spatio-temporelles et rotations de Lorentz respectivement. Cependant, les opérateurs unitaires $\exp(ipX)$ décrivent les translations dans l'espace $\mathbb{P}$, mais ils ménent à des états avec énergie-impulsion non physique. Ce problème peut être contourné en supposant que les opérateurs $\tau(I)$ ne sont pas des opérateurs de projections, mais juste des opérateurs positifs bornés, en d'autres termes, τ est une POV-mesure. En particulier, les observables $\tau(I)$ ne peuvent être mesurées à l'aide d'opérations effectuées exclusivement dans la région de l'espace-temps I. Ainsi, les opérateurs (3.16) sont hermitiens, mais pas autoadjoints. L'équation de covariance (3.15) est toujours valable, mais, à la place d'un système d'imprimitivité, nous avons un système de covariance.

Plusieurs auteurs ont entrepris la construction d'une représentation générale d'une POV-mesure covariante sous les transformations de Poincaré [17]. Mais, ici nous voulons construire cette POV-mesure, d'une manière un peu différente, en effet, nous allons adapter une méthode due à Mensky dans [18].

Selon le théorème cité plus haut, tout système de covariance peut toujours être obtenu à partir d'un système d'imprimitivité, qui, sous certaines conditions, est unique à un isomorphisme prés. En premier lieu nous allons construire un tel system d'imprimitivité sur l'espace-temps de Minkowski.

Soit, le système d'impritivité $(\mathcal{H}_D, M, G, U_D, \tilde{\tau})$, où la représentation unitaire U_D de G, est induite par une représentation d'un sous-groupe de G. En effet, la représentation

U_D, que nous allons définir résultent d'une induction où l'on prend l'espace de Minkowski M, comme espace homogène de G. Elle est induite par la représentation D, sur un espace linéaire $\mathcal{L}_D$ de dimension finie, du sous-groupe $SL(2, \mathbb{C})$, stabilisateur de l'origine de l'espace M. L'espace $\mathcal{H}_D$ se compose des fonctions ψ sur l'espace de Minkowski à valeurs dans $\mathcal{L}_D$. Nous avons la transformation

$$\begin{aligned} (U_D(a,1)\psi)(x) &= \psi(x-a) \\ (U_D(0,A)\psi)(x) &= D\{A\}\psi\left(\Lambda^{-1}x\right). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Cependant, les états ψ ne peuvent être considérés comme des états physiques d'une particule, elles sont écartées par le théorème de Malament. En effet, ces fonctions d'onde relativistes , normalisées par

$$\|\psi\|^2 = \int d^4x \, |\psi(x)|^2 , \tag{3.18}$$

ont été examinés par Stueckelberg [20]. Mais, cette théorie a rencontré des difficultés d'interprétation et a été abondoné. Cependant, l'idée d'un opérateur de position relativiste, $\tilde{X}$, s'est avéré correspondre à la représentation considérée par Stueckelberg, et reste d'actualité. Appelons le système d'imprimitivité lié à cet opérateur, un système d'imprimitivité de Stueckelberg. L'opérateur de position de Stueckelberg satisfait toutes les conditions requises. Toutefois, cet opérateur agit dans l'espace, $\mathcal{H}_D$, des fonctions normalisée selon (3.18) et ses vecteurs propres (états localisés) sont orthogonaux par rapport au produit scalaire correspondant. Mais, cet espace n'est pas un espace d'états réels pour une particule avec une masse et de spin définis. Cela conduit à des difficultés d'interprétation. Il a été montré dans [19], que le système d'imprimitivité de Stueckelberg est construit par une représentation du groupe de Poincaré, induite par le sous-groupe de Lorentz. Une connexion a été établie entre cette représentation et celle qui décrit les états avec une masse et un spin bien définis.

Soit la PV-mesure $\tilde{\tau}$ definit par

$$\left(\tilde{\tau}\left(I\right)\phi\right)\left(t\right) = \mu_I\left(t\right)\phi\left(t\right), \tag{3.19}$$

où μ_I est la fonction caractéristique de l'ensemble I. Alors on obtien le système d'imprimitivité de Stukelberg $(\mathcal{H}_D, M, G, U_D, \tilde{\tau})$

$$\langle\psi\left|\tilde{\tau}\left(I\right)\psi\right\rangle_{\mathcal{H}_D} = \int_I d^4x\left|\psi\left(x\right)\right|^2. \tag{3.20}$$

Alors, on definit l'opérateur, autoadjoint, de Stukelberg par

$$\tilde{X}^\mu = \int_M x^\mu\tilde{\tau}\left(dx\right). \tag{3.21}$$

Maintenant, sachant que notre espace d'Hilbert $\mathcal{H}$ des états physiques, peut se décomposer comme une integral directe des espaces $\mathcal{H}_{\mu,s}$

$$\mathcal{H} = \int^{\oplus}\mathcal{H}_{\mu,s}.$$

Alors le système de covariance est construit grace à l'opérateur, J^s,

$$J^s : \mathcal{H}_{\mu,s}\subset\mathcal{H}\to\mathcal{H}'_{\mu,s}\subset\mathcal{H}_D, \tag{3.22}$$

cet opérateur J^s établi une relation entre les espaces des états (réels), ϕ_s, d'une particule et l'espace des états (localisés), mais il doit maintenir les propriétés symétries. Cela signifie que J^s entrelace les deux représentations correspondantes $J^s_m\in[U^s_m, U_D]$.

A l'aide du théorème de l'entrelacement des représentations induites [19], nous avons

$$\left(J^s\phi_s\right)\left(x\right) = \frac{\mu}{4\pi^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathcal{V}^+_m}\frac{d^3\mathbf{p}}{p_0}e^{-ipx}D\left(h\left(p\right)\right)\left(J_s\phi_s\right)\left(p\right), \tag{3.23}$$

où $J_s : \mathcal{L}_\Delta\to\mathcal{L}_D$, est un opérateur qui entrelace la représentation Δ^s de $SU\left(2\right)$ avec la restriction de la représentation D à $SU(2)$, $J_s \in [\Delta^s, D \downarrow SU(2)]$. Ainsi, les espaces $J^s\mathcal{H}_{\mu,s}$ sont des sous-espaces d'états généralisés, $\psi_s(x)$, (non normalisable). Maintenant, le produit scalaire $\langle\psi|\, J^s\phi_s\rangle_{\mathcal{L}_D}$ est bien défini ce produit scalaire peut être naturellement interprété comme une amplitude de probabilité pour que l'état réel ϕ_s se transform en état localisé [18].

Enfin l'opérateur hermitien, mais non autoadjoint, de position est

$$X^\mu = (J^s)^+ \tilde{X}^\mu J^s. \tag{3.24}$$

En conclusion, nous avons construit un système de covariance basé sur un système d'imprimitivité sur l'espace d'Hilbert de Stukelberg.

3.2 Système de Covariance sur l'espace de Minkowski Compactifié Conforme

Les équations de Maxwell sont invariantes non seulement sous les transformations de Poincaré, mais aussi sous les transformations d'un groupe plus large le groupe conforme. En effet, au début du 20iem siecle, [26], on a établi l'invariance des équations du champ électromagnétique sous les transformations dite inversions conforme

$$K : (\mathbf{x}, t) \mapsto \frac{(\mathbf{x}, t)}{\mathbf{x}^2 - c^2t^2}. \tag{3.25}$$

Mais ces transformations sont singulières sur le cône de lumière $x^2 = \mathbf{x}^2 - c^2t^2 = 0$. En général, ces transformations sont composées avec les translations $T(c)$, pour donner $KT(c)K$, qui restent toujours singulières sur l'espace-temps de Minkowski.

Le groupe conforme s'avert être le groupe le plus large possible. En effet les travaux de Segal [25], ont montré que le groupe de Galilée est une contraction du groupe de Poincaré, et le groupe Poincaré vient d'une contraction du groupe conforme, mais le groupe conforme n'est la contraction d'aucun groupe, il est rigide. Il ya donc de fortes chances, du point de vue mathématique et pour des raisons physiques, que le groupe conforme soit le groupe de la symétrie fondamentale de l'espace- temps.

Cependant l'action du groupe conforme sur l'espace de Minkowski M est singulière, mais elle s'étend naturellement à une action non singulière sur l'espace-temps compacifié de Minkowski M^c. Dans cette compactification on ajoute un cône de lumière à l'infini à l'espace de Minkowski, l'espace ainsi obtenu est un espace homogène du groupe conforme $SO(4,2)$, [22].

Dans ce paragraphe, nous essayons de construire un opérateur de position sur l'espace de Minkowski compacifié. Nous utiliserons la la théorie des représentations induites.

Soit l'hypersurface quadratique de $\mathbb{R}^{2,4}$ défini par

$$Q = \left\{\eta \in \mathbb{R}^{2,4}/\eta \neq 0,\ \eta^2 = \eta^\mu \eta_\mu - \eta_4\eta_4 + \eta_5\eta_5 = 0\right\}, \tag{3.26}$$

alors, l'espace M^c est l'espace projective

$$M^c = \frac{Q}{\sim}, \tag{3.27}$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence

$$\eta \sim \eta' \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}^*,\ \eta = \lambda\eta'. \tag{3.28}$$

En d'autres termes, on identifie tous les vecteurs colinéaires, seule la direction compte. Les points x de M^c sont les représentants des classes d'équivalences $[\eta]$. L'espace de Minkowski compactifié est difféomorphe à l'espace compacte

$$M^c = S^1 \times S^3/\mathbb{Z}^2. \tag{3.29}$$

Alors, le groupe $SO(4,2)$, qui agit naturellement sur $\mathbb{R}^{2,4}$ peut définir une action sur M^c par $gx = [g\eta]$. Si on choisit une origine $x_0 = [(0,0,0,0,1,1)]$, le groupe stabilisateur est le groupe de Lorentz, qui laisse les coordonnées η_4 et η_5 fixes. Cependant, l'espace-temps de Minkowski est dense dans cet espace, nous allons alors discuter la construction du système de covariance sur M, avec le groupe conforme comme groupe de symétrie.

Il existe une étroite relation entre l'algèbre de la mécanique quantique et de la structure du groupe conforme. Nous allons ce problème sur la relation entre les opérateurs de position et l'algèbre du groupe conforme. Snyder [23] est le premier à avoir associé les opérateurs de position de la mécanique quantique avec des éléments de l'algèbre de Lie d'un groupe de transformation, il a étudié les opérateurs de position obtenus par les éléments de l'algèbre de Lie du groupe de De Sitter, qui laissent invariant l'élement de longueur $\eta^2 = \eta^\mu \eta_\mu - \eta_4 \eta_4$. Plus tard, Yang [24], a discuté le cas du groupe qui laisse invariant $\eta^2 = \eta^\mu \eta_\mu - \eta_4 \eta_4 - \eta_5 \eta_5$ et finalement, Segal [25] a discuté le groupe conforme de l'espace-temps, qui laisse invariant $\eta^2 = \eta^\mu \eta_\mu - \eta_4 \eta_4 + \eta_5 \eta_5$, où il a montré comment l'algèbre de la mécanique quantique peut être obtenue comme une limite de l'algèbre de Lie du groupe conforme.

Le groupe conforme agit sur les coordonnées de l'espace-temps par les transformations suivantes : Dilatations

$$D : x \mapsto x'_\mu = \rho x_\mu, \quad \rho > 0, \tag{3.30}$$

générées par l'opérateur D, les transformations speciales conformes dans une certaine direction c

$$KT\left(c\right)K : x \mapsto x'_\mu = \frac{x_\mu - c_\mu x^2}{1 - 2cx + c^2 x^2}, \tag{3.31}$$

les générateurs sont K_μ et en fin, les transformations de Poincaré

$$(a, \Lambda) : x \mapsto x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu + a_\mu, \tag{3.32}$$

générées par $(M_{\mu\nu}, P_\mu)$. Les générateurs $\{J_{\alpha\beta}; \quad \alpha, \beta = 0, 1, ..., 5\}$, de l'algèbre de Lie du groupe conforme

$$J_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}, \quad J_{\mu 4} = \frac{1}{2}\left(P_\mu - K_\mu\right), \quad J_{\mu 5} = \frac{1}{2}\left(P_\mu + K_\mu\right), \quad J_{45} = D, \tag{3.33}$$

verifient les relations de commutations suivantes

$$[J_{\alpha\beta}, J_{\delta\gamma}] = i\left(g_{\alpha\gamma}J_{\beta\delta} + g_{\beta\delta}J_{\alpha\gamma} - g_{\alpha\delta}J_{\beta\gamma} - g_{\beta\gamma}J_{\alpha\delta}\right), \tag{3.34}$$

où g est une matrice diagonale 6×6

$$(g_{\alpha\beta}) = (+, -, -, -, -, +)\,. \tag{3.35}$$

Une conséquence immédiate des relations de commutations (3.34) est la loi

$$e^{i\rho D}P^2e^{-i\rho D} = e^{-2\rho}P^2, \tag{3.36}$$

cela signifie qu'une représentation irréductible du groupe conforme avec $P^2 \neq 0$, est une superposition de représentations irréductibles du groupe de Poincaré. D'autre part, les représentations, du groupe conforme, peuvent être construites à partir des représentations unitaires irréductibles de l'algèbre du groupe de Lorentz. Nous allons discuter seulement le cas du spin nul mais $P^2 \neq 0$. Cette théorie utilise les représentations de dimension fini du groupe, L, stabilisateur de l'origne, dans ce cas tous les générateurs sont hermitiens. Toutes les représentations du groupe conforme ainsi obtenues seront étiquetée par le contenu Lorentzien , s et m, ainsi que la dimension d'échelle, l un nombre réel, (valeurs propres de l'opérateur de dilatation). Cependant, les états de masse non nulle ne peuvent avoir une dimension d'échelle l bien définie car $[D, P_\mu] \neq 0$ alors que $[M_{\mu\nu}, D] = 0$.

Soient $\sigma_{\mu\nu}$, Δ et κ_μ les générateurs du groupe L stabilisateur de l'origine de l'espace des impulsions, ce groupe est donné par

$$L = SO(3) \rtimes \{D\} \rtimes \{K\}\,. \tag{3.37}$$

Les générateurs $\sigma_{\mu\nu}$, Δ et κ_μ correspondent aux transformations de Lorentz, dilatations, et transformations conformes speciales respectivement. Ils verifient

$$\begin{aligned}
[\Delta, \sigma_{\mu\nu}] &= 0, \qquad [\Delta, \kappa_\mu] = -i\kappa_\mu \\
[\kappa_\mu, \kappa_\nu] &= 0, \qquad [\sigma_{\mu\nu}, \kappa_\rho] = -i\left(\eta_{\mu\rho}\kappa_\nu - \eta_{\nu\rho}\kappa_\mu\right)
\end{aligned} \tag{3.38}$$

et alors, l'action des générateurs D et K_μ sur les champs est

$$\begin{aligned}
D\Phi(x) &= i\left(p^\mu \partial_\mu + l\right)\Phi(x) \\
K_\mu \Phi(x) &= \left[-2l\partial_\mu - 2p^\nu \partial_\nu \partial_\mu + p_\mu \partial_\nu \partial^\nu + \kappa_\mu\right]\Phi(x).
\end{aligned} \tag{3.39}$$

La représentation induite, sur le groupe conforme, par cette derniere représentation de L est donc

$$\begin{aligned}
P_\mu &= p_\mu \qquad (3.40) \\
M_{\mu\nu} &= i\left(p_\mu \partial_\nu - p_\nu \partial_\mu\right) \\
D &= i\left(p^\nu \partial_\nu + l\right) \\
-K_\mu &= 2l\partial_\mu + 2p^\nu \partial_\nu \partial_\mu - p_\mu \partial_\nu \partial^\nu
\end{aligned}$$

L'espace d'Hilbert $\mathcal{H}^s$ de cette représentation est munit du produit scalaire

$$(\phi_1, \phi_2) = \int_{\mathcal{V}^+} d^4p \left(p^2\right)^{l-2} \phi_1^*(p)\phi_2(p). \tag{3.41}$$

On peut définir la position spatio-temporelle d'un événement à partir des générateurs de la symétrie conforme. Classiquement, la position dans l'espace-temps est définie à partir de l'intersection d'au moins quatre cônes de lumière, ou d'une façon équivalente, à partir de l'intersection d'au moins quatre rayons de lumière de différentes directions de propagation. Cela fournit une expression algébrique explicite d'une relation reliant les composantes de la position aux composantes P_μ de l'impulsion, du moment angulaire

$M_{\mu\nu}$ et le générateur des dilatations et D . La même définition peut être appliquée dans le cas quantique en considérant que les champs quantiques qui décrivent l'événement. Ceci signifie que les champs quantiques utilisés pour la localisation correspondent à une représentation de masse non nule ($P^2 > 0$).

Si on exclu les transformations conformes speciales, une généralisation du cas classique, conduit à la définition suivante pour l'opérateur de position, dans l'espace-temps a symmétrie conforme [27]. En effet, si on écrit les générateurs $M_{\mu\nu}$ sous la forme suivante

$$M_{\mu\nu} = P_\mu X_\nu - P_\nu X_\mu + S_{\mu\nu}, \tag{3.42}$$

où $S_{\mu\nu}$ est l'opérateur de spin definit, à l'aide de l'opérateur de Pauli-Lubanski W^μ, par

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{m^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} W^\rho P^\sigma \tag{3.43}$$

où

$$W^\mu = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} M_{\nu\rho} P_\sigma. \tag{3.44}$$

Alors, de la représentation (3.40), nous avons

$$\begin{aligned} X^\mu &= \frac{1}{m^2}\left(P_\nu M^{\nu\mu} + P^\mu D\right) && (3.45) \\ &= i\partial^\mu + \frac{il}{m^2} p^\mu. && (3.46) \end{aligned}$$

Les propriétés algébriques, des opérateurs X^μ, découlent de l'algèbre (3.34)

$$[X^\mu, P^\nu] = i\eta^{\mu\nu}, \quad [X^\mu, D] = X^\mu, \quad \left[X^\mu, M^{\rho\lambda}\right] = i\left(\eta^{\rho\mu} X^\lambda - \eta^{\lambda\mu} X^\rho\right) \tag{3.47}$$

Nous avons ainsi défini l'opérateur de position dans l'espace-temps conforme, d'une manière covariante de Lorentz. En outre, nous avons décrit ses transformations sous les générateurs de Poincaré et dilatations. Maintenant si on considère le groupe conforme entier, on doit examiner la covariance de cet opérateur sous les transformations speciales.

Pour cela nous adoptant le même raisonnement que dans [27], on définit le scalaire

$$K(a) = \frac{1}{2} a^{\mu} K_{\mu}, \tag{3.48}$$

où la quatre-vecteur a représente les accelerations le long des coordonnées. $K(a)$ est donc une transformation menant à un repère acceleré. En cosequence, les transformations de P et P^2 sont

$$\left[K(a), P^2\right] = 2P^2 a_{\mu} X, \tag{3.49}$$

c'est en d'autre termes la transformation de la masse, et

$$[K(a), P_{\mu}] = a_{\mu} D - a^{\nu} M_{\nu\mu}. \tag{3.50}$$

Enfin, nous obtenons la transformation de l'opérateur position

$$[K(a), X_{\mu}] = \frac{a_{\mu}}{2} X^2 - a^{\nu} X_{\nu} X^{\mu}. \tag{3.51}$$

Cette commutation des termes proportionnelles à des positions qui coïncident avec le shift prédict par la relativité classique.

Chapitre 4

La symétrie conforme et le confinement en QCD

4.1 Espace-temps Anti-de Sitter à Cinq Dimensions AdS_5

Nous allons ici voir comment obtenir le potentiel de Cornell [30][31]

$$V(r) = -\frac{\kappa}{r} + \frac{r}{a^2} + C, \tag{4.1}$$

d'une manière purement géométrique.

L'espace-temps Anti-de Sitter, AdS_5, est décrit de plusieurs façons dans la littérature, la plus intéressante étant qu'il est une solution symétrique maximale des équations de champ d'Einstein avec une constante cosmologique négative. Actuellement, la géométrie de cet espace est l'une des plus intrigantes géométries dans le domaine de la physique théorique, car elle permet d'établir un lien entre la théorie des branes et la théorie QCD. En effet, selon la conjecture de Maldacena [28], la théorie des cordes sur le bord de AdS_5 apparait duale à la théorie des champs conformes (CFT), associée à la QCD dans un espace-temps à $1+3$ dimensions. La géométrie de l'espace AdS_5 est définie comme une hypersurface d'un un espace de Minkowski à $2+4$ dimensions, ayant deux axes de temps (η_0, η_5), dont l'élément de longueur est donné par [29]

$$dS^2 = d\eta_0^2 - d\eta_1^2 - d\eta_2^2 - d\eta_3^2 - d\eta_4^2 + d\eta_5^2. \tag{4.2}$$

L'hypersurface est alors donnée par

$$\eta_0^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2 - \eta_3^2 + \eta_5^2 - \eta_4^2 = -R^2, \tag{4.3}$$

où R est un réel.

On introduit de nouvelles coordonnées, dites globales, $(\tau, \rho, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4)$, où $\rho \geq 0$ et $\tau \in [0, 2\pi]$, comme suit

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= R\cosh(\rho)\cos(\tau), \quad \eta_5 = R\cosh(\rho)\sin(\tau), \\
\eta_i &= R\Omega_i \sinh(\rho), \quad i = 1,2,3,4 \\
\sum_{i=1}^{4} \Omega_i^2 &= 1.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Aprés, on exprime, en terms de ces nouvelles variables, $d\eta_0^2$, $d\eta_1^2$, $d\eta_2^2$, $d\eta_3^2$, $d\eta_4^2$ et $d\eta_5^2$, sachant que $\sum_i \Omega_i d\Omega_i = 0$, nous obtenons l'élement de longueur intrinsec dans l'espace AdS_5

$$ds^2 = R^2 \left(\cosh^2(\rho)\, d\tau^2 - d\rho^2 - \sinh^2(\rho) \sum_{i=1}^{4} d\Omega_i^2 \right). \tag{4.5}$$

Une première constatation peut être mise, quand $\rho \to 0$, la métrique devient

$$ds^2 = R^2 \left(d\tau^2 - d\rho^2 - \rho^2 \sum_{i=1}^{4} d\Omega_i^2 \right), \tag{4.6}$$

qui est celle du cylindre $S^1 \times \mathbb{R}^4$.

D'autre part, on definit aussi d'autre coordonées (u, x^μ) dites de Poincaré par

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= \frac{1}{2u}\left(1+u^2\left(R^2+x^\mu x_\mu\right)\right), \\
\eta_5 &= Rux^0 \\
\eta_i &= Rux_i \\
\eta_4 &= \frac{1}{2u}\left(1-u^2\left(R^2+x^\mu x_\mu\right)\right)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Aprés tout calcul fait, on obtien une nouvelle forme pour la métrique

$$ds^2 = R^2\left(\frac{du^2}{u^2}+u^2dx^\mu dx_\mu\right).$$

De même, on introduit la coordonnée qui sert dans la correspondance CFT/AdS, par $z = u^{-1}$

$$ds^2 = R^2\frac{dz^2+dx^\mu dx_\mu}{z^2}. \tag{4.8}$$

A l'aide de ces coordonnées on peut définir, l'horizon comme la limite $R^2u \to 0$, ainsi que le bord par la limite $R^2u \to \infty$ de l'espace AdS_5. Mais on peut aussi montrer que tout point de cet espace est causalement lié à ce bord. En effet, calculons le temps (x^0) necessaire pour que la lumière atteint le bord, on a pour un rayon lumineux

$$ds^2 = 0 = R^2\left(\frac{du^2}{u^2}+u^2\left(dx^0\right)^2\right), \tag{4.9}$$

donc

$$\Delta x^0 = \int_{>0}^{\infty}\frac{du}{u^2}, \tag{4.10}$$

qui reste fini. Les rayons lumineux peuvent atteindre le bord (∂AdS_5) dans un temps fini, et donc chaque point de l'espace-temps AdS_5 est en contact de causalité avec le bord de l'espace. C'est une caractéristique qui n'est pas présente dans l'espace de Minkowski. La nature du bord (∂AdS_5) peut être clarifiée si on considère une re-paramétrisation

$\eta \to \alpha\eta$, avec un paramètre $\alpha \gg 1$, alors (4.3) devient

$$\eta_0^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2 - \eta_3^2 + \eta_5^2 - \eta_4^2 = 0. \tag{4.11}$$

Cette nouvelle équation décrit un cône se situant à l'interieur de AdS_5. Étant donné que cette dernière équation est invariante sous le changement $\eta \to \lambda\eta$, alors on peut prendre $\eta_5 - \eta_4 = 1$ et alors on aura

$$\eta_5 + \eta_4 = \eta_\mu \eta^\mu. \tag{4.12}$$

Donc cette forme quadratique décrit une paramétrisation de l'espace de Minkowski plus un point "à l'infini" $\eta_5 - \eta_4 = 0$. Ceci est préprécisément une compactification de l'espace de Minkowski, M^c, de la même façon que la sphère de Riemann est obtenue à partir du plan complexe.

Le groupe d'isométrie de l'espace AdS_5 est le groupe $SO(2,4)$, il agit sur l'espace de Minkowski compactifié, le bord ($\partial AdS_5 = M^c$), par des transformations de Lorentz

$$x^\mu \mapsto \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \tag{4.13}$$

des translations

$$x^\mu \mapsto x^\mu + a^\mu, \tag{4.14}$$

des dilatation

$$x^\mu \mapsto \rho x^\mu, \tag{4.15}$$

et des transformations conformes spéciales

$$x^\mu \mapsto \frac{x_\mu - c_\mu x^2}{1 - 2cx + c^2 x^2}. \tag{4.16}$$

Les générateurs ($J_{\alpha\beta}$) du groupe $SO(2,4)$ sont liés aux générateurs $M_{\mu\nu}$, de Lorentz, P_μ des translations, K_μ des transformations conformes spéciales et D des dilatations par les relations (3.34) du chapitre précédent.

Il est donc naturel à ce que si une théorie, formulée dans l'espace AdS_5, est invariante sous le groupe $SO(2,4)$, elle doit avoire une description "holographique" duale elle donnée en termes d'une théorie des champs conformes sur l'espace projective M^c. En outre, étant donné que la limite correspond aux grandes valeurs de la coordonnée radiale, en d'autres termes, aux grande valeurs de l'énergie, cette théorie duale holographique est une théorie des champs conformes à la limite ultar-viollete. Ceci est la correspondance AdS/CFT.

4.2 La QCD Holographique, ou la correspondance AdS/QCD

La QCD est acceptée comme étant la théorie microscopique des interactions fortes. Il est cependant difficile de décrire directement les interactions fortes, car les quarks et les gluons ne sont pas des degrés de liberté pertinents à basse énergie. La QCD holographique, est une tentative de décrire les interactions fortes directement avec hadrons, qui sont les bons degrés de liberté à basse énergie.

L'approche AdS/QCD cherche à identifier la théorie de la gravité duale à QCD. Il existe plusieur modèles holographiques aptes à décrire le régime non perturbatif de la QCD voire [29].

Afin de préciser comment la correspondance AdS/CFT est réalisée pour la théorie chromodynamique quantique (QCD). On introduit de nouvelles coordonnées ξ et x_μ

$$\begin{aligned} \eta_5 + \eta_4 &= e^{\xi}, \\ \eta_\mu &= e^{\xi} x_\mu, \quad \mu = 0,1,2,3, \end{aligned} \tag{4.17}$$

la variable ξ est dite variable holographique. L'équation definisant AdS_5 devient

$$e^{\xi}\left(\eta_5 - \eta_4\right) + e^{2\xi}\left(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\right) = -R^2. \tag{4.18}$$

On voit bien que AdS_5 contient un espace-temps de Minkowski plat, $\mathbb{R}^{1,3}$, mais déformé par l'holographie $e^{2\xi}$. D'autre part, les intersections des hyperplans $\left\{\eta_5+\eta_4=e^{\xi}, \quad \xi\in\mathbb{R}\right\}$ avec le cône $\eta_0^2-\eta_1^2-\eta_2^2-\eta_3^2+\eta_5^2-\eta_4^2=0$, sont des hyperplans Π_ξ, appelés "branes", qui sont des copies d'espace-temps de Minkowski plats. Le bord conforme de l'espace AdS_5 est cette fois défini par la limite $\xi\gg 1$, dans cette limite l'équation (4.18) devient

$$\frac{(\eta_5-\eta_4)}{e^{\xi}}+\left(x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2\right)=0, \tag{4.19}$$

elle définit le cône de lumière de Minkowski.

La correspondance AdS/CFT établit un lien entre les champs dans AdS_5 et les opérateurs de champs dans l'espace à quatre dimensions. En raison de la forme particulière de l'espace anti-de Sitter, une théorie des champs dans cet espace-temps nécessite des conditions aux limites pour ses champs pour que la théorie soit complètement déterminée. Le problème est difficile car les points de cet espace sont causalement liés aux bord. Néanmoins, en utilisant le fait que le bord de l'espace AdS_5 est un espace-temps compactifié, il est possible d'introduire un couplage entre les opérateurs O de la CFT et leurs sources ϕ_0

$$\int_{M^c} O\left(\mathbf{x}\right)\phi_0(\mathbf{x})d^4x, \tag{4.20}$$

de telle sorte qu'il existe un champ $\phi\left(\mathbf{x},z\right)$ dans AdS_5 (bulk) telque $\phi\left(\mathbf{x},z=0\right)=\phi_0(\mathbf{x})$. Le couplage est definit d'une manière que les nombres quantiques par rapport au groupe de symétrie à la fois des opérateurs O et les champs doit $\phi_0(\mathbf{x})$ s'accordent. De cette façon, un lien est réalisé entre les champs dans l'espace AdS_5 et les opérateurs de la CFT. D'où l'identité entre la fonctionelle génératrice des fonctions de corrélation des opérateurs du champ dans le côté CFT et la fonction de partition sur le côté AdS_5

$$\left\langle e^{\int_{M^c} O(\mathbf{x})\phi_0(\mathbf{x})d^4x}\right\rangle_{CFT}=Z_{AdS}^{string}\left[\phi\left(\mathbf{x},z=0\right)=\phi_0(\mathbf{x})\right]. \tag{4.21}$$

Avant d'appliquer cette relation pour notre cas, nous voulons mentioner que cette correspondance dans sa forme complète est une équivalence de deux théories, une dans un espace-temps à 5 dimensions et l'autre dans l'espace-temps à quatre dimensions de Minkowski, frontière du premier espace.

4.3 Le potentiel Quark-antiquark

Le potentiel entre quark lourds est l'un des observables de base du confinement. Il a été évalué en détail dans les simulations sur réseaux (latice) et les résultats révèlent un accord remarquable avec le potentiel de Cornell (4.1). L'une des conséquences de la correspondance AdS/CFT [3], est qu'il existe une description en termes de théorie des cordes pour les interactions fortes. Dans notre cas, citons brièvement quelques résultats.

Dans la théorie des champs, le potentiel, $V(r)$, entre deux quarks distants de r est déduit de la valeur moyenne de la boucle, dans l'espace-temps, de Wilson, les reliant [32]

$$\langle \mathcal{W}(\mathcal{C}) \rangle \sim \lim_{T \to \infty} e^{-TV(r)}. \tag{4.22}$$

Dans cette dernière expression T est le "diamètre" temporel de la boucle. Selon, la correspondance AdS/CFT la valeur de $\langle \mathcal{W}(\mathcal{C}) \rangle$, est reliée à l'aire exterieur Σ de la surface d'univers de la corde [32]

$$\langle \mathcal{W}(\mathcal{C}) \rangle \sim \lim_{T \to \infty} e^{-TV(r)} \sim e^{-\Sigma}. \tag{4.23}$$

D'où on obtient

$$V(r) = \frac{g}{2\pi T} \int_{\Sigma} d\xi_0 d\xi_1 \sqrt{S_{str}}, \tag{4.24}$$

où S est l'action de Nambu-Goto [32]

$$S_{str}(x) = \det\left(G_{mn} \partial_\alpha x^m \partial_\beta x^n\right), \tag{4.25}$$

alors que (ξ_0, ξ_1) sont les coordonnées sur la surface d'univers de la corde, g^{-1} est la tension de la corde et (G_{mn}) est la métrique de l'espace AdS_5. Prenons une généralization de la forme (4.8 pour cette métrique

$$ds^2 = f(z)dx^\mu dx_\mu + \frac{dz^2}{z^2}, \tag{4.26}$$

et choisissons la parametrisation $(\xi_0 = t, \xi_1 = x)$ alors (4.24) devient

$$V(r) = \frac{g}{2\pi}\int_0^r dx\mathcal{L}\,(x)\,. \tag{4.27}$$

Ici $\mathcal{L}(z, \frac{dz}{dx}) = f(z)\left(1 + \frac{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{z^2 f(z)}\right)^{\frac{1}{2}}$ est un lagrangien, et l'integrale doit être maximisée. On definit l'Hamiltonien $\left(z' = \frac{dz}{dx}\right)$

$$\begin{aligned} H &= z'\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z'} - \mathcal{L} \\ &= -f(z)\left(1 + \frac{z'^2}{z^2 f(z)}\right)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{4.28}$$

qui doit être constant. Alors $z'\,(0) = 0$, et donc

$$f\,(z\,(0)) = f_0 = f(z)\left(1 + \frac{z'^2}{z^2 f(z)}\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{4.29}$$

de cette equation on obtient

$$\frac{dz}{dx} = z\left[\frac{f^3(z)}{f_0^2} - f(z)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.30}$$

Finalement le potentiel est donné par

$$V\,(z\,(0)) = \frac{g}{\pi}\int_0^{z(0)=z_0} dz\frac{\sqrt{f\,(z)}}{z}\left[1 - \left(\frac{f_0}{f(z)}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Cependant, cette integrale est divergeante et doit être régularisée [33], pour cela on doit changer la borne d'intégration de $z = 0$ à $z = \delta$

$$V(z_0) = \frac{g}{\pi\delta} + V_{reg}(z_0, \delta), \tag{4.31}$$

où $V_{reg}(z_0, \delta)$ est le potentiel régularisé, donnée en terme de $F(z) = z^2 f(z)$

$$V_{reg}(z_0, \delta) = \frac{g}{\pi} \left\{ \int_{\delta}^{z_0} \frac{dz}{z^2} \left[\sqrt{F(z)} \left[1 - \left(\frac{z^2 F_0}{z_0^2 F(z)} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} - 1 \right] - \frac{1}{z_0} \right\}. \tag{4.32}$$

Le comportement assympthotique quand $r \to \infty$ est donné par [33]

$$V_{reg}(r) \simeq g^* r, \tag{4.33}$$

qui est le potentiel linéaire radiale. L'approche AdS/QCD fournit un cadre naturel pour la forme linéaire du potentiel entre quark.

4.4 Compactification Conforme, Fontion d'onde et le Potentiel de Confinement

Le confinement implique l'exclusion des états de diffusion en favorisant les états liés seuls. La stratégie est de mettre les systèmes dans des volumes finis. Il existe une variété de géométries appropriées pour instaurer la symétrie conforme pour les hamiltoniens obtenus, l'une de ces méthodes est de mettre le système dans la sphère, S^3. Il a été montré qu'une géométrie contenant S^3, telle que la variété $S^1 \times S^3$, peut être directement obtenu de l'espace AdS_5.

L'espace-temps de Minkowski compactifié est isomorphe à la variété $S^1 \times S^3$, qui peut être paramétrée par les angles $\tau, \chi, \theta, \varphi$

$$\begin{aligned}
\eta_0 + i\eta_5 &= R.e^{i\tau}, \\
\eta_1 + i\eta_2 &= R\sin(\chi)\sin(\theta)\, e^{i\varphi} \\
\eta_4 + \boldsymbol{\eta}^2 &= R^2 \\
|\boldsymbol{\eta}| &= r = R\sin(\chi)\,.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Cet application rend possible la limite $S^1 \times S^3 \simeq \mathbb{R}^1 \times S^3$. Cette factorisation, en axe des temps $\tau \in \mathbb{R}^1$ réduit le problème à un problème des états stationaires de l'équation de Schrodinger sur S^3. En effet, la métrique prend la forme

$$ds^2 = \Omega^{-2}\left[d\tau^2 - d\chi^2 - \sin^2(\chi)\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)\, d\varphi^2\right)\right], \tag{4.35}$$

où Ω est le facteur conforme [41]. L'équation de champ scalaire de masse nulle invariante onforme est alors donnée par [41]

$$\left\{\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + K^2\right) + \mu^2\right\}\Psi = 0, \tag{4.36}$$

où μ est une constante conforme et

$$K^2 = -\frac{\partial^2}{\partial\chi^2} - 2\cot(\chi)\frac{\partial}{\partial\chi} + \frac{\mathbf{L}^2}{\sin^2(\chi)}. \tag{4.37}$$

La factorisation $S^1 \times S^3 \simeq \mathbb{R}^1 \times S^3$ conduit à une factorisation de la fontion $\Psi(\tau, \chi, \theta, \varphi)$ du champs solution de (4.36)

$$\Psi(\tau, \chi, \theta, \varphi) = e^{iER\tau}\psi(\chi, \theta, \varphi)\,, \tag{4.38}$$

ainsi on arrive à

$$\left\{\frac{K^2}{R^2} - E^2 + \mu^2\right\}\psi = 0, \tag{4.39}$$

la separation des variables (θ, φ) donne $\psi(\chi, \theta, \varphi) = U(\chi) Y_m^l(\theta, \varphi)$

$$\left\{ -\frac{1}{R^2} \frac{d^2}{d\chi^2} - 2\frac{\cot(\chi)}{R^2} \frac{d}{d\chi} + \frac{l(l+1)}{R^2 \sin^2(\chi)} - E^2 + \mu^2 \right\} U(\chi) = 0. \tag{4.40}$$

Enfin, le changement de fonction $U(\chi) = \sin(\chi)\, u(\chi)$, permet de mettre cette équation sous la forme d'une équation de Schrodinger a une dimension χ

$$\left\{ -\frac{1}{2\mu R^2} \frac{d^2}{d\chi^2} + \frac{l(l+1)}{2\mu R^2 \sin^2(\chi)} - E^2 - \frac{1}{2\mu R^2} \right\} u(\chi) = 0. \tag{4.41}$$

Les solutions de cette équation sont bien connues se sont les polynômes de Gegenbauer [42].

D'autre part, l'algèbre du potentiel ne change pas lors de l'addition de la fonction harmonique $\cot(\chi)$ au potentiel

$$V(\chi) = \frac{l(l+1)}{2\mu R^2 \sin^2(\chi)}, \tag{4.42}$$

car [44]

$$K^2 \cot(\chi) = 0. \tag{4.43}$$

D'où la nouvelle équation de champs

$$\left\{ -\frac{1}{2\mu R^2} \frac{d^2}{d\chi^2} + \frac{l(l+1)}{2\mu R^2 \sin^2(\chi)} + \cot(\chi) \right\} u(\chi) = \left(E^2 + \frac{1}{2\mu R^2} \right) u(\chi). \tag{4.44}$$

En fesant le changement de variable $\chi = \frac{\pi}{R} r$ on obtient

$$\left\{ -\frac{\pi^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{2\mu R^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{R} r\right)} + \cot\left(\frac{\pi}{R} r\right) \right\} u(r) = \left(E^2 + \frac{1}{2\mu R^2} \right) u(r), \tag{4.45}$$

aprés un devellopement en serie de taylor

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{R}r\right) &\simeq \frac{\pi}{R}r + ... \\
\cot\left(\frac{\pi}{R}r\right) &\simeq \frac{R}{\pi}\frac{1}{r} - \frac{\pi}{3R}r + ...,
\end{aligned} \tag{4.46}$$

l'équation (4.45) devient ($m = \pi^2\mu$)

$$\left\{-\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l\,(l+1)}{2mr^2} + \frac{R}{\pi}\frac{1}{r} - \frac{\pi}{3R}r\right\} u(r) = \left(E^2 + \frac{\pi^2}{2mR^2}\right) u(r). \tag{4.47}$$

Ce potentiel $\frac{R}{\pi}\frac{1}{r} - \frac{\pi}{3R}r$ a été prédit par les simulations (latice) QCD [45], et a été également confirmé de façon indépendante par la correspondance AdS/CFT. Sa partie coulombienne, du régime perturbatif, est associée à l'échange d'un gluon, tandis que la partie linéaire décrit l'interaction "flux tube" du régime non perturbatif. Cependant, afin de se rapprocher de la réalité, il faut étendre ce potentiel par des corrections qui tiennent compte des processus non-perturbatifs plus complexes.

Les états liés quark-antiquark s'expliquent par plusieurs modèles de potentiels comme le potentiel de Martin [34], le potentiel de Cornell [35] et le potentiel de Richardson [36]. Ces potentiels expriment les interactions des quarks à courte distance par une partie coulombienne, et le confinement des quarks à grande distance par le potentiel linéaire. Il semble que le potentiel linéaire joue le même rôle dans la physique des particules que le potentiel coulombien en physique atomique. Cependant, il semble qu'il ny pas de solutions en termes de fonctions usuelles de l'équation de Schrodinger avec un potentiel linéaire sphérique. A. F. Antippa et A. J. Phares, les auteurs de [39], ont présenté un formalisme général, utilisant les fonctions combinatoires, pour résoudre les relations de réccurence à multitermes avec des coefficients non constants, qui ressortes du développement en series entières. Ce formalisme a ensuite été appliquée pour résoudre l'équation de Schrodinger avec un potentiel linéaire. Plus récemment, les auteurs [38] ont réalisé de nouveaux progrès dans le domaine en fournissant les fonctions d'ondes pour le potentiel linéaire combiné avec le potentiel coulombien en utilisant cette technique combinatoire. La fonction d'onde est obtenue sous forme d' un développement en série de puissance, où les coefficients sont donnés en termes de fonctionnelles, appelées fonctions de structure. Les énergies, valeurs propres, ont été donnés par les racines d'un polynôme d'ordre infini . A part ces travaux, la plupart des contributions récentes à ce sujet ne font qu'utiliser des méthodes perturbatives pour des raisons merique [37].

Nous avons reconsidérer ce problème, [40], et avons obtenu une expression analytique pour la fonction d'onde, dans un potentiel linéaire, en termes de série de fonctions de Meijer

$$u_{n,l}(r) = N_l \sum_{m=0}^{\infty} (-2)^m \, \varepsilon_{n,l}^{-\frac{3}{2}m} \sum_{\{I_{m-1}\}} (-1)^{I_{m-1}} \, G_{2m,2m+2}^{1,2m} \left[\varepsilon_{n,l} \frac{r^2}{4} \middle| \begin{array}{c} a_1, ..., a_{2m} \\ b_1, ..., b_{2m+2} \end{array} \right], \quad (4.48)$$

avec

$$\begin{aligned} a_k &= I_{k-1} + \frac{l}{2} + \frac{3}{2}m, \quad a_{k+m} = I_{k-1} - \frac{l+1}{2} + \frac{3}{2}m, \quad 1 \leq k \leq m \\ b_{k+1} &= I_{m-k-1} + \frac{3}{2}(m-k) + \frac{l+1}{2}, \quad b_{k+m+2} = I_{k-1} + \frac{3}{2}k - \frac{l}{2}, \quad 0 \leq k \leq m. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Nous, avons obtenu cette solution par une méthode itérative comme une approche alternative aux techniques des fonctions combinatoires. Nous avons constaté que les énergies sont des solutions d'équation transcendantes impliquant des fonctions de Meijer.

Pour conclure ce dernier chapitre, nous allons tester nos fonctions d'onde (4.48) dans le calcul du facteur de forme électrique du méson. La structure interne du meson est un système quark-antiquark. Dans l'espace plat tridimensionnel, le facteur de forme électrique est défini [46] par l'élément de matrice du courant $j_0(\chi)$

$$G(\mathbf{q}) = \langle \mathbf{p} - \mathbf{q} | \, j_0(\mathbf{r}) \, | \mathbf{p} \rangle \,, \quad (4.50)$$

le courant $j_0(\chi)$ est associé à l'état fondamental du système méson [40]

$$j_0(\chi) = |u_{1,0}(\chi)|^2 = \alpha \mathbf{Ai}(\chi - \varepsilon_{1,0}),$$

où $\mathbf{Ai}(.)$ est la fonction d'Airy et α une constante de normalisation. Les états d'onde planes $|\mathbf{p}\rangle$, se propageant le long de l'axe z, qui figurent dans (4.50) sont

$$|\mathbf{p}\rangle \sim e^{i|\mathbf{p}|R\sin(\chi)\sin(\theta)}$$

Alors, la valeur moyenne du caré du rayon de charge est

$$\left\langle \mathbf{r}^2 \right\rangle = -6 \left. \frac{\partial G\left(|\mathbf{q}|\right)}{\partial \left|\mathbf{q}\right|^2} \right|_{|\mathbf{q}|^2=0} . \tag{4.51}$$

On doit calculer la transformée de Fourier (4.50)

$$G\left(\mathbf{q}\right) = \int_0^{\pi} d\chi \frac{\mathbf{Ai}^2(\chi - \varepsilon_{1,0})}{R\left|\mathbf{q}\right|\sin\left(\chi\right)} \sin\left[R\left|\mathbf{q}\right|\chi\sin\left(\chi\right)\right], \tag{4.52}$$

afin de trouver $\langle \mathbf{r}^2 \rangle$.

4.5 Conclusion

Tout observable mesurable est une mesure positive à valeurs opératorielle POV-mesure. Les observables représentées comme des opérateurs autoadjoints avec des mesures spectrales ne sont qu'un cas particulier de la définition en terme de POV-mesures.

En mécanique quantique non relativiste, le temps joue le rôle d'un paramètre extérieur. Mais, il peut aussi être considéré comme une observable mesurable, comme exemple ; les instants d'apparition des différents événements sont des quantités observables qui doivent être formalisées. Mais il y a un obstacle de principe en raison du théorème de Pauli qui stipule qu'il n'existe pas d'opérateur de temps autoadjoint. Cependant, on peut éviter cette obstruction par le concept de POV-mesure, qui relax la condition d'autoadjoint. Seule la condition de covariance de la POV-mesure par rapport aux translations spatio-temporelles est nécessaire.

Nous avons reformuler le problème en termes de POV-mesure sur l'axe du temps compactifié, covariant par rapport au groupe conforme. Les transformations, affectant le temps, forment un groupe $SL(2,\mathbb{R})$.

Le théorème de Malament est une version généralisée du théorème de Pauli, il interdit la définition de l'opérateur position sur l'espace temps comme un opérateur autoadjoint. Cependant, le théorème laisse ouverte la possibilité de construire des observables généralisées en utilisant le formalisme des POV-mesures pour décrire la position d'une particule en mécanique quantique. C'est ce qui a été fait aux chapitre 3.

Le groupe conforme s'avert être le groupe le plus large possible. Il ya de fortes chances, du point de vue mathématique et pour des raisons physiques, que le groupe conforme soit le groupe de la symétrie fondamentale de l'espace- temps. Cependant l'action du groupe conforme sur l'espace de Minkowski M est singulière, mais elle s'étend naturellement à une action non singulière sur l'espace-temps compacifié de Minkowski M^c. Dans cette compactification on ajoute un cône de lumière à l'infini à l'espace de Minkowski, l'espace ainsi obtenu est un espace homogène du groupe conforme $SO\,(4,2)$, [22].

Nous avons construi un opérateur de position sur l'espace de Minkowski compacifié. Nous avons utiliser, pour cela, la la théorie des représentations induites, d'une façon originale.

Enfin, dans le dernier chapitre, et dans le même context, nous avons explorer la correspondance AdS/QCD pour traiter le système de deux quarks. En effet, nous avons évalué le potentiel entre quark en utilisant les idées maintenant standards de la dualité AdS/QCD. La conclusion générale est que uniquement avec la métrique, on peut decrire d'une manière satisfaisante le potentiel confinant.

Il semble que le potentiel linéaire joue le même rôle dans la physique des particules que le potentiel coulombien en physique atomique. Cependant, il semble qu'il ny pas de solutions en termes de fonctions usuelles de l'équation de Schrodinger avec un potentiel linéaire sphérique. Il ya bien longtemps A. F. Antippa et A. J. Phares, les auteurs de [39], ont présenté un formalisme général, utilisant les fonctions combinatoires, pour résoudre les relations de réccurence à multitermes avec des coefficients non constants, qui ressortes du développement en series entières. Ce formalisme a ensuite été appliquée pour résoudre l'équation de Schrodinger avec un potentiel linéaire. Plus récemment, les auteurs [38] ont réalisé de nouveaux progrès dans le domaine en fournissant les fonctions d'ondes pour le potentiel linéaire combiné avec le potentiel coulombien en utilisant cette technique combinatoire. La fonction d'onde est obtenue sous forme d' un développement en série de puissance, où les coefficients sont donnés en termes de fonctionnelles, appelées fonctions de structure. Les énergies, valeurs propres, ont été donnés par les racines d'un polynôme d'ordre infini. A part ces travaux, la plupart des contributions récentes à ce sujet ne font qu'utiliser des méthodes perturbatives pour des raisons merique [37].

Nous avons reconsidérer ce problème, [40], et avons obtenu une expression analytique pour la fonction d'onde, dans un potentiel linéaire, en termes de série de fonctions de Meijer

Bibliographie

[1] E. Cartan, Sur les variétés a connexion affine et la théorie de la relativité generalisée, Ann. Ecole Norm Sup. **40** 326 (1922).

[2] K. Friedrichs, Math. Ann. **98** 566 (1927)

[3] A. Trautman, "Sur la théorie Newtonienne de la gravitation", Comp. R. Acad. Sci. Paris 257-617 (1963)

[4] M. Henkel and J. Unterberger., Nucl. Phys. B 660 (2003) 407. [arXiv :hep-th/0302187].

[5] Gleason, A. M., J. Math. Mech, **6**, 885-893. (1957).

[6] Busch, P., Lahti, P. J., & Mittelstaedt, P. "The quantum theory of measurement" (pp. 25-90). Springer Berlin Heidelberg. (1996).

[7] Busch P., Lahti P. J., Phys. Lett. A115, 259 (1986)

[8] Davies E. B., Lewis J. T., Comm. Math. Phys. **17**, 239, (1970)

[9] G. Cassinelli, E. De Vito, A. Toigo ; J. Math. Phys. **44**, 4768-4775 (2003).

[10] Bush, P., Grabowski, M. and Lahti, P. J., Phys. Lett. A 191, 357-361 (1994). ; Aharonov, Y. and Bohm, D., Phys. Rev. 122, 1649-1658 (1961). ; Allcock, G. R., Ann. Phys. (N. Y.) 53, 253-285 (1969). ; Armstrong, H. L., Am. J. Phys. 25, 195-199 (1957).

[11] A.S. Holevo, "Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory". North Holland Publishing Corporation, Amsterdam, 1982.

[12] M. Razavy, Am. J. Phys. **35**, 955, (1967) ; D. M. Rosenbaum, J. Math. Phys. **10**, 1127 (1969).

[13] A. O. Barut Helv., Phys. Acta **46**, 496. (1973)

[14] U. Cattaneo : "On Mackey's Inprimitivity Theorem". Comment. Math. Helvetici 54 629, (1979).

[15] V. Bargmann. ; Ann. Math. **48,** 568 (1947).

[16] Malament, David , "In defense of dogma : Why there cannot be a relativistic quantum mechanics of (localizable) particles", in Rob Clifton (ed.), Perspectives on Quantum Reality. Dordrecht : Kluwer, 1–10. (1996)

[17] M. Toller, Phys. Rev. A **59**, 960 (1999) ; D. P. L. Castrigiano and R. W. Henrichs., Lett. Math. Phys. **4,** 169 (1980) . ; E. B. Davies., J. Funct. Anal. 6 (1970) 318. ; M. Toller, Phys Rev D **70** Issue : 2 (2004)

[18] M. B. Mensky, Commun. Math. Phys. **47**, 97, (1976) ; M. B. Mensky, Method of induced representations : Space-Time and the concept of Particles (Nauka, Moscow, 1976) (in russian)

[19] Mackey, G. W., "Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics", Benjamin, New York (1968). ; Mackey,G.W. : The theory of group representations. University of Chicago notes 1955. ; Coleman,A.J. : Induced and subduced representations. In : Group theory and its applications, p. 57. New York-London : Academic Press 1968

[20] Neumann. H., Helvetica Physica Acta, **45**, 811-819 (1972).

[21] Stueckelberg, E. C. G., Helv. Phys. Acta **14**, 322 (1941) ; **15**, 23 (1942)

[22] T. H. Go, H. A. Kastrup and D. H. Mayer, Rep. Math. Phys. **6**, 395 (1974). ; P. Carruthers, Phys. Reports, t. **1C**, 1 (1971). ; T. Fulton, F. Rohrlich and L. Witten, Revs. Modern Phys. t. **34**, 442 (1962).

[23] H. S. Snyder, Phys. Rev. **71**, 38 (1947).

[24] C. N. Yang, Phys. Rev. **72**, 874 (1947)

[25] I. E. Segal, Duke Math. J. **18**, 221 (1951)

[26] H. Bateman. , Proc. London. Math. Soc., **7**, 70–98, (1909) ; E., Proc. London. Math. Soc., **8**, 77–98, (1910) ; H. Bateman, Proc. London. Math. Soc., **8**, 223–264, (1910)

[27] M. T. Jaekel and S. Reynaud, Phys. Lett. A 220, 10 (1996). ; M. T. Jaekel and R. Reynaud, Found. Phys. **28**, 439 (1998).

[28] Maldacena J, Phys. Rev. Lett. **80**, 4859. (1998).

[29] Edward Witten, "Anti de Sitter Space and Holography", February 1998, arXiv-hep-th/9802150

[30] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane, and T. M. Yan, Phys. Rev. D21 203. (1980).

[31] O. Andreev and V. I. Zakharov., Phys. Rev. D74, 025023 (2006) , hep-ph/0604204.

[32] J. M. Maldacena,. Phys. Rev. Lett. **80,** 4859–4862 (1998), hep-th/9803002.

[33] O. Andreev and V. I. Zakharov,. Phys. Rev. D74, 02502, (2006), hep-ph/0604204.

[34] A. Martin : Phys. Lett. B 93, 338 (1980).

[35] E. Eicheten et al : Phys. Rev. D 17, 3090 (1978).

[36] H. D. Richardson : Phys. Lett. B 82, 272 (1979).

[37] D. K. Choudhury, P. Das, D. D. Goswami and J. N. Sarma : Pramana J. Phys. 44, 519 (1995)

[38] A. F. Antippa and G. Plante : J. Math. Phys. **46**, 062108 (2005).

[39] A. F. Antippa and A. J. Phares : J. Math. Phys. **18**, 173 (1977).

[40] Benbitour, M. A., Meftah, M. T., Rep. Math. Phys., **72**, 1, p. 93-101. (2013)

[41] G. W. Gibbons, A. R., Phys. Lett. B 346, 255-261 (1995).

[42] Y. S. Kim, M. E. Noz, "Theory and application of the Poincaré group". D. Reidel, Dordrecht, (1986).

[43] Y. Alhassid, F. Gursey, F. Yachello. Phys. Rev. Lett. **50** (1983)

[44] Kirchbach, M. "Conformal symmetry algebra of the quark potential and degeneracies in the hadron spectra". In American Institute of Physics Conference Series (Vol. 1488, pp. 236-247).(2012, October).

[45] T. T. Takahashi, H. Suganuma, Y. Nemoto, H. Matsufuru., Phys. Rev. D **65**, 114509-1–19 (2002).

[46] J. Arrington, C. D. Roberts, J. M. Zanotti., J. Phys. G :Nucl.Part. 34, S23-S52 (2007).