



**UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA**

N° d'ordre :
N° de série :

**Faculté des Sciences et de la Technologie
Et des Sciences de la Matière**

**DEPARTEMENT DE
MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE**

MAGISTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Equations différentielles et systèmes dynamiques

Par : KOUADRI Ghada

Thème

Résolution d'un problème d'élasticité en dimension trois affecté d'un poids dans un domaine présentant des points anguleux par une méthode de décomposition.

Soutenu publiquement le : 15/07/2010

Devant le jury composé de :

MEFTAH Med Tayeb	Prof	Université KASDI MERBAH - Ouargla	Président
CHACHA Djamel Ahmed	M.C(A)	Université KASDI MERBAH - Ouargla	Examineur
GUERFI Amara	M.C(A)	Université KASDI MERBAH - Ouargla	Examineur
SAID Med Said	M.C(A)	Université KASDI MERBAH - Ouargla	Rapporteur

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier mon encadreur : Dr . SAID Mohamed Saïd maître de conférence à l'université Kasdi Merbah Ouargla de m'avoir attribué ce sujet de recherche, d'avoir accepté de m'encadrer et de m'orienter durant la réalisation de ce travail.

Je tiens aussi à remercier le président et les membres de jury d'avoir accepté de juger et de valoriser ce modeste mémoire.

Mes remerciements sont également adressés:

Au Département des mathématiques et informatique à l'université Kasdi Merbah Ouargla , et sans oublier mes collègues :

SELLAMI Mohamed Hassan chargé de cours à l'université Kasdi Merbah Ouargla pour son aide durant la saisie de ce manuscrit et ses orientations.

MERABET El Amine enseignant des mathématiques au lycée

Med Laid Al Khalifa Ouargla pour son aide.

MERABET Ismail maître assistant à l'université Kasdi Merbah Ouargla

GUERBOUSSA Yassine magistère en Mathématiques Université de Constantine.

BOCHAALA Ali , Mezzar Tijani, Ben Haoued Ahmed, Daif

BEN SERIDI Abdelhamid (MC/Université/ Ferhat Abbas / Setif),

Pour leur aide, et tous les membres de la famille Kouadri et tous mes collègues de la promo de Magister Mathématiques 2007/2008

Option : Equations différentielles et Systèmes Dynamiques).

Table des Matières

CHAPITRE 0 :

0-1- Introduction.....	7
0-2 Notations	6
0-3- Rappels.....	9
0-3-1- Rappels sur l'élasticité linéaire.....	9
0-3-2- Transformation de Mellin et ses propriétés	11
0-3-3- Fonction de Green et résolution de problèmes aux limites pour les équations différentielles ordinaires.....	12

CHAPITRE 1 : Transformation d'un problème gouverné par un système de Lamé dans le cas tridimensionnel en deux problèmes bidimensionnels

1-1 Les coordonnées curvilignes orthogonales et applications à l'analyse vectorielle.....	15
1-2 - Exemples de changement de variables et application à certains opérateurs.....	17
1-3- Equations de Lamé.....	18
1-3-1- Construction des équations de Lamé.....	18
1-3-2- Quelques cas particuliers importants.....	20
1-3-3- Les équations de Lamé en coordonnées curvilignes (Cas général)	20
1- Décomposition du problème de Lamé.....	21
1-4-1- Décomposition du problème dans les cas où l'arête est non rectiligne.....	21
1-4-2- La décomposition dans le cas où l'arête est rectiligne.....	24

CHAPITRE 2 : Existence et unicité de la solution du problème de Lamé bidimensionnel.

2-1 Rappels.....27

 2-1-1 Espaces de Sobolev.....27

 2-2 - Fonctions poids et espaces avec poids.....29

 2-2-1- Exemples de singularités.....29

 2-2-2- Les espaces fonctionnels avec poids.....32

 2-2-3- Propriétés de E.....33

2-3- Le système de Lamé bidimensionnel (déformation plane)

 2-3-1- Equivalence des équations.....34

2-4- Etude de l'existence et de l'unicité de la solution de système de Lamé bidimensionnel.....34

 2-4-1- Etude de l'existence de la solution du problème de Lamé dans l'espace $(E_0(\Omega_\varphi))^2$ avec la condition de Dirichlet homogène.....36

 2-4-2- Etude de l'existence de la solution du problème de Lamé avec la condition de Neumann homogène40

 2-4-3- Etude de l'unicité de la solution du problème de Lamé avec la condition de Dirichlet homogène.....40

 2-4-4 Etude de l'unicité du problème de lamé avec la condition de Neumann homogène.....42

CHAPITRE 3 : Etude de l'existence et de l'unicité de la solution du problème antiplan et extension dans le polygone tout entier.

3.1. Etude de l'existence de la solution du problème antiplan.....43

 3-1-1- Equivalence d'un problème antiplan.....43

 3-1-2- Affectation d'une fonction poids et étude sur un espace avec poids.....44

3.1.3 Etude de l'existence de la solution du problème antiplan avec la condition de Dirichlet homogène	44
3.1.4. Etude de l'existence de la solution du problème antiplan avec la condition de Neumann homogène.....	47
3.2. Etude de l'unicité de la solution du problème antiplan.....	49
3.2.1. Etude de l'unicité de la solution du problème avec la condition de Dirichlet homogène.....	50
3.2.2. Etude de l'unicité de la solution du problème antiplan avec la condition de Neumann homogène.	50
3.3 Extension de la solution du problème plan et antiplan au polygone tout entier.....	51
3.3.1 Etude de l'existence du problème antiplan sur le polygone...	51
3.3.2 Etude de l'unicité de la solution du problème antiplan sur le polygone	54
3.3.3 Etude de l'existence et l'unicité de la solution du problème de Lamé bidimensionnel au polygone tout entier.....	56
CONCLUSION	57
Bibliographie	58

CHAPITRE 0

0.1 Notations

Dans toute la suite de ce mémoire, nous utilisons les notations suivantes :

1. L : désigne l'opérateur de Lamé bidimensionnel et L_3 est un opérateur de Lamé tridimensionnel .
2. U : désigne le vecteur déplacement .
3. Ω : désigne un corps élastique, homogène et isotrope occupant un domaine borné de \mathbb{R}^2 de frontière polygonale $\Gamma = \bigcup_{j=1}^n \overline{S_{j-1}, S_j}$, $j=1, n$ le coté $]S_{j-1}, S_j[$ est noté Γ_{j-1} ou les S_j sont les sommets de Ω .
4. Ω_φ : désigne un secteur plan infini, d'ouverture φ de frontière Γ_φ
5. $\lambda(r)$: désigne une fonction poids
6. B : est un opérateur différentiel d'ordre 0 ou 1 défini sur la frontière Γ_φ
7. \tilde{f} : désigne la transformation de Mellin de la fonction f
8. η : désigne le vecteur normale à la frontière et dirigé vers l'extérieur de celle-ci.
9. M : est la compressibilité.

0.2. INTRODUCTION.

Le monde de la modélisation mathématique a pris une importance considérable cette dernière décennie dans tous les domaines de la science et des applications industrielles.

La modélisation mathématique est l'art de représenter une réalité physique en des modèles abstraits accessibles à l'analyse et au calcul numérique.

Le modèle que nous allons décrire dans ce mémoire est connu sous le nom système de Lamé $L_3U = \mu\Delta U + (\lambda + \mu)\nabla(\operatorname{div}U)$ en dimension trois.

On étudiera ce système dans l'espace usuel de dimension trois dans un domaine élastique homogène et isotrope à frontière présentant des points anguleux.

Le calcul direct et l'étude fonctionnelle sont très compliqués pour ce-ci on utilisera une méthode dite de décomposition qui nous amènera à la décomposition du problème initial en deux problèmes bi dimensionnels dans un plan normal à l'arête.

L'un est dite déformation plane et l'autre cisaillement qu'on appelle souvent déformation antiplane.

D'après cette décomposition on aboutira aux problèmes suivants :

$$\begin{aligned} (S_1) & \left\{ \begin{array}{l} LU = f \quad \text{dans} \quad \Omega_\varphi \\ BU = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_\varphi \end{array} \right. \\ (S_2) & \left\{ \begin{array}{l} \Delta U = f \quad \text{dans} \quad \Omega_\varphi \\ BU = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_\varphi \end{array} \right. \end{aligned}$$

où L étant l'opérateur de Lamé bi dimensionnel et B est un opérateur d'ordre zéro ou un et Ω_φ est un secteur plan d'ouverture φ centré à l'origine O qui est un point anguleux.

La présence des points anguleux sur les sommets les deux opérateurs L et Δ ne sont pas bornés à l'origine et pour masquer ces singularités on utilise une méthode dite affectation d'une fonction poids notée $\lambda(r)$ indéfiniment différentiable sur Ω_φ et ne s'annule pas sur Ω_φ .

Après cette affectation on choisit un espace fonctionnel convenable dit espace poids noté E est défini par :

$$E = \left\{ u \in H^1(\Omega_\varphi) : rD^2u \in L^2(\Omega_\varphi) \right\}$$

Où u est à support compact dans $\overline{\Omega_\varphi}$ et D^2 désigne les dérivées partielles d'ordre deux par rapport aux variables r et η .

On débute notre travail par un chapitre qui comporte trois parties :

La première partie est un rappel sur les coordonnées curvilignes et leurs applications

La deuxième partie est un rappel sur l'élasticité linéarisée.

La troisième partie c'est la décomposition du problème de Lamé tridimensionnel.

Dans le deuxième chapitre on étudiera la question d'existence et d'unicité du système :

$$(S'_1) \begin{cases} rLU = g & \text{dans } \Omega_\varphi \\ BU = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases}$$

avec les deux conditions aux limites condition de Dirichlet homogène et condition de Neumann homogène.

Dans le troisième chapitre on étudiera la question d'existence et d'unicité du système :

$$(S'_2) \begin{cases} r\Delta u = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ Bu = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases}$$

Pour les mêmes conditions aux limites et puis on généralise l'étude précédente au polygone tout entier en utilisant une partition de l'unité.

0.3. Rappels.

0.3.1. Rappels sur l'élasticité linéaire.

Définition 0.1. On appelle déplacement, le vecteur dont l'origine coïncide avec la position initiale du point et l'extrémité avec la position du point après déformation et nous désignerons les projections par u, v et w c'est-à-dire :

$$\vec{U} = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)).$$

Définition 0.2. Soit Ω un ouvert borné connexe régulier de \mathbb{R}^3 . On considère que les points x de $\bar{\Omega}$ représentent les points matériels d'un corps matériel (au repos). On dit que Ω est une configuration de référence du corps en question. Lorsque l'on travaillera sur Ω , on dira que l'on adopte la description lagrangienne sous l'action des forces qui s'exercent sur le corps matériel, celui-ci va se déformer dans l'espace.

Le point matériel initialement situé en x vient occuper une position $y = \varphi(x)$. L'application $\varphi: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ s'appelle une déformation du corps.

L'ensemble $\varphi(\Omega)$ s'appelle la configuration déformée correspondante.

Lorsque l'on travaillera sur $\varphi(\Omega)$ en termes de la variable y on dira que l'on adopte la description eulérienne. Du point de vue mathématique, le passage de l'une à l'autre description n'est qu'un changement de variable.

Il est parfois commode d'introduire le déplacement $u(x) = \varphi(x) - x$ de telle sorte que $\varphi = Id + u$, il est totalement clair d'écrire les équations en

déformation ou en déplacement, mais les déformations ont un caractère plus intrinsèque que les déplacements en mécanique des solides.

Proposition 0.3.1. :(loi de Hooke)

Dans le cas de l'élasticité linéaire isotrope le tenseur des déformations est relié au tenseur des contraintes et l'expression la plus courante est donnée par la relation de Hooke suivante:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \cdot \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \cdot \delta_{ij} \quad (0.1)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \cdot \varepsilon_{ij} - \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \varepsilon_{kk} \cdot \delta_{ij} \quad (0.2)$$

δ_{ij} Symbole de Kronecker

E: Module d'Young

$\sigma = (\sigma_{ij})$: Le tenseur des contraintes

$\varepsilon = (\varepsilon_{ij})$: Le tenseur des déformations

Compléments 0.3.1. :

E et ν sont deux paramètres de l'élasticité, mais on peut les substituer par le module volumique K et le module de cisaillement G parfois noté μ par les relations suivantes :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (0.3)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (0.4)$$

Remarque 0.1. Dans le cas de l'élasticité linéaire, les paramètres E, ν, μ et K sont des constantes.

1-Le Paramètre $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ est le module de cisaillement du matériau, le bon sens physique entraîne que $\mu > 0$ ceci entraîne par un calcul simple que $0 \leq \mu \leq \frac{1}{2}$

2- La loi de Hooke s'écrit par une forme équivalente à (0.2) par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (0.5)$$

Qui s'écrit encore vectoriellement sous la forme :

$$\varepsilon(U) = \frac{1}{2} \left[(\nabla \cdot \vec{U}) + (\nabla \cdot \vec{U})^t \right] \quad (0.6)$$

4. la divergence du déplacement $\vec{U}(u, v, w)$ s'écrit :

$$\text{div } \vec{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (0.7)$$

Cette quantité sera dite compressibilité et est notée par M , et on remarque que :

$$KM = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) M = \frac{E}{1-2\nu} M \quad (0.8)$$

0.3.2. La Transformation de Mellin et ses propriétés.

La transformation de Mellin est très adaptée aux domaines qui présentent des angles et utilisable dans le changement curviligne particulier comme par exemple les coordonnées polaires et cette transformation de Mellin allège les calculs et joue le même rôle que celui joué par la transformation de Fourier dans le cas classique où on utilise les coordonnées cartésiennes

Définition 0.3. Soit f est une fonction définie sur \mathbb{R}^+ , on appelle transformée de Mellin de f , la fonction \tilde{f} de la variable complexe σ définie par : $\tilde{f}(\sigma) = \int_0^{+\infty} f(x) \cdot x^\sigma \frac{dx}{x}$ lorsque cette intégrale converge .

0.3.2. Quelques propriétés :

$$\frac{df}{dx}(\sigma) = -(\sigma - 1)\tilde{f}(\sigma - 1)$$

Et en général si $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{\tilde{d}^n f}{dx}(\sigma) = (-1)^n (\sigma - 1)(\sigma - 2)\dots(\sigma - n)\tilde{f}(\sigma - n)$$

Et si $\alpha \in \mathbb{N}$, avec $\alpha = n + \beta$, et $0 < \beta < 1$, on vérifie que :

$$D^\alpha = D^{n+\beta} = D^n(D^\beta) = D^\beta(D^n).$$

On a en utilisant la transformation de Fourier:

$$\widehat{D}^\beta u = (i\xi)^\beta \widehat{u}$$

Par analogie avec la transformation de Mellin, on vérifie que:

$$\frac{\tilde{d}^\beta f}{dx^\beta}(\sigma) = \Gamma(\sigma)\Gamma(\sigma - \beta)\tilde{f}(\sigma - \beta)$$

Et pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$, avec $\alpha = n + \beta$, on vérifie que :

$$\frac{\tilde{d}^\alpha f}{dx^\alpha}(\sigma) = \Gamma(\sigma)\Gamma(\sigma - \alpha)\tilde{f}(\sigma - \alpha)$$

On vérifie aussi que $x \frac{d\tilde{f}}{dx} = -\sigma\tilde{f}(\sigma)$

Et si $\tilde{f}(\sigma)$ est définie pour $\alpha_1 < \text{Re } \sigma < \alpha_2$, alors on a :

$$f(x) = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{\mu-i\nu}^{\mu+i\nu} f(\sigma)x^{-\sigma} d\sigma$$

Nous noterons par $f * g$, la convolution multiplicative de f et g par rapport à la mesure $\frac{dt}{t}$ elle est définie par:

$$h(x) = [f * g](x) = \int_0^\infty f(t)g\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t}$$

On a alors : $\tilde{h}(\sigma) = \tilde{f}(\sigma)\tilde{g}(\sigma)$

Pour plus de détails sur la transformation de Mellin et ses propriétés, voir par exemple [18].

0.3.3. Fonction de Green et résolution de problèmes aux limites pour les équations différentielles ordinaires.

Soit l'équation différentielle d'ordre n donnée par :

$$E[(y)] = p_0(x)(y)^{(n)} + p_1(x)(y)^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0 \quad (0.9)$$

Où les fonctions $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ sont continues sur $[a, b]$

Avec $p_0(x) \neq 0$ sur $[a, b]$, et les conditions aux limites :

$$V_k(y) \equiv \alpha_k y(a) + \alpha_k^{(1)} y'(a) + \dots + \alpha_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(a) + \beta_k y(b) + \beta_k^{(1)} y'(b) + \dots + \beta_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(b) = 0 \quad (0.10)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, n$$

Les formes linéaires $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ en $y(a), y'(a), \dots, y^{(n-1)}(a), y(b), \dots, y^{(n-1)}(b)$ étant linéaires indépendantes.

Supposons que le problème aux limites homogènes (0.9)- (0.10), admet la seule solution triviale $y(x) \equiv 0$.

On a donc la définition suivante :

Définition 0.4. On appelle fonction de Green (ou fonction d'influence) du problème aux limites (0.9)- (0.10), la fonction $G(x, \xi)$ construite pour tout point ξ , $a < \xi < b$, et jouissant des 4 propriétés suivantes :

1) $G(x, \xi)$ est continue et possède des dérivées continues par rapport à x jusqu'à l'ordre $n - 2$ inclus pour $a \leq x \leq b$.

2) Sa dérivée d'ordre $n - 1$ par rapport à x présente au point $\xi = x$ une discontinuité de première espèce, le saut ayant la valeur $\frac{1}{p_0(\xi)}$ c'est-à-dire :

$$\frac{\partial^{(n-1)} G(x, \xi)}{\partial x^{(n-1)}} \Big|_{x=\xi+0} - \frac{\partial^{(n-1)} G(x, \xi)}{\partial x^{(n-1)}} \Big|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p_0(\xi)} \quad (0.11)$$

3) Dans chacun des intervalles $[a; \xi]$ et $(\xi; b]$ la fonction $G(x, \xi)$ considéré comme une fonction de x est solution de l'équation (0.9) : $E[G]=0$.

4) $G(x, \xi)$ vérifie les conditions aux limites (0.10) :

$$V_k(G)=0 \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (0.12)$$

Théorème 0.3.1. Si le problème (0.9)-(0.10) n'a pas de solution autre que la solution triviale $y(x) \equiv 0$, l'opérateur E a une fonction de Green $G(x, \xi)$ et une seule.

Preuve : Voir [5].

Soit l'équation différentielle : $E[y]=f(x)$ (0.13)

Avec les condition aux limites :

$$V_k(y)=0; \dots k=1; n \quad (0.14)$$

Théorème 0.3.2. Si $G(x, \xi)$ est la fonction de Green du problème aux limites homogène (0.13), (0.14), alors la solution du problème aux limites (0.9)' -(0.10) est donnée par la formule :

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (0.15)$$

Preuve : Voir [5].

CHAPITRE 1

Transformation d'un problème gouverné par un système de Lamé dans le cas tridimensionnel en deux problèmes bidimensionnels.

1.1. Les coordonnées curvilignes orthogonales et applications à l'analyse vectorielle.

Définition 1.1. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n , Φ un difféomorphisme de U sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n .

On appelle coordonnées curvilignes d'un point x de Ω , les n -uples

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, tel que $\Phi(u) = x$

On appelle repère associé à ces coordonnées curvilignes,

la base de \mathbb{R}^n constituée par les n vecteurs suivants :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_n}$$

Remarque 1.1. Si la base précédente est une base orthogonale (par rapport au produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n), on dit que le système de coordonnées curvilignes est un système orthogonal.

Proposition 1.1.1. On reprend les notations précédentes avec $n = 3$.

On suppose en outre que le système de coordonnées est orthogonale.

On note par (u, v, w) les coordonnées curvilignes d'un point (x, y, z) , on pose

$l_1 = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\|, l_2 = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|, l_3 = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial w} \right\|$, où $\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne, et on

définit la base ortho normale

$$e_u = \frac{1}{l_1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u}, e_v = \frac{1}{l_2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v}, e_w = \frac{1}{l_3} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial w} \quad (1.1)$$

Dans ces conditions

1) Si f est une fonction définie dans Ω à valeur réelle, le gradient de f est donné par :

$$\nabla f = \frac{1}{l_1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} e_u + \frac{1}{l_2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v} e_v + \frac{1}{l_3} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial w} e_w \quad (1.2)$$

2) Si A est un champ de vecteur donné par :

$$A = A_u e_u + A_v e_v + A_w e_w$$

Alors la divergence de A est donnée par :

$$\operatorname{div} A = \frac{1}{l_1 l_2 l_3} \left[\frac{\partial}{\partial u} (l_2 l_3 A_u) + \frac{\partial}{\partial v} (l_1 l_3 A_v) + \frac{\partial}{\partial w} (l_1 l_2 A_w) \right] \quad (1.3)$$

3) Si f est une fonction définie dans Ω à valeur réelles, le laplacien de f est donné par :

$$\Delta f = \frac{1}{l_1 l_2 l_3} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{l_2 l_3}{l_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{l_1 l_3}{l_2} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{l_1 l_2}{l_3} \cdot \frac{\partial f}{\partial w} \right) \right] \quad (1.4)$$

Preuve :

1) Puisque la base (e_u, e_v, e_w) est orthonormée, les composantes du gradient sont données par :

$$(\nabla f)_u = (\nabla f | e_u), (\nabla f)_v = (\nabla f | e_v), (\nabla f)_w = (\nabla f | e_w)$$

Par définition des vecteurs de base, cela donne :

$$(\nabla f)_u = \frac{1}{\ell_1} \left(\nabla f \middle| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right), (\nabla f)_v = \frac{1}{\ell_2} \left(\nabla f \middle| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right), (\nabla f)_w = \frac{1}{\ell_3} \left(\nabla f \middle| \frac{\partial \Phi}{\partial w} \right)$$

Or par définition du gradient, on a :

$$\left(\nabla f \middle| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) = f'(\cdot) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) = \frac{\partial f^*}{\partial u}$$

$$\left(\nabla f \middle| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) = f'(\cdot) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) = \frac{\partial f^*}{\partial v}$$

$$\left(\nabla f \middle| \frac{\partial \Phi}{\partial w} \right) = f'(\cdot) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial w} \right) = \frac{\partial f^*}{\partial w}$$

Où $f' = f \circ \phi$ la formule (1.2) en résulte aussitôt avec l'abus de notation classique où f^* est remplacée par f .

2) Par utilisation de la formule de Stokes.

3) Le Laplacien de f n'est autre que la divergence du gradient de f

La proposition est ainsi démontrée.

1.2. Exemples de changement de variables et application à certains opérateurs

1.2.1. Coordonnées cylindriques et applications

Le Laplacien vectoriel et la divergence en coordonnées cylindriques

Notons par T l'application différentiable définie par :

$$T :]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\times]-\infty, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^3$$

Qui à tout triplet (ρ, θ, z) associe (x, y, z) tels que :

$$x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta, z = z. \quad (1.5)$$

Soit V un champ vectoriel de classe C^2 sur un ouvert de \mathbb{R}^3 , on note $\overline{\Delta V}$ le Laplacien vectoriel et d'après la théorie des champs on a

$$\overline{\Delta V} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{v})) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})) = \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial z^2} \quad (1.6)$$

On désigne par $\vec{V} = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$

Le champ \vec{V} et u, v, w désignent les composantes de \vec{V} qui sont des fonctions scalaires de classe C^2 de \mathbb{R}^3 et considérons le changement cylindrique (1.5) et on désigne par u_ρ, u_θ, u_z les composantes de \vec{V} dans le repère (ρ, θ, z) on a alors d'après (1.3)

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \quad (1.7)$$

Et d'après (1.7) et (1.4) les composantes de \vec{V} dans le repère (ρ, θ, z) sont :

$$\begin{aligned} \Delta u_\rho &= \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial z^2} \\ \Delta u_\theta &= \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \\ \Delta u_z &= \frac{\partial^2 u_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (1.8)$$

1.2.2. Le Laplacien en coordonnées polaires :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 alors le Laplacien Δf est défini par :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

s'écrit en coordonnées polaires comme suit d'après (1.2)

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \quad (1.9)$$

1.3. Équations de Lamé.

1.3.1. Construction des équations de Lamé.

Théorème 1.3.1.

La divergence de la relation : $\vec{\sigma} = \lambda \operatorname{tr}(\vec{\varepsilon}) \vec{I} + 2\mu \vec{\varepsilon}$ (1.10)

Dans laquelle $\vec{\varepsilon}$ est relié au champ \vec{U} par :

$$\vec{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left({}^t \operatorname{grad} \vec{U} + \operatorname{grad} \vec{U} \right) \quad (1.11)$$

Peut s'exprimer sous la forme:

$$\operatorname{div} \vec{\sigma} = (\lambda + \mu) \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{U}) + \mu \Delta \vec{U} \quad (1.12)$$

Preuve : L'expression de la loi de Hooke en notation indexée est la suivante :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij} \quad (1.13)$$

Celle du vecteur $\operatorname{div} \vec{\sigma}$ s'obtient à partir de la relation

$$\operatorname{div} \vec{\sigma} = \lambda \operatorname{grad} (\operatorname{tr} \varepsilon) + 2 \mu \operatorname{div} \vec{\varepsilon} \quad (1.14)$$

Et s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \lambda \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial x_i} + 2 \mu \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} \quad (1.15)$$

En reportant l'expression du tenseur des déformations $\vec{\varepsilon}$ en fonction du déplacement \vec{U} , nous obtenons les expressions suivantes :

$$\operatorname{grad} (\operatorname{tr} \vec{\varepsilon}) = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{U}) \quad (1.16)$$

$$\operatorname{div} \vec{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\Delta \vec{U} + \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{U})) \quad (1.17)$$

Comme le montre l'expression des composantes suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_i} \\ \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (1.18)$$

L'expression du vecteur $\operatorname{div} \vec{\sigma}$ en fonction du vecteur \vec{U} s'écrit alors :

$$\operatorname{div} \vec{\sigma} = (\lambda + \mu) \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{U}) + \mu \Delta \vec{U}$$

Cette dernière équation est appelée équation de Lamé.

En notations indicées cette expression s'écrit alors:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

Les coefficients d'élasticité de Lamé λ et μ sont indépendants de l'espace.

1.3.2. Quelques cas particuliers importants.

On suppose dans la suite la dimension est 3 c'est-à-dire l'espace usuel et on désigne par x, y, z les coordonnées d'un point au lieu x_1, x_2, x_3 et par

$\vec{U}(u, v, w)$ les composantes du déplacement \vec{U}

Les équations de Lamé sont alors :

$$\mu\Delta u + (\lambda + \mu)\frac{\partial M}{\partial x} = f_1, \quad \mu\Delta v + (\lambda + \mu)\frac{\partial M}{\partial y} = f_2, \quad \mu\Delta w + (\lambda + \mu)\frac{\partial M}{\partial z} = f_3 \quad (1.19)$$

où f_1, f_2, f_3 sont des fonctions des variables x, y, z .

En utilisant la formule $\Delta\vec{U} = \text{grad}(\text{div}\vec{U}) - \text{Rot}(\text{Rot}\vec{U})$ nous pouvons encore les écrire sous la forme :

$$(\lambda + 2\mu)\text{grad}(\text{div}\vec{U}) - \mu\text{rot}(\text{rot}\vec{U}) = \vec{f} \quad (1.20)$$

1.3.3. Les équations de Lamé en coordonnées curvilignes.

(Cas général)

1.3.3.1. Utilisation de la proposition 1.1.1.

Les équations (1.19) s'écrivent voir [14]:

$$\begin{aligned} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{1}{l_1} \frac{\partial M}{\partial \alpha} + \frac{2}{l_3 l_2} \left(\frac{\partial \omega_3 l_3}{\partial \beta} - \frac{\partial \omega_2 l_2}{\partial \gamma} \right) &= g_1(\alpha, \beta, \gamma) \\ \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{1}{l_2} \frac{\partial M}{\partial \beta} - \frac{2}{l_3 l_1} \left(\frac{\partial \omega_1 l_1}{\partial \gamma} - \frac{\partial \omega_3 l_3}{\partial \alpha} \right) &= g_2(\alpha, \beta, \gamma) \\ \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{1}{l_3} \frac{\partial M}{\partial \gamma} - \frac{2}{l_1 l_2} \left(\frac{\partial \omega_2 l_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial \omega_1 l_1}{\partial \beta} \right) &= g_3(\alpha, \beta, \gamma) \end{aligned} \quad (1.21)$$

Où :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{l_2 l_3} \left(\frac{\partial w l_3}{\partial \beta} - \frac{\partial v l_2}{\partial \gamma} \right) \\ \omega_2 &= \frac{1}{l_3 l_1} \left(\frac{\partial u l_1}{\partial \gamma} - \frac{\partial w l_3}{\partial \alpha} \right) \\ \omega_3 &= \frac{1}{l_1 l_2} \left(\frac{\partial v l_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial u l_1}{\partial \beta} \right) \end{aligned}$$

Sont les composantes du rotationnelle, et la compressibilité M s'écrit dans le repère curviligne (α, β, γ) :

$$M = \frac{1}{\ell_1 \ell_2 \ell_3} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (\ell_2 \ell_3 u_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (\ell_1 \ell_3 u_\beta) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (\ell_1 \ell_2 u_\gamma) \right] \quad (1.22)$$

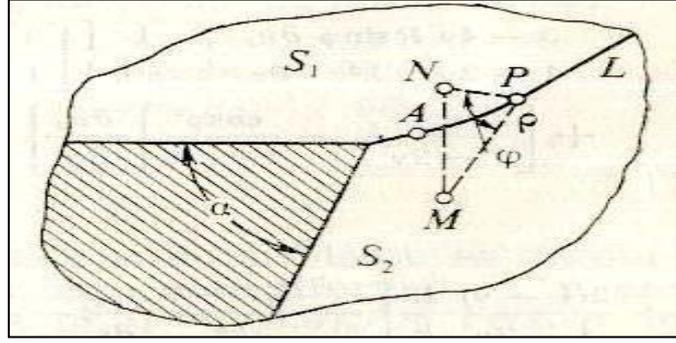
1.4. Décomposition du problème de Lamé.

Dans cette partie on décompose le système de Lamé en dimension trois, dans un domaine élastique homogène et isotrope à frontière présentant des points anguleux, pour ceci on utilisera une méthode dite de décomposition qui nous amènera à la décomposition du problème en deux problèmes l'un défini dans un plan et l'autre dans un antiplan.

1.4.1. Décomposition du problème dans les cas où l'arête est non rectiligne.

Soient Ω_1 et Ω_2 deux corps élastiques homogènes et isotropes occupant un domaine borné de \mathbb{R}^3 . Notons par S_1 une surface plane disposée d'un côté de l'arête et par S_2 une surface antiplane quelconque, et posons $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ qui sont rigidement joints tout au long de la surface S_1 qui passe à travers l'arête L du corps.

Considérons le voisinage d'un point A de l'arête et φ l'angle solide formé par les surface S_1 et S_2 et au point A (voir figure 1.1) et soient λ et μ les coefficients de Lamé pour Ω .



(Figure 1.1)

Considérons le système de Lamé suivant :

$$\begin{cases} \mu\Delta u + (\lambda + \mu)\frac{\partial M}{\partial x} = f_1(x, y, z) \\ \mu\Delta v + (\lambda + \mu)\frac{\partial M}{\partial y} = f_2(x, y, z) \\ \mu\Delta w + (\lambda + \mu)\frac{\partial M}{\partial z} = f_3(x, y, z) \end{cases} \quad (1.23)$$

Pour décomposer ce système on introduit au voisinage du point A un repère curviligne (ρ, θ, s) , ici (MN) est la perpendiculaire abaissée d'un point M sur le plan S_1 , (NP) la normale à l'arête L , située dans ce plan. Voir (figure.1.2).

La position du point M sera définie par trois coordonnées : ρ la distance entre les points M et P et s la distance le long de L comptée à partir du point fixé A jusqu'au point P .

θ est l'angle entre les segments $[NP]$ et $[MP]$, nous écrivons les équations de Lamé (1.23) précédentes dans le repère (ρ, θ, s) et par utilisation du (1.21) on aura alors: (voir [14] page 378).

$$\begin{aligned} & \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \left[\frac{-Rk_1}{\rho^2 k} u_\rho + \frac{k_1}{\rho k} \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho^2} \right] + \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \left[\frac{R \cos \theta}{k^2} \frac{\partial u_s}{\partial s} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] \\ & + \left[\frac{3-4\nu}{1-2\nu} \rho \cos \theta - R \right] \frac{\sin \theta}{k^2 \rho} u_\theta + \frac{1}{1-2\nu} \left[\frac{R}{k} \frac{\partial^2 u_s}{\partial \rho \partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{\sin \theta}{k} \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} \right] \\ & - RR'_s \frac{\cos \theta}{k^3} u_s - \frac{R_\rho \cos \theta}{k^3} \frac{\partial u_\rho}{\partial s} + \frac{R^2}{k^2} \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial s^2} + \frac{\sin \theta}{\rho k} \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \theta^2} = h_1(\rho, \theta, s) \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \left[\frac{R \sin \theta}{\rho k^2} u_\rho + \frac{\sin \theta}{\rho k} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} \right] - \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{R \sin \theta}{k^2} \frac{\partial u_s}{\partial s} + \\
& \frac{1}{\rho^2 k} \left\{ \left[\frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{\rho R \cos \theta}{k} - \frac{R^2}{k} - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\rho^2}{k} \right] u_\theta + \left[\frac{3-4\nu}{1-2\nu} k - \frac{\cos \theta}{1-2\nu} \right] \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} \right\} + \\
& + \frac{k_1}{\rho k} \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \rho^2} - \frac{R R'_s \cos \theta}{K^3} \frac{\partial u_\theta}{\partial s} + \frac{R R'_s \sin \theta}{K^3} u_s + \frac{R^2}{k^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial s^2} = h_2(\rho, \theta, s)
\end{aligned} \tag{1.25}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2(1-\nu)R}{(1-2\nu)k} \left[-\frac{R'_s \cos \theta}{K^2} \frac{\partial u_s}{\partial s} - \frac{R'_s \sin \theta}{K^2} u_\theta + \frac{R}{k} \frac{\partial^2 u_s}{\partial s^2} + \frac{R'_s \cos \theta}{k^2} u_\rho \right] + \\
& \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{R \sin \theta}{k^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial s} + \frac{R}{(1-2\nu)k} \left[\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho \partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial s \partial \theta} \right] - \\
& \frac{u_s}{k^2} + \frac{\sin \theta}{\rho_k} + \frac{\partial u_s}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u_s}{\partial \theta^2} + \frac{k_1}{\rho_k} \frac{\partial u_s}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u_s}{\partial \rho^2} + \left[\frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{\cos \theta}{k} + \frac{1}{(1-2\nu)\rho} \right] \frac{R}{k} \frac{\partial u_\rho}{\partial s} = h_3(\rho, \theta, s)
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Les quantités u_ρ, u_θ, u_s sont les composantes des déplacements dans le repère introduit. $R(s)$ est le rayon de courbure de l'arête L

$$k = R - \rho \cos \theta, \quad k_1 = R - 2\rho \cos \theta$$

Remarque 1.4.1. Les quantités R et k et k_1 sont des notions de la géométrie différentielle.

1.4.2. Réduction des équations (1.23) et (1.24).

Effectuons maintenant un changement de variables en posant $\rho = e^{-t}$ on aura alors $k_t = R - e^{-t} \cos \theta$, $k_{1t} = R - 2e^{-t} \cos \theta$ alors l'équation (1.23) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
& \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \left[-\frac{Rk_t}{k_t^2} u_\rho - \frac{k_t}{k_t} \frac{\partial u_\rho}{\partial t} + \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial t^2} + \frac{\partial u_\rho}{\partial t} \right] + \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \left[\frac{R \cos \theta e^{-2t}}{k_t^2} \frac{\partial u_s}{\partial s} - \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] + \\
& \left[\frac{3-4\nu}{1-2\nu} e^{-t} \cos \theta - R \right] \frac{\sin \theta e^{-t}}{k_t^2} u_\theta - \frac{1}{(1-2\nu)} \left[\frac{R e^{-t}}{k_t} \frac{\partial^2 u_s}{\partial t \partial s} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t \partial \theta} + \frac{e^{-t} \sin \theta}{k_t} \frac{\partial u_\theta}{\partial t} \right] - \frac{R R'_s e^{-2t}}{k_t^3} u_s \quad (1.27) \\
& - \frac{R e^{-3t} \cos \theta}{k_t^3} \frac{\partial u_\rho}{\partial s} + \frac{R e^{-2t}}{k_t^2} \frac{\partial u_\rho}{\partial s^2} + \frac{e^{-t} \sin \theta}{k_t} \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \theta^2} = q(\rho, \theta, s)
\end{aligned}$$

Supposons le voisinage du point A tellement petit que l'on peut négliger les termes en e^{-t} nous obtenons alors :

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \left(-u_\rho + \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial t^2} \right) - \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t \partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \theta^2} = q_1(\rho, \theta, s) \quad (1.28)$$

D'une manière analogue transformons les équations (1.24) et (1.25) on aura alors :

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial t \partial \theta} - u_\theta + \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = q_2(\rho, \theta, s) \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} = q_3(\rho, \theta, s) \quad (1.30)$$

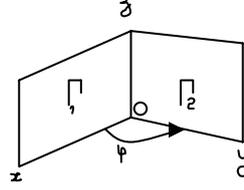
Les équations (1.28), (1.29) et (1.30) montrent que le problème de Lamé se décompose en deux problèmes un problème de déformation plane au quel correspondent les équations (1.28) et (1.29) et l'autre de déformation antiplane, décrit par l'équation (1.30).

1.4.3. La décomposition dans le cas où l'arête est rectiligne.

Soient Ω_1 et Ω_2 deux corps élastiques homogènes et isotropes occupent un domaine borné de \mathbb{R}^3 à frontière polyédrale.

Supposons que la surface latérale Γ_1 forme un angle φ avec la surface latérale Γ_2 , en plus supposons que Ω soit un corps homogène constitué de deux corps ($\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$) qui sont rigidement joints tout au long de la surface plane Γ_1 qui passe à travers l'arête A du corps.

Pour permettre d'énoncer des résultats sur le comportement de la solution d'un problème aux limites loin des sommets on fixe un intervalle I de A ouvert, dont



(Figure 1.2)

la fermeture est intérieur à A voir (Figure1.2) . De plus on fixe un voisinage V de O dans l'intersection de Ω avec le plan (x o y) de sorte que $\bar{V} \times \bar{I}$ ne contient aucun sommets de Ω .

Soient μ, ν respectivement le module de cisaillement et le coefficient de poisson du milieu élastique pour le matériau du corps Ω

(limité par Γ_1 et Γ_2) la normale à Γ_i , $i=1,2$ sera notée par η_i .

Pour la décomposition du problème (1.19), on introduit un repère curviligne particulier c'est le repère cylindrique (r, θ, z) et par utilisation du (1.10) et (1.21), On aura alors :

$$\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial M}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \Delta u_r = C_1(r, \theta, z) \quad (1.31)$$

$$\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial M}{r \partial \theta} + \Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = C_2(r, \theta, z) \quad (1.32)$$

$$\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial M}{\partial z} + \Delta u_z = C_3(r, \theta, z) \quad (1.33)$$

Les fonctions u_r, u_θ, u_z sont les composantes des déplacements dans le repère cylindrique. Pour ramener les points singuliers à l'arête A, on effectue le changement de variable $r = e^{-t}$, l'équation (1.31) prend la forme :

$$\begin{aligned} & \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \left(-u_r + \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \right) - \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t \partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} \\ & + \frac{1}{1-2\nu} e^{-t} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t \partial z} + e^{-2t} \frac{\partial u_r}{\partial z^2} = J(r, \theta, z) \end{aligned} \quad (1.34)$$

Supposons que le voisinage de l'arête A tellement petite qu'on peut négliger les termes en e^{-t} , nous obtenons alors :

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \left(-u_r + \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \right) - \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t \partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} = J_1(r, \theta, z) \quad (1.35)$$

D'une manière analogue transformons les équations (1.32) et (1.33) nous obtenons :

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t \partial \theta} - u_\theta + \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = J_2(r, \theta, z) \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = J_3(r, \theta, z) \quad (1.37)$$

Les équations (1.35),(1.36),(1.37) montrent que le problème se décompose en deux problèmes, un problème de déformation plane auquel correspondent les équations (1.35) et (1.36) et l'autre de déformation antiplane, décrite par l'équation (1.37).

Remarque 1.4.2. D'après l'étude de décomposition dans le cas général et le cas rectiligne on a trouvé les mêmes équations (1.35), (1.36), (1.37), et les équations (1.28), (1.29), (1.30) sont équivalentes, alors dans la suite on étudiera l'existence et l'unicité dans le cas rectiligne.

CHAPITRE 2

Existence et unicité de la solution du problème de Lamé bidimensionnel.

Résumé :

Nous examinerons dans ce chapitre les questions d'existence et d'unicité de la solution variationnelle pour les problèmes aux limites du système de Lamé bidimensionnel muni des conditions aux limites de Dirichlet ou celles de Neumann.

2.1. Rappels.

2.1.1. Espaces de Sobolev.

2.1.1.1. Définitions et principales propriétés :

1) Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n muni de la mesure de Lebesgue.

$L^2(\Omega)$ muni de produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$ est un espace de Hilbert

muni de la norme : $\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$

2) On note $D(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω . $D(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$.

3) Soit v une fonction de $L^2(\Omega)$.

On dit que v est dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$ s'il existe des fonctions $w_i \in L^2(\Omega)$, pour $i=1 \dots n$, telles que:

$$\int_{\Omega} v(x) \frac{\partial(\Phi)}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} w_i(x) \Phi(x) dx .$$

Chaque w_i est appelée la i -ème dérivée partielle faible de v et est notée désormais $\frac{\partial v}{\partial x_i}$.

4) L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall i = 1, \dots, n; \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\} \quad (2.1)$$

Où $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle faible de la fonction v .

5) Muni du produit scalaire suivant :

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} (u(x)v(x) + \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)) dx$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

6) Espace $H_0^1(\Omega)$: C'est un sous-espace de $H^1(\Omega)$ et qui sera très utile pour les problèmes avec conditions aux limites de Dirichlet qui est la densité de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ on peut le définir par :

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } v|_{\Gamma} = 0 \right\} \quad (2.2)$$

7) Formule de Green : Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1 .

Si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, elles vérifient :

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x) \cdot \eta_i(x) ds$$

où $\eta = (\eta_i)_{i=1, \dots, n}$ est la normale unité extérieure de $\partial\Omega$.

8) Si Ω un ouvert borné régulier de classe C^1 , l'espace $H_0^1(\Omega)$ coïncide avec le sous-espace de $H^1(\Omega)$ constitué des fonctions qui s'annulent sur le bord $\partial\Omega$.

9) Espace $H^m(\Omega)$, m est un entier naturel, est défini par :

$$H^m(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall \alpha \leq m; D^\alpha v \in L^2(\Omega) \right\} \quad (2.3)$$

2.2. Fonctions poids et espaces avec poids.

2.2.1. Exemples de singularités.

Voyons maintenant un exemple de solutions singulières i.e., non régulières.

Il s'agit d'un problème posé dans un ouvert non régulier pour lequel le théorème de régularité et son corollaire sont faux. En particulier, bien qu'il existe des solutions faibles (c'est-à-dire appartenant à $H^1(\Omega)$), il n'y a pas des solutions fortes (c'est-à-dire deux fois dérivables).

Nous nous plaçons en dimension $n = 2$ d'espace, et nous considérons un secteur angulaire Ω_φ^* défini en coordonnées polaires (voir figure (2.1))

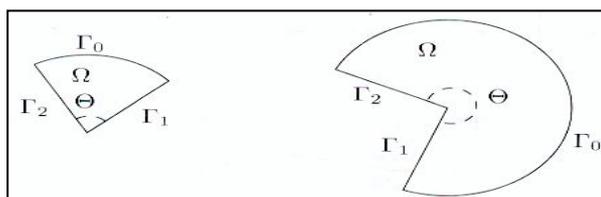


Figure. (2.1)

Avec :
$$\Omega_\varphi^* = \{(r, \theta) / 0 < r < r_0 \text{ et } 0 < \theta < \varphi \leq 2\pi\}$$

On note Γ_0 une partie du bord de Ω_φ^* où $r = r_0$, Γ_1 celle où $\theta = 0$ et Γ_2 celle où $\theta = \varphi$.

Cet ouvert Ω_φ^* présente trois « coins », mais seule l'origine (le coin entre les bords Γ_1 et Γ_2), peut poser un problème pour la régularité ci-dessous.

Physiquement le cas d'un angle $\varphi < \pi$ et représentatif d'un effet de pointe, tandis que le cas $\varphi > \pi$ correspond à une encoche (où même à une fissure si $\varphi = 2\pi$).

On considère les deux problèmes aux limites suivantes :

$$(P_1) \quad \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega_\varphi^* \\ u = \cos\left(\frac{k\pi\theta}{\varphi}\right) & \text{sur } \Gamma_0 \quad \text{pour } k \geq 1 \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \end{cases}$$

$$(P_2) \quad \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega_\varphi^* \\ u = \sin\left(\frac{k\pi\theta}{\varphi}\right) & \text{sur } \Gamma_0 \quad \text{pour } k \geq 1 \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \end{cases}$$

Nous étudierons la régularité des solutions (P_1) et (P_2) en termes d'appartenance ou non aux espaces H^m .

Nous allons simplement nous intéresser au comportement du gradient ∇u au voisinage de l'origine.

Il est facile de vérifier que (P_1) et (P_2) admettent des solutions uniques dans $H^1(\Omega_\varphi^*)$ qui sont données respectivement par les expressions:

$$u(r, \theta) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{k\pi}{\varphi}} \cos\left(\frac{k\pi\theta}{\varphi}\right)$$

$$u(r, \theta) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{k\pi}{\varphi}} \sin\left(\frac{k\pi\theta}{\varphi}\right)$$

Dans le cas $k=1$ et $\varphi > \pi$ le gradient ∇u n'est pas borné à l'origine, mais si on multiplie ∇u par une fonction $\lambda(r)$ la quantité $\lambda(r)\nabla u$ devient bornée à l'origine cette fonction est dite fonction poids.

2.2.2. Solution du problème (P_2) :

On va résoudre (P_2) qui est un problème de Neumann dans le coin.

On commence par lever la condition aux limites non homogène en définissant une fonction $u_0 \in H^1(\Omega_\varphi^*)$ dont la trace sur le bord coïncide avec cette condition aux limites.

On vérifie aisément que $u_0(r, \theta) = \frac{r^2}{r_0^2} \cos\left(\frac{k\pi\theta}{\varphi}\right)$ répond à la question :

C'est-à-dire que $u = u_0 + v$ où v est la solution d'un problème homogène.

$$(P_3) \quad \begin{cases} -\Delta v = \Delta u_0 & \text{dans } \Omega_\varphi^* \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \end{cases}$$

Comme $\Delta u_0 \in L^2(\Omega_\varphi^*)$, il existe une unique solution de (P_3) dans $H^1(\Omega_\varphi^*)$ et par conséquent (P_1) admet une unique solution dans $H^1(\Omega_\varphi^*)$.

Vérifions que (P_2) est précisément cette unique solution.

Rappelons que : $\Delta\phi(r, \theta) = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}$.

Un calcul simple montre que $\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{k\pi}{\varphi}} = \left(\frac{k\pi}{\varphi}\right)^2 \frac{1}{r^2} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{k\pi}{\varphi}}$

Donc (P_2) est bien solution de (P_1) est un élément de $H^1(\Omega_\varphi^*)$.

D'après l'expression (1.2), dans la base (e_r, e_θ) on a :

$$\nabla u = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{k\pi}{\varphi}-1} \frac{k\pi}{\varphi} \left[\left(\cos\left(\frac{k\pi\theta}{\varphi}\right)\right) e_r - \left(\sin\left(\frac{k\pi\theta}{\varphi}\right)\right) e_\theta \right]$$

qui clairement, n'est pas borné à l'origine si $0 < k\pi < \varphi$.

2.2.3. Exemple plus général.

L'exemple qu'on va donner est une généralisation de l'exemple précédent et sera très important dans la suite.

On considère le problème de Dirichlet suivant :

$$(P_4) \quad \begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = o & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Où Ω est un polygone et Γ sa frontière, f est donnée dans $L^2(\Omega)$.

La solution du problème (P_4) n'existe dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ que si le polygone Ω est convexe, c'est-à-dire que tous les angles du polygone sont saillants, cela découle du fait que la solution de ce problème est de la

$$\text{forme } u = u_0 + ar^{\frac{k\pi}{\varphi}} \sin \frac{k\pi\theta}{\varphi}.$$

Cette solution n'est pas nécessairement dans $H^2(\Omega)$ lorsque $\pi < \varphi$, car

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \notin L^2(\Omega) \text{ et par suite la solution du dernier problème n'est pas}$$

nécessairement dans $H^2(\Omega)$ lorsque le polygone n'est pas convexe, car

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \notin L^2(\Omega), \text{ mais on constate que } r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \in L^2(\Omega) \text{ ce qui nous donne l'idée}$$

d'affecté le Laplacien d'une fonction poids qui dépend de r et est définie en coordonnées polaires par :

$$\lambda(r) = \begin{cases} r & \text{si } 0 < r < r_0 \\ \delta(r) & \text{si } r_0 < r < r_1 \\ 1 & \text{si } r > r_1 \end{cases} \quad (2.4)$$

r_0 est suffisamment petit et r_1 suffisamment grand.

La fonction poids $\lambda(r)$ est indéfiniment différentiable à l'intérieur de Ω et ne s'annule pas dans Ω .

Et pour étude de (P_4) dans le polygone Ω tout entier, on choisit l'étude sur un secteur plan infini d'ouverture φ qu'on note Ω_φ qui est défini par :

$$\Omega_\varphi = \{(r, \theta) / 0 < r; 0 < \theta < \varphi\} \quad (2.5)$$

On désigne par Γ_φ sa frontière et l'étude sera ensuite généralisée au polygone tout entier, en utilisant une partition de l'unité de celui-ci.

2.2.2. Les espaces fonctionnels avec poids.

Après affectation d'une fonction poids de (P_4) , l'étude de l'existence et l'unicité sera dans un espace fonctionnel convenable dit espace avec poids qu'on note E et qu'on définit par :

$$E(\Omega_\varphi) = \left\{ v \in H^1(\Omega_\varphi) \text{ tel que } rD^2u \in L^2(\Omega_\varphi) \right\} \quad (2.6)$$

Où les fonctions u sont à support compact dans $\overline{\Omega_\varphi}$ et D^2 désigne les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport aux variables r et η

2.2.3. Propriétés de l'espace $E(\Omega_\varphi)$.

1) Puisque $D^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}, \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \frac{\partial^2}{\partial r \partial \eta} \right)$ et comme $\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$ alors

$$D^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}, \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \right) \quad (2.7)$$

Et par suite :

$$rD^2 = \left(r \frac{\partial^2}{\partial r^2}, \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \right) \quad (2.8)$$

2) La formule (2.6) s'écrit alors:

$$E(\Omega_\varphi) = \left\{ u \in H^1(\Omega_\varphi) \text{ tel que } \left(r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}, \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \in (L^2(\Omega_\varphi))^3 \right\}$$

Où u est à support compact dans $\overline{\Omega_\varphi}$

3) On pose : $E_0(\Omega_\varphi) = E(\Omega_\varphi) \cap H_0^1(\Omega_\varphi)$ (2.9)

4) $H_0^2(\Omega_\varphi)$ est un espace de Banach réflexif.

5) On montre dans [15], que l'espace défini par la formule (2.6) coïncide avec l'espace suivant :

$$F_0(\Omega_\varphi) = \left\{ u \in H_0^1(\Omega_\varphi) / ru \in H_0^2(\Omega_\varphi) \right\} \quad (2.10)$$

Où les fonctions u sont toujours à support compact dans $\overline{\Omega_\varphi}$.

6) On montre aussi dans [15] que $E(\Omega_\varphi)$ est un espace intermédiaire entre $H^2(\Omega_\varphi)$ et $H^1(\Omega_\varphi)$.

(2.11)

Et par la suite l'espace $E_0(\Omega_\varphi)$ est un espace intermédiaire entre $H_0^2(\Omega_\varphi)$ et $H_0^1(\Omega_\varphi)$.

2.3. Le système de Lamé bidimensionnel (déformation plane).

2.3.1. Equivalence des équations (1.34) et (1.35).

D'après 1.4.2 on a trouvé un système de Lamé (1.34) et (1.35).

Et puisque $r = e^{-t}$ et utilisation de la dérivation des fonctions composées on trouve le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} \left[\Delta u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} \right] + v_0 \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \left[u_r + r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] = f_1 \\ \left[\Delta u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right] + v_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r} \left[u_r + r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] = f_2 \end{cases} \quad (2.12)$$

Où $v_0 = \frac{1}{1-2\nu}$, et f_1 e f_2 sont des fonctions de deux variables r et θ .

Remarque 2.1. Le système précédent s'écrit d'une manière condensée

$$LU = \Delta U + v_0 \nabla(\operatorname{div} U) = f \quad \text{où } f = (f_1, f_2) \quad (\text{Système de Lamé}).$$

Remarque 2.2. On pose dans la suite $u_r = u$ et $u_\theta = v$, alors le système

(2.12) s'écrit :

$$\begin{cases} \left[\Delta u - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{r^2} \right] + v_0 \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \left[u + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] = f_1 \\ \left[\Delta v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2} \right] + v_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r} \left[u + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] = f_2 \end{cases} \quad (2.13)$$

2.4. Etude de l'existence et de l'unicité de la solution de système de Lamé bidimensionnel .

En munissant le système (2.13) par la condition initiale B on obtient le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\Delta u - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{r^2} \right] + \nu_0 \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \left[u + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] = f_1 \quad \text{dans } \Omega_\varphi \\ \left[\Delta v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2} \right] + \nu_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r} \left[u + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] = f_2 \quad \text{dans } \Omega_\varphi \\ Bu = Bv = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\varphi \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Où B est l'opérateur différentiel d'ordre zéro ou un.

Les coordonnées polaires sont mieux adaptées à la géométrie du domaine Ω_φ . Pour absorber les singularités qui se produisent au voisinage de l'origine, vu la présence du point anguleux en 0, on multiplie (2.14) par une fonction poids (voir (2.4)).

Au voisinage de l'origine on obtient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} r \Delta u - \frac{2 + \nu_0}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{1 + \nu_0}{r} u + \nu_0 r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \nu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} + \nu_0 \frac{\partial u}{\partial r} = r f_1 \quad \text{dans } \Omega_\varphi^* \\ r \Delta v + \frac{2 + \nu_0}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{r} v + \frac{\nu_0}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \nu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} = r f_2 \quad \text{dans } \Omega_\varphi^* \\ Bu = Bv = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\varphi \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Où $\Omega_\varphi^* = \left\{ (r, \theta) / 0 < r < r_0 \text{ et } 0 < \theta < \varphi \leq 2\pi \right\}$

2.4.1. Position du problème.

On se propose d'étudier le problème (2.15) dans l'espace fonctionnel convenable pour la condition de Dirichlet homogène, il est commode de travailler dans l'espace fonctionnel $(E(\Omega_\varphi))^2$ tel que

$$E_0(\Omega_\varphi) = E(\Omega_\varphi) \cap H_0^1(\Omega_\varphi)$$

Les calculs avec les expressions qui renferment des termes de la forme $\frac{u}{r}$

et $\frac{v}{r}$ ont aussi un sens, il suffit de remarquer que :

$$u(x, y) = u(r \cos \theta, r \sin \theta) = \int_0^\theta \frac{\partial}{\partial \tau} u(r \cos \tau, r \sin \tau) d\tau$$

Donc

$$\left| \frac{u(x, y)}{r} \right| \leq \int_0^\varphi |\nabla u(r \cos \tau, r \sin \tau)| d\tau$$

Pour plus de détail, voir [3].

Donc si $u \in E(\Omega_\varphi)$, les intégrales en ∇u ont un sens, car par définition, $E(\Omega_\varphi)$ est un sous espace de $H^1(\Omega_\varphi)$, et par la suite les intégrales où interviennent les expressions en $\frac{v}{r}$ et $\frac{u}{r}$ ont aussi un sens.

Donc l'espace fonctionnel $E(\Omega_\varphi)$ comme on l'a choisi, est suffisant pour que toutes les intégrales qui interviennent dans les calculs soient convergentes.

Remarque 2.4.1. Le calcul reste valable dans l'espace $E_0(\Omega_\varphi)$

Pour l'étude de l'existence du problème (2.15) on a besoin de lemme suivant :

Lemme 2.4.1. (de Peetre) :

Soient E, F, G trois espaces de Banach réflexifs, tel que E s'injecte dans G et cette injection est compacte, et soit T un opérateur linéaire continu de E dans F . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1- L'image de T est fermée dans F et L a un noyau de dimension finie.
- 2- Il existe une constante K positive, telle que :

$$\|u\|_E \leq K \{ \|Tu\|_F + \|u\|_G \} \quad (2.16)$$

Preuve : Voir [6].

2.4.2. Etude de l'existence de la solution du problème) dans l'espace $(E_0(\Omega_\varphi))^2$ avec la condition de Dirichlet homogène.

On se propose de chercher la solution si elle existe du problème (2.15) avec la condition de Dirichlet homogène (c'est à dire que B est l'opérateur identité) dans l'espace $(E(\Omega_\varphi))^2$.

Comme on a $U = 0$ sur Γ_φ , il est commode de chercher la solution du problème (2.15) dans l'espace $(E_0(\Omega_\varphi))^2$.

Pour étudier l'existence des solutions de ce problème dans l'espace $(E_0(\Omega_\varphi))^2$, on va d'abord étudier la fermeture de l'image de l'opérateur rL dans l'espace $(L^2(\Omega_\varphi))^2$, (où L est l'opérateur de Lamé).

Pour prouver que l'image de rL est fermée dans $(L^2(\Omega_\varphi))^2$, on appliquera le théorème suivant :

Théorème 2.4.1. Pour l'opérateur $rL : (E_0(\Omega_\varphi))^2 \rightarrow (L^2(\Omega_\varphi))^2$

Il existe une constante $K > 0$, telle que :

$$\| U \|_{(E_0(\Omega_\varphi))^2} \leq K [\| rLU \|_{(L^2(\Omega_\varphi))^2} + \| U \|_{(H_0^1(\Omega_\varphi))^2}] \quad (2.16)$$

Preuve :

Il est clair que toutes les hypothèses du Lemme 2.4.1 sont vérifiées car : Les espaces $E_0(\Omega_\varphi), L^2(\Omega_\varphi), H_0^1(\Omega_\varphi)$ sont des espaces de Banach réflexifs car ce sont des espaces de Hilbert et l'opérateur rL est linéaire et continu de $E_0(\Omega_\varphi)$ dans $L^2(\Omega_\varphi)$ et de plus l'injection de l'espace $E_0(\Omega_\varphi)$ dans $H_0^1(\Omega_\varphi)$ est compacte [22].

Pour établir l'inégalité (2.16), on appliquera la transformation de Mellin au problème (2.15), on obtient :

$$\begin{cases} r\tilde{L}U(\sigma) = \tilde{g}(\sigma) \\ \tilde{U}(\sigma,0) = \tilde{U}(\sigma,\varphi) = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

On pose $U = (u, v)$ et $g = (g_1, g_2)$. Après calculs dans (2.17), il vient:

$$\begin{cases} (1 + \nu_0)(\sigma^2 - 2\sigma)\tilde{u}(\sigma - 1) + \frac{\partial^2 \tilde{u}(\sigma - 1)}{\partial \theta^2} - (2 + \sigma \nu_0) \frac{\partial \tilde{v}(\sigma - 1)}{\partial \theta} = g_1(\sigma) \\ (\sigma^2 - 2\sigma)\tilde{v}(\sigma - 1) + (1 + \nu_0) \frac{\partial^2 \tilde{v}(\sigma - 1)}{\partial \theta^2} - (2 + \sigma \nu_0) \frac{\partial \tilde{u}(\sigma - 1)}{\partial \theta} = g_2(\sigma) \\ \tilde{u}(\sigma, 0) = \tilde{u}(\sigma, \varphi) = 0 \\ \tilde{v}(\sigma, 0) = \tilde{v}(\sigma, \varphi) = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

L'écriture matricielle du système (2.18) est la suivante :

$$\begin{cases} A(\sigma) \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \theta^2} + B(\sigma) \frac{\partial U}{\partial \theta} + C(\sigma) \tilde{U} = \tilde{g} \\ \tilde{U}(\sigma, 0) = \tilde{U}(\sigma, \varphi) = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

Les matrices A,B et C sont définies par :

$$A(\sigma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \nu_0 \end{bmatrix} \quad B(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 & -(2 + \nu_0 \sigma) \\ -(2 + \nu_0 \sigma) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{et} \quad C(\sigma) = \begin{bmatrix} (1 + \nu_0)(\sigma^2 - 2\sigma) & 0 \\ 0 & (\sigma^2 - 2\sigma) \end{bmatrix}$$

D'après la théorie des équations différentielles, on montre voir [3] , que ce type d'équations différentielles avec la condition de Dirichlet, admet une fonction de Green.

Le problème (2.19) admet une fonction de Green K , [5], qui est bornée et vérifie :

$$\tilde{U}(\sigma, \theta) = \int_0^\varphi \tilde{K}(\sigma, \alpha, \theta) \tilde{g}(\sigma, \alpha) d\alpha$$

D'où il existe une constante $M > 0$ telle que:

$$\|\tilde{U}\|_{(H^2(\Omega_\varphi))^2} \leq M \|\tilde{g}\|_{(L^2(\Omega_\varphi))^2}$$

C'est à dire :

$$\|U\|_{(H^2(\Omega_\varphi))^2} \leq M \|rLU\|_{(L^2(\Omega_\varphi))^2}$$

On muni l'espace $E_0(\Omega_\varphi)$ de la norme suivante :

$$\|U\|_{(E^2(\Omega_\varphi))^2}^2 = \|U\|_{(H^1(\Omega_\varphi))^2}^2 + \sum_{|\alpha|=2} \|rD^\alpha U\|_{(L^2(\Omega_\varphi))^2}^2$$

Le symbole D désigne l'opérateur de dérivation par rapport aux variables r et η (η étant le vecteur normal à la frontière du domaine et dirigé vers l'extérieur de celle-ci). C'est-à-dire :

Comme les fonctions de l'espace $E(\Omega_\varphi)$ sont à support compact on a si S est le support de ces fonctions :

$$\sum_{|\alpha|=2} \|rD^\alpha U\|_{(L^2(\Omega_\varphi))^2}^2 = \sum_{|\alpha|=2} \int_0^\varphi \int_0^\infty r^2 |D^\alpha U|^2 r dr d\theta = \sum_{|\alpha|=2} \int_0^\varphi \int_0^\beta r^2 |D^\alpha U|^2 r dr d\theta$$

où β est la plus grande valeur de r sur S , on a donc:

$$\sum_{|\alpha|=2} \int_0^\varphi \int_0^\infty r^2 |D^\alpha U|^2 r dr d\theta \leq \beta^2 \sum_{|\alpha|=2} \int_0^\varphi \int_0^\beta |D^\alpha U|^2 r dr d\theta$$

D'où il existe une constante $\mu > 0$ telle que:

$$\|U\|_{(E^2(\Omega_\varphi))^2} \leq \mu \|rLU\|_{(H^2(\Omega_\varphi))^2}$$

Et comme $\|U\|_{(H^2(\Omega_\varphi))^2} \leq M \|rLU\|_{(L^2(\Omega_\varphi))^2}$

Donc on a l'inégalité (2.16) est vérifiée, donc d'après le Lemme 2.4.1 l'image de l'opérateur rL est fermée dans l'espace $(L^2(\Omega_\varphi))^2$, et son noyau est de dimension finie dans l'espace $(E_0(\Omega_\varphi))^2$.

D'où l'opérateur rL est surjectif sur $(L^2(\Omega_\varphi))^2$, et donc le problème (2.15) admet au moins une solution dans l'espace $(E_0(\Omega_\varphi))^2$.

2.4.2. Etude de l'existence de la solution du problème de Lamé avec la condition de Neumann homogène.

On se propose de chercher la solution si elle existe du problème (2.15) avec la condition de Neumann homogène dans l'espace $(E(\Omega_\varphi))^2$.

Pour l'étude de ce problème on suit exactement la méthode que celle utilisée dans le paragraphe précédent, et par utilisation du lemme 2.4.1

aux espaces $(E(\Omega_\varphi))^2$, $(L^2(\Omega_\varphi))^2$ et $(H^1(\Omega_\varphi))^2$, et à l'opérateur rL .

On obtiendra un résultat analogue au résultat obtenu pour le cas de la condition de Dirichlet étudiée dans le paragraphe précédent, le seul changement est qu'on travaille dans l'espace $(E(\Omega_\varphi))^2$ au lieu de $(E_0(\Omega_\varphi))^2$

2.4.3. Etude de l'unicité de la solution du problème de Lamé avec la condition de Dirichlet homogène.

Pour le cas de la condition de Dirichlet homogène Il s'agit de chercher le noyau du problème (2.15), et de voir s'il est réduit à $\{0\}$ dans l'espace $(E_0(\Omega_\varphi))^2$, et dans ce cas, l'opérateur rL serait injectif sur l'espace $(L^2(\Omega_\varphi))^2$ et par la suite le problème (2.15) avec la condition de Dirichlet, admet une solution unique U dans $(E_0(\Omega_\varphi))^2$, ou bien la dimension de ce noyau n'est pas nulle, mais elle est finie d'après le Lemme 2.4.1, et dans ce cas là, le problème (2.15) admet des solutions singulières.

Les éléments du noyau du problème (2.15) avec la condition de Dirichlet, sont solution du problème :

$$\begin{cases} rLU = 0 \text{ dans } \Omega_\varphi \\ U = 0 \text{ sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \quad (2.20)$$

Et comme r ne s'annule pas dans Ω_φ , ce problème est équivalent à:

$$\begin{cases} LU = 0 \text{ dans } \Omega_\varphi \\ U = 0 \text{ sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \quad (2.21)$$

Ce type de problème a été étudié par Merouani dans [11], et ceci pour différentes conditions aux limites et a récapitulé les résultats dans un tableau à sept colonnes.

On va résoudre ce problème en posant $U = r^\alpha W$ avec $W = (w_1, w_2)$, et α est un paramètre complexe, on obtient donc:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w_1(\theta)}{\partial \theta^2} + (1 + \nu_0)(\alpha^2 - 1)w_1(\theta) + \rho_0 \frac{\partial w_2(\theta)}{\partial \theta} = 0 \\ (1 + \nu_0) \frac{\partial^2 w_2(\theta)}{\partial \theta^2} + (\alpha^2 - 1)w_2(\theta) + \rho_1 \frac{\partial w_1(\theta)}{\partial \theta} = 0 \\ w_1(0) = w_2(0) = 0 \\ w_1(\varphi) = w_2(\varphi) = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

Avec $\rho_0 = \nu_0(\alpha - 1) - 2$ et $\rho_1 = \nu_0(\alpha + 1) + 2$.

Le problème (2.22), est un problème différentiel ordinaire du second ordre par rapport à la variable θ , et dépendant d'un paramètre complexe α , avec condition de Dirichlet homogène, la solution générale de ce problème est de la forme:

$$W(\theta) = \begin{cases} C_1 \rho_0 \cos(\alpha - 1)\theta + C_2 \rho_1 \sin(\alpha - 1)\theta - C_3 \sin(\alpha + 1)\theta + C_4 \cos(\alpha + 1)\theta \\ -C_1 \rho_1 \sin(\alpha - 1)\theta + C_2 \rho_0 \cos(\alpha - 1)\theta - C_3 \cos(\alpha + 1)\theta + C_4 \sin(\alpha + 1)\theta \end{cases} \quad (2.23)$$

avec $\alpha \notin \{0, -1, 1\}$, car ces valeurs sont des cas simples.

On détermine les constantes C_1, C_2, C_3 et C_4 , à l'aide des conditions aux limites, le déterminant du système linéaire ainsi obtenu est proportionnel à l'expression:

$$\sin^2 \alpha \varphi - \left[\frac{\alpha}{3 - 4\nu} \right]^2 \sin^2 \varphi \quad \text{où} \quad \nu = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\nu_0} \right) \quad (2.24)$$

D'où la proposition :

Proposition (2.4.2). Le problème (2.22) détermine $W = (w_1, w_2)$ non nulle lorsque α est une solution de l'équation suivante :

$$\sin^2 \alpha \varphi - \left[\frac{\alpha}{3-4\nu} \right]^2 \sin^2 \varphi = 0 \quad \text{avec } \alpha \notin \{-1, 0, 1\} \quad (2.25)$$

Ce que veut dire que le comportement singulier des solutions du problème (2.15) est gouverné par l'équation transcendante (2.25).

L'équation (2.25) ne peut être résolue que numériquement, et ceci en utilisant l'une des méthodes connues telles que la méthode de Newton et ça donne de bons résultats.

R Lozi [9] a construit un algorithme de résolution numérique pour ces types d'équations.

Dans Merouani [11], on trouve un tableau qui récapitule suivant les valeurs de φ et suivant les conditions aux limites les termes les plus singuliers d'un développement de toute solution variationnelle du problème (2.15) au voisinage de l'origine.

2.4.4. Etude de l'unicité du problème de Lamé avec la condition de Neumann homogène.

Il s'agit de chercher le noyau du problème (2.15) avec la condition de Neumann et de voir s'il est réduit à $\{0\}$ dans l'espace $(E(\Omega_\varphi))^2$, on utilise la même méthode que celle du paragraphe (2.4.1), on aura donc :

On détermine les constantes : C_1, C_2, C_3 , et C_4 contenues dans la solution générale du problème (2.22), à l'aide des conditions aux limites de Neumann, le déterminant du système linéaire est proportionnel à

l'expression : $\sin^2 \alpha \varphi - \alpha^2 \sin^2 \varphi$

D'où la proposition (2.4.3).

Proposition (2.4.3).

Le problème (2.22) détermine W non nulle lorsque α est solution de l'équation suivante : $\sin^2 \alpha \varphi - \alpha^2 \sin^2 \varphi = 0$, avec $\alpha \notin \{0, -1, 1\}$ (2.26)

Preuve : Voir [16].

Ce qui veut dire que le comportement singulier du problème (2.15) avec la condition de Neumann , est gouvernée par l'équation transcendante (2.26).

CHAPITRE 3

Etude de l'existence et de l'unicité de la solution du problème antiplan et extension dans le polygone tout entier.

Résumé :

Nous examinerons dans ce chapitre les questions d'existence et d'unicité de la solution pour le problème antiplan et détendre les études précédentes au polygone tout entier, on utilisera une partition de l'unité de celui-ci.

3.1. Etude de l'existence de la solution du problème antiplan

3.1.1. Equivalence d'un problème antiplan

On a trouvé au paragraphe (1.4.2) l'équation (1.36) :

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = J_3(r, \theta, z)$$

en posant : $u_z = v$, cette équation est équivalente à l'équation suivante :

$\Delta v = f$ où Δv c'est le Laplacien scalaire sous la forme polaire .

Et par suite on se propose d'étudier l'existence et l'unicité du problème suivant :

$$\begin{cases} r\Delta v = f & \text{dans } \Omega_\varphi \\ Bv = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \quad (3.1)$$

Où Ω_φ défini en (2.7) et B l'opérateur différentiel défini sur Γ_φ , d'ordre zéro ou un. On ne considérera ici que les deux cas (condition de Dirichlet et Neumann).

L'étude sera ensuite généralisée au polygone tout entier, en utilisant une partition de l'unité de celui-ci.

3.1.2. Affectation d'une fonction poids et étude sur un espace avec poids.

D'après le paragraphe (2.2.1) et l'exemple 2, on affecte l'opérateur Laplacien d'une fonction poids définie par (2.4), on obtient le problème suivant :

$$\begin{cases} r\Delta v = f & \text{dans } \Omega_\varphi \cap V_0 \\ Bv = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \quad (3.2)$$

Où V_0 est un voisinage de l'origine.

Pour étudier le problème (3.2) avec la condition du Dirichlet homogène on étudie le problème équivalent suivant :

$$\begin{cases} r\Delta v = f & \text{dans } \Omega_\varphi \cap V_0 \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \quad (3.3)$$

On étudie l'existence du problème (3.3) sur l'espace

3.1.3. Etude de l'existence de la solution du problème antiplan avec la condition de Dirichlet homogène.

Pour étudier l'existence du problème (3.3) on utilise lemme 2.4.1 et on prendra les espaces $E=(E_0(\Omega_\varphi))^2$; $F=(L^2(\Omega_\varphi))^2$ et $G=(H_0^1(\Omega_\varphi))^2$ et T étant l'opérateur $r\Delta$.

Il est clair que F et G sont des espaces de Banach réflexifs, car ce sont des espaces de Hilbert, il est évident que l'opérateur $r\Delta$ est linéaire et continu de $(E_0(\Omega_\varphi))^2$ dans $(L^2(\Omega_\varphi))^2$.

Il reste à vérifier que $(E_0(\Omega_\varphi))^2$ est un espace de Banach réflexif, pour ceci il suffit de démontrer que l'espace $(E_0(\Omega_\varphi))^2$ est fermé dans $(H_0^1(\Omega_\varphi))^2$, pour ceci on considère une suite de Cauchy (U_n) dans $(E_0(\Omega_\varphi))^2$ qui converge vers U dans $(H_0^1(\Omega_\varphi))^2$, montrons que $U \in (E_0(\Omega_\varphi))^2$:

Comme (U_n) converge vers U dans $(H_0^1(\Omega_\varphi))^2$, alors la suite :

$(U_n, \frac{\partial U_n}{\partial r}, \frac{\partial U_n}{\partial \eta})$ converge vers $(U, \frac{\partial U}{\partial r}, \frac{\partial U}{\partial \eta})$ dans l'espace $(L^2(\Omega_\varphi))^2$.

Comme $(L^2(\Omega_\varphi))^2$ s'injecte continûment dans $D'(\Omega_\varphi)$, donc la convergence est aussi valable dans $D'(\Omega_\varphi)$, et comme l'opérateur de dérivation est

continu, on a donc $(U_n, \frac{\partial U_n}{\partial r}, \frac{\partial U_n}{\partial \eta})$ converge vers $(U, \frac{\partial U}{\partial r}, \frac{\partial U}{\partial \eta})$ dans

$D'(\Omega_\varphi)$, et comme la suite (U_n) est dans $(E_0(\Omega_\varphi))^2$ donc les suites :

$(\frac{\partial^2 U_n}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 U_n}{\partial r \partial \eta}, \frac{\partial^2 U_n}{\partial \eta^2})$ sont dans $(L^2(\Omega_\varphi))^2$ qui est complet, d'où la

convergence de ces suites dans $(L^2(\Omega_\varphi))^2$, ce qui montre que l'espace $E(\Omega_\varphi)$ est fermé dans l'espace $H_0^1(\Omega_\varphi)$.

Et d'autre part l'injection de l'espace $E_0(\Omega_\varphi)$ dans $H_0^1(\Omega_\varphi)$ est compact, et par suite toutes les hypothèses du lemme 2.4.1, sont vérifiées.

Pour montrer que l'image de l'opérateur $r\Delta$ est fermée dans $L^2(\Omega_\varphi)$, et que son noyau est de dimension finie, on établira une inégalité de type :

Il existe une constante positive K telle que :

$$\| u \|_{E_0(\Omega_\varphi)} \leq K [\| r\Delta u \|_{L^2(\Omega_\varphi)} + \| u \|_{H_0^1(\Omega_\varphi)}] \quad (3.4)$$

Pour établir cette inégalité, on a besoin de la :

Proposition 3.1.1. Pour toute fonction u dans $L^2(\Omega_\varphi)$, on a :

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial r} \right\| \leq \left\| r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right\| \quad (3.5)$$

Les normes sans indices sont celles de $L^2(\Omega_\varphi)$

Preuve : On a : $\left\| \frac{\partial u}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right\|^2 \geq 0$ ce qui veut dire que :

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial r} \right\|^2 + \left\| r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right\|^2 + 2 \int_{\Omega_\varphi} r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{\partial u}{\partial r} dr d\theta \geq 0$$

Et comme on a : $2 \int_{\Omega_\varphi} r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{\partial u}{\partial r} dr d\theta = \int_{\Omega_\varphi} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 dr d\theta$

On intègre cette dernière intégrale par parties, et en tenant compte du fait que les fonctions sont à support compact dans $\overline{\Omega_\varphi}$, il vient :

$$2 \int_{\Omega_\varphi} r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{\partial u}{\partial r} dr d\theta = -2 \left\| \frac{\partial u}{\partial r} \right\|^2$$

Ce qui montre l'expression (3.5).

Montrons maintenant l'inégalité (3.4), pour ceci on commence par le calcul de $\|r\Delta u\|^2$.

On a donc : $\|r\Delta u\|^2 = \left\| \frac{\partial u}{\partial r} \right\|^2 + \left\| r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right\|^2 + \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right\|^2 + 2(I + J + K)$.

Où $I = \int_{\Omega_\varphi} r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{\partial u}{\partial r} dr d\theta$; $J = \int_{\Omega_\varphi} r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} dr d\theta$

$$K = \int_{\Omega_\varphi} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} dr d\theta$$

$$I = \int_{\Omega_\varphi} r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{\partial u}{\partial r} dr d\theta, J = \int_{\Omega_\varphi} r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} dr d\theta, K = \int_{\Omega_\varphi} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} dr d\theta$$

Le calcul de I par intégration par parties donne : $I = -\left\|\frac{\partial u}{\partial r}\right\|^2$

Par le même procédé, on calcule J et K , on trouve :

$$J + K = -\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}\right\|^2 \text{ D'où :}$$

$$\|r\Delta u\|^2 = \left\|\frac{\partial u}{\partial r}\right\|^2 + \left\|r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right\|^2 + \left\|\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right\|^2 - 2\left\|\frac{\partial u}{\partial r}\right\|^2 + 2\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}\right\|^2$$

$$\text{C'est-à-dire : } \|r\Delta u\|^2 = \left\|r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right\|^2 + \left\|\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right\|^2 - \left\|\frac{\partial u}{\partial r}\right\|^2 + 2\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}\right\|^2$$

$$\text{D'où on a : } \|r\Delta u\|_{L^2(\Omega_\varphi)}^2 + \|u\|_{H_0^1(\Omega_\varphi)}^2 = \|u\|_{E_0(\Omega_\varphi)}^2 - \left\|\frac{\partial u}{\partial r}\right\|^2 + 2\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}\right\|^2$$

On minore le second membre de l'égalité précédente, pour ceci on a besoin des deux propositions suivantes :

Proposition 3.1.2. Si u est dans $E(\Omega_\varphi)$, alors $\frac{\partial u}{\partial r}$ est dans $L^2(\Omega_\varphi)$.

Preuve : Voir par exemple [15] et [17].

Proposition 3.1.3. Il existe une constante K strictement positive et dépend de l'ouvert Ω_φ , telle que :

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial r}\right\|^2 \leq K \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}\right\|^2. \quad (3.6)$$

Preuve : Voir [22].

Par application des deux propositions, on aura l'inégalité (3.4) et par suite le problème (3.3) admet au moins une solution dans $E_0(\Omega_\varphi)$.

3.1.4. Etude de l'existence de la solution du problème antiplan avec la condition de Neumann homogène.

Pour étudier l'existence de la solution du problème (3.2) avec la condition de Neumann c'est-à-dire :

$$\begin{cases} r\Delta u = g & \text{dans } \Omega_\varphi \cap V_0 \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \quad (3.7)$$

On étudie ce problème dans l'espace $E(\Omega_\varphi)$, on applique aussi le lemme Peetre, c'est-à-dire le lemme 2.4.1, aux espaces $E(\Omega_\varphi)$, $L^2(\Omega_\varphi)$ et $H^1(\Omega_\varphi)$. Comme on a vu au paragraphe précédent, toutes les hypothèses de ce lemme sont vérifiées, donc pour montrer que l'image de l'opérateur $r\Delta$ est fermée dans $L^2(\Omega_\varphi)$, et que son noyau est de dimension finie, on doit établir une inégalité similaire à (3.4) qui est la suivante [15] :

$$\|u\|_{E(\Omega_\varphi)} \leq K [\|rLu\|_{L^2(\Omega_\varphi)} + \|u\|_{H^1(\Omega_\varphi)}] \quad (3.8)$$

Pour établir l'inégalité (3.8), on utilise la même démarche que celle utilisée pour montrer l'inégalité relative au problème avec la condition de Dirichlet c'est-à-dire l'inégalité (3.4). On a donc :

$$\|r\Delta u\|^2 = \left\| \frac{\partial u}{\partial r} \right\|^2 + \left\| r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right\|^2 + \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right\|^2 + 2(I + J + K)$$

Où I, J et K sont les intégrales du paragraphe précédent.

En intégrant par partie on obtient :

$$I = - \left\| \frac{\partial u}{\partial r} \right\|^2$$

Calculons maintenant J par une première intégration par rapport à r puis une seconde par rapport à θ , enfin en tenant compte du fait que les

fonctions sont à support compact et $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$ sur la frontière de Ω_φ , on trouve le résultat suivant :

$$J = -\int_{\Omega_\varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} dr d\theta + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \right\|^2$$

D'autre part :

$$K = \int_{\Omega_\varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} dr d\theta$$

Il est clair que :

$$J + K = \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \right\|^2$$

On remarque qu'on retrouve les mêmes résultats que ceux du paragraphe précédent relatif à la condition de Dirichlet.

En suivant les mêmes démarches que celles du paragraphe précédent on aboutit enfin à l'existence d'une constante K telle que l'inégalité (3.8) est vérifiée. Et par suite le problème (3.7) admet au moins une solution dans $E(\Omega_\varphi)$.

3.2 Etude de l'unicité de la solution du problème antiplan.

3.2.1. Etude de l'unicité de la solution du problème avec la condition de Dirichlet homogène.

Dire que la solution du problème (3.3) est unique dans l'espace $E_0(\Omega_\varphi)$, revient exactement à dire que le noyau de ce problème se réduit à $\{0\}$ dans $E_0(\Omega_\varphi)$, ce qui veut dire que l'opérateur $r\Delta$ est injectif sur $E_0(\Omega_\varphi)$.

On a vu d'après le lemme 2.4.1, que le noyau du problème (3.3) est de dimension finie.

Les éléments du noyau de (3.3) sont solution du problème suivant :

$$\begin{cases} r\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega_\phi \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_\phi \end{cases} \quad (3.9)$$

Et comme le facteur r ne s'annule pas à l'intérieur de Ω_ϕ , le problème (3.9) est donc équivalent au problème :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega_\phi \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_\phi \end{cases} \quad (3.10)$$

Pour résoudre ce problème il suffit de remarquer que :

$$\langle \Delta u, u \rangle = - \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 - \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|^2,$$

ou les crochets $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans L^2 , et les normes sont celles de L^2 .

Donc $\Delta u = 0$ implique que :

$$\langle \Delta u, u \rangle = - \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 - \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|^2 = 0.$$

Ainsi u est constante, et comme $u=0$ sur Γ_ϕ , alors $u = 0$ dans $H^1(\Omega_\phi)$; par suite $u = 0$ dans $E_0(\Omega_\phi)$.

D'où le noyau du problème (3.9) est réduit à $\{0\}$ dans $E_0(\Omega_\phi)$, et par suite la solution du problème (3.9) est unique dans $E_0(\Omega_\phi)$.

3.2.2. Etude de l'unicité de la solution du problème antiplan avec la condition de Neumann homogène.

Dans ce paragraphe on se propose de calculer le noyau du problème (3.7) et de voir s'il est réduit à $\{0\}$, pour affirmer que la solution du problème (3.7) est unique dans l'espace $E(\Omega_\phi)$.

On a vu d'après le lemme 2.4.1 que le noyau du problème (3.7) est de dimension finie.

Les éléments du noyau du problème (3.7) sont solution du problème suivant :

$$\begin{cases} r\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega_\phi \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \Gamma_\phi \end{cases} \quad (3.11)$$

Et comme le facteur r ne s'annule pas à l'intérieur de Ω_ϕ ,

le problème (3.11) est donc équivalent au problème :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega_\phi \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \Gamma_\phi \end{cases} \quad (3.12)$$

On remarque que les fonctions constantes sont solution du problème (3.12), ce qui veut dire que le noyau du problème (3.7) est au moins de dimension 1, ce qui veut dire que la solution du problème (3.7) n'est pas unique dans $E(\Omega_\phi)$.

3.3. Extension de la solution du problème plan et antiplan au polygone tout entier.

3.3.1. Etude de l'existence du problème antiplan sur le polygone

Dans ce paragraphe on se propose d'étendre l'étude des problèmes (3.2), et avec la condition de Dirichlet déjà faite dans un secteur plan infini d'ouverture φ au polygone tout entier Ω .

Pour étendre cette étude au polygone tout entier, on utilisera une partition de l'unité de celui-ci.[14].

Soit $(w_k), k=1, \dots, N$, une partition de l'unité de classe C^∞ du polygone Ω qui isole chacun de ses sommets S_k ; $k=1, \dots, N$; S_k étant le sommet de l'angle d'ouverture φ_k , $k=1, \dots, N$ on a :

$$v = \sum_{k=1}^N w_k v_k = \sum_{k=1}^N v_k \quad (3.13)$$

Et part suite le problème (3.2) défini dans Ω s'écrit :

$$\begin{cases} \lambda(r) \Delta \left(\sum_{k=1}^N v_k \right) = g \text{ dans } \Omega \\ B \left(\sum_{k=1}^N v_k \right) = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases} \quad (3.14)$$

Où l'opérateur différentiel B est d'ordre 0 ou 1, que représente la condition de Dirichlet ou celle de Neumann .

Aux voisinages des sommets, le problème (3.2) est équivalent au problème (3.3), donc aux voisinages des sommets , le problème (3.14) ou (3.3) , s'écrivent :

$$\begin{cases} r \Delta \left(\sum_{k=1}^N v_k \right) = g \text{ dans } \bigcup_{k=1}^N (\Omega_{\varphi_k} \cap V(S_k)) \\ B \left(\sum_{k=1}^N v_k \right) = 0 \text{ sur } \bigcup_{k=1}^N \Gamma_{\varphi_k} \end{cases} \quad (3.15)$$

En isolant chaque sommet $S_k, k = 1, \dots, N$, comme suit

$$\begin{cases} r \Delta v_k = g \text{ dans } \Omega_{\varphi_k} \\ B v_k = 0 \text{ sur } \Gamma_{\varphi_k} \end{cases} \quad (3.16)$$

Les fonctions sont à support compacts , en chaque sommet S_k , la fonction de troncature w_k est définie de telle sorte qu'au voisinage du sommet S_k , elle vaut 1 et nulle ailleurs , c'est-à-dire que pour tout $k, k = 1, \dots, N$ on a :

$$w_k = \begin{cases} 1 \text{ dans } V(S_k) \\ 0 \text{ dans } \Omega \setminus V(S_k) \end{cases} \quad (3.17)$$

Où $V(S_k)$ est un voisinage du sommet S_k ; $k = 1, \dots, N$, avec N est le nombre de sommet du polygone Ω .

Soit :

$$X = 1_{\Omega} - \sum_{k=1}^N w_k \quad (3.18)$$

X est une fonction de troncature.

Soit : $\psi = Xv$ (3.19) est une fonction définie dans un ouvert régulier $O = O_1 \cup O_2$ (qui est en fait le polygone privé des voisinages de ses sommets).

Posons :

$$\psi = \begin{cases} \psi_1 & \text{dans } O_1 = [\Omega \setminus V(S_K)] \cap \{r > 0 / r_1 < r \leq r_2\} \\ \psi_2 & \text{dans } O_2 = [\Omega \setminus V(S_K)] \cap \{r > 0 / r > r_2\} \end{cases} \quad (3.20)$$

Où r_1 et r_2 sont ceux définis dans (3.22), on a donc :

$$\begin{cases} \delta(r)\Delta\psi_1 = g & \text{dans } O_1 \\ B\psi_1 = 0 & \text{sur } \Gamma_{O_1} \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\text{Et} \quad \begin{cases} \Delta\psi_2 = f & \text{dans } O_2 \\ B\psi_2 = 0 & \text{sur } \Gamma_{O_2} \end{cases} \quad (3.22)$$

Les problèmes (3.21), (3.22) sont définis dans des domaines réguliers et de plus pour le problème (3.21) on a : $f = g$, car la fonction poids définie par (2.12), vaut 1 dans O_2 .

Le problème (3.22) est un problème auto-adjoint car l'opérateur Δ l'est.

Comme les problèmes (3.21), (3.22) sont définis dans des domaines réguliers, leur étude est totalement classique, et ces résultats sont connus, donc les inégalités *à priori* sont vérifiées, d'où il existe deux constantes K_1 et K_2 sont positives, telles que les inégalités suivantes :

$$\|\psi_1\|_{A(O_1)} \leq K_1 \left\{ \|\delta(r)\Delta\psi_1\|_{L^2(O_1)} + \|\psi_1\|_{B(O_1)} \right\} \quad (3.23)$$

et

$$\|\psi_2\|_{A(O_2)} \leq K_2 \left\{ \|\Delta\psi_2\|_{L^2(O_2)} + \|\psi_2\|_{B(O_2)} \right\} \quad (3.24)$$

Sont vérifiées, où les espaces A et B sont définis par :

$$A = \begin{cases} E_0 & (*) \\ E & (**) \end{cases} \text{ et } B = \begin{cases} H_0^1 & (*) \\ H^1 & (**) \end{cases}$$

Où : (*) pour la condition de Dirichlet homogène, et (**) pour la condition de Neumann homogène.

Aux voisinages de chaque sommet S_k ; $k = 1, \dots, N$ du polygone , il existent des constantes $M_k, k = 1, \dots, N$, strictement positives , telles que les inégalités

$$\|u\|_{A(\Omega_{\varphi_k})} \leq M_k \left\{ \|r\Delta u\|_{L^2(\Omega_{\varphi_k})} + \|u\|_{B(\Omega_{\varphi_k})} \right\} \quad (3.25)$$

Sont vérifiées.

Où Ω_{φ_k} est le secteur plan d'ouverture φ_k .

En ajoutant les inégalités (3.25), (la sommation sur k), et les inégalités (3.23) et (3.24), relative à l'ouvert O , et en prenant le maximum de toute les constantes , on obtient une inégalité valable sur tout polygone Ω , elle est de type :

$$\|v\|_{A(\Omega)} \leq M \left\{ \|\lambda(r)\Delta v\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{B(\Omega)} \right\} \quad (3.26)$$

Avec
$$M = \max_k \{M_k, K_1, K_2\}.$$

3.3.2. Etude de l'unicité de la solution du problème antiplan sur le polygone.

Dans le chapitre 2, on a étudié l'unicité de la solution du problème (3.2) avec la solution de Dirichlet puis celle de Neumann et ceci dans un secteur plan infini Ω_φ , en fait cette étude n'a servi que de modèle , elle est valable sur n'importe quel secteur plan Ω_{φ_k} , d'ouverture un des angles du polygone , notons par Ω_{φ_k} cet angle.

Si N est le nombre des angles de Ω , l'étude faite précédemment est valable dans chaque Ω_{φ_k} , $k = 1, \dots, N$.

Par translation et par rotation on peut toujours ramener le sommet de Ω_{φ_k} , $k = 1, \dots, N$, à l'origine et ceci en coordonnées locales.

En utilisant la partition de l'unité (w_k) , $k = 1, \dots, N$, du polygone Ω définie au début du paragraphe précédent, on aura le résultat de l'étude faite précédemment est valable dans le polygone.

On a par exemple si u_k est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} r\Delta u_k = g & \text{dans } \Omega_{\varphi_k} \cap V(S)_k \\ u_k = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varphi_k} \end{cases}$$

Où $V(S_k)$ est un voisinage du sommet S_k de l'angle φ_k .

On a $u = \sum_{k=1}^N w_k u_k = \sum_{k=1}^N u_k$ est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} r\Delta u = g & \text{dans } \bigcup_{k=1}^N (\Omega_{\varphi_k} \cap V(S_k)) \\ u = 0 & \text{sur } \bigcup_{k=1}^N \Gamma_{\varphi_k} \end{cases}$$

Si v est solution du problème

$$\begin{cases} r\Delta u = g & \text{dans } T = \Omega \setminus \left[\bigcup_{k=1}^N (\Omega_{\varphi_k} \cap V(S_k)) \right] \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_T \end{cases}$$

Où T n'est autre que le polygone privé des voisinages de ces sommets, c'est-à-dire que T est un domaine régulier, l'étude dedans est totalement classique. D'après (2.12) de la fonction poids, la fonction v est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta v = g & \text{dans } O_2 \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_{O_2} \end{cases}$$

Où O_2 est un sous-ensemble de T , il est défini dans le paragraphe précédent.

On aura donc la fonction W définie par :

$$W = \begin{cases} u = \sum_{k=1}^N w_k u = \sum_{k=1}^N u_k & \text{dans } \bigcup_{k=1}^N (\Omega_{\phi_k} \cap V(S_k)) \\ v & \text{dans } O = \Omega \setminus \left[\bigcup_{k=1}^N (\Omega_{\phi_k} \cap V(S_k)) \right] \end{cases}$$

Est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \lambda(\rho)\Delta W = g & \text{dans } \Omega \\ W = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Définie dans tout le polygone.

3.3.3. Etude de l'existence et de l'unicité de la solution du problème de Lamé bidimensionnel au polygone tout entier.

La méthode ici est exactement la même que celle utilisée dans les deux paragraphes précédents, on suivra exactement les mêmes étapes pour le problème (2.21), le seul changement est de remplacer l'opérateur $r\Delta$ par l'opérateur rL , où L est l'opérateur de Lamé bidimensionnel.

CONCLUSION

L'objectif de ce mémoire est l'étude d'un problème d'élasticité tridimensionnelle gouverné par un opérateur de Lamé dans un domaine élastique homogène et isotrope à frontière présentant des points anguleux. Dans cette étude on a utilisé la méthode de décomposition, et on a trouvé que le problème se décompose en deux problèmes l'un des deux est un problème de Lamé bidimensionnel et l'autre est un problème antiplan (cisaillement).

On a établi un résultat d'existence et d'unicité pour chaque problème (problème plan et antiplan) et on a montré que les fonctions poids jouent un rôle très important dans cette étude, elles masquent les singularités, et allègent les calculs.

On a obtenu nos résultats dans un espace fonctionnel avec poids qui est plus riche que les espaces classiques, cette étude est originale et de plus elle recouvre le cas classique.

Les extensions prévues de notre étude peuvent être exploitées dans les domaines suivants :

- Domaine de mécanique de rupture fragile.
- Domaine de thermoélectricité tridimensionnel.
- Domaine des équations de NAVIER-STOKES en mécanique des Fluides.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **ALLAIRE. G.** Analyse numérique et optimisation, Ed de l'école Polytechnique, Paris (2006).
- [2] **CIARLET. P. G.** Elasticité tridimensionnelle, Masson. Paris. (1986).
- [3] **GRISVARD. P.** Singularities in boundary value problem. Masson. Paris. (1992).
- [4] **JIENFENG Ma, X.J. Xin.** Elastoplastic meshless integral method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 197, Issues 51-52, 15 October 2008, Pages 4774-4788.
- [5] **KRASNOV. M, KISSELEV. A. et MAKARENKO. G.** Equations intégrales. Ed Mir. Moscou. (1977).
- [6] **LIONS J.L. et MAGENES. E.** Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol I. Dunod, 1968.
- [7] **LIONS.J.L et BAIOCCHI.C.** Boundary value problems for partial differential equations and applications. Masson, Paris. (1993).
- [8] **LOFFICIAL. M et TANRE. D.** Intégrales curvilignes et de surfaces. Ellipses. France. (2006).
- [9] **LOZI. R.** Résultats numériques de la régularité du problème de Stokes et du Laplacien itéré dans un polygone, Journal of Applied Math. R.A.I.R.O. Nairobi. Vol 12, P 267. (1978).
- [10] **MILAMI. R, QUATERONI. A, GIANLUIGI. R,** Reduced basis method for linear elasticity problems with many parameters. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 197, Issues 51-52, 15 October 2008, Pages 4812-4829.
- [11] **MEROUANI. B.** Solutions singulières du système de l'élasticité dans un polygone pour différentes conditions aux limites. Maghreb math. Rev. Vol 5, Nos 1&2, PP 95-112. (1996).

- [12] **NGUYEN N.C.** A posteriori error estimation and basis adaptivity for reduced-basis approximation of nonaffine-parametrized linear elliptic partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, Volume 227, Issue 2, 10 December 2007, Pages 983-1006.
- [13] **NOBITO. Y** and **GENMA. K.** 3n error estimation of finite element approximations to the elliptic equations in nonconvex polygonal domains. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Volume 199, Issue 2, 15 February 2007, Pages 286-296.
- [14] **PARTON. V.** et **PERLINE. P.** Méthodes de la théorie mathématique de l'élasticité-Tome1. Ed Mir. Moscou. (1984).
- [15] **REGHIOUA. M .** Etude du bilaplacien dans un domaine non régulier. Thèse de Doctorat d'état Université de Constantine .Février 2006.
- [16] **SAID. M. S.** An elliptic boundary problem governed by a Laplacian operator perturbed by a spectral parameter and affected by a weight function in a plane polygon .*Applied mathematical science* vol4 2010 n° 15 pp 745-752 .
- [17] **SAID. M. S.** Behaviour of the singular solutions of the problem controlled by the adjoint of the Laplace operator affected by a weight function near the top of plane sector. *Applied mathematical science* vol4 2010 n° 15 pp 753-759.
- [18] **VLADIMIR. D.** et **PROUDNIKOV. A.** Transformations intégrales et calcul opérationnel. Ed. Mir. Moscou. 1982.

ملخص المذكرة:

في هذه المذكرة تطرقنا إلى دراسة مسألة المرونة في الفضاء المعتاد ذي ثلاثة أبعاد في نطاق يحوي نقط زاوية بطريقة تجزئة المسألة الابتدائية إلى مسألتين إحداها جملة لامي المستوية و الأخرى معادلة لابلاس المعرفة على مستوي عمودي على الحرف وعند دراستنا للوجود و الوحدانية للمسألتين السابقتين المرفقة بالشروط الحدية لـ: ديريشلي و نومان المتجانستين وذلك باستعمال دوال الوزن في فضاءات دالية للوزن و التي تلعب دورا هاما في امتصاص النقاط الشاذة المتواجدة في جوار رؤوس المضلع توصلنا للوجود و الوحدانية بسهولة ثم عممنا النتائج المتحصل عليها على المضلع بأكمله و ذلك باستعمال مبرهنة تجزئة الوحدة.

الكلمات المفتاحية: مسألة لامي المرونية- دوال الوزن- فضاءات صوبولاف المزودة بوزن.

Abstract :

In this work we have studied three dimensional elasticity problems on domain with singular points by using the decomposition of the initial problem on to two problems on of them is a two dimensional Lamé system and the other is the Laplace equation posed on the antiplane . We remarked that the use of weighted suitable functions can simplifies the difficulties of the study of singularities situated on the polygon we have find that the existence and the uniqueness can be proved easily and we have generalised this results for the hole polygon by using the decomposition of the unity theorem.

Key-words: Elastic Lamé problem, weighted functions, weighted Sobolev spaces.