

## Calculation of Electromagnetic Energy radiated by Electric Spark

Salima GUERRICHA\*, Smail CHIHI and Hacem BEN ALI

Laboratoire LRPPS, Département de Physique, Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière, Université Kasdi merbah Ouargla, Ouargla 30000, Algérie

\*Email: [guerricha.salima@univ-ouargla.dz](mailto:guerricha.salima@univ-ouargla.dz) , [gusalima@yahoo.com](mailto:gusalima@yahoo.com)

### حساب الطاقة الكهرومغناطيسية المُشعَّة من شرارة كهربائية

سليمة قريشة، إسماعيل شيحي و حسن بن علي

مخبر فيزياء الإشعاع و البلازما و فيزياء السطوح (LRPPS)، قسم الفيزياء، كلية الرياضيات و علوم المادة، جامعة ورقلة

**مختصر:** لقد حُسبت الطاقة المفتقدة أثناء توصيل كُرَيْتَيْنِ ناقلتين ببعضهما، باعتبارها طاقةً كهروستاتيكيةً مخزنَةً في الشحنات، ثم باعتبارها إشعاعاً كهرومغناطيسياً مصاحباً للشرارة الكهربائية التي تحدث عند توصيل الكرتين ببعضهما. لقد استخدمنا نموذجاً بسيطاً مؤلفاً من كُرَيْتَيْنِ ناقلتين، يحدث بينهما تفرغ للشحنة عبر سلك ناقل يربط بينهما. حسبنا طاقة الإشعاع و الطاقة المتبددة بفعل جول الحراري و الطاقة الكهروستاتيكية المتبقية في الجملة. كان مجموع هذه الطاقات حوالي 77,44% من قيمة الطاقة الابتدائية للجملة قبل التوصيل، في حين كان ينبغي أن تكون 100%. أرجعنا ذلك إلى الأخطاء الناجمة عن التقريبات الحسابية و النموذج الذي قد يكون غير دقيق. لقد أشرنا كذلك إلى عدم احتساب الطاقة الصوتية المصاحبة لتفريغ الشحنة.

**كلمات دليلية:** الإشعاع الكهرومغناطيسي، طاقة الإشعاع، الكمونات المتأخرة، حقول الإشعاع، الطاقة الكهروستاتيكية، طاقة جول

**Abstract:** The missed energy during connecting two conducting pellets has been calculated. This energy has been considered as an electrostatic energy stored in charges, an as electromagnetic radiation accompanied by the *electric spark*, and as thermal energy of Joule effect. A simple model consists of two conducting pellets has been used. Discharge current is flowing through filiform wire between the two pellets. The radiation energy, the thermal energy of Joule effect and the electrostatic energy remaining in system, have been calculated. The summation of these energies was 77,44 % from the initial energy of the system, while it should be 100%. This disagreement has been attributed to errors caused by the approximations and the computational model that might be inaccurate. The lack of acoustic energy associated to the discharge has also been pointed to.

**Key words:** electromagnetic radiation, energy of radiation, retarded potentiels, radiation fields, electrostatic energy, Joule energy

#### 1. مقدمة:

من المعلوم جيداً أن كلَّ ناقل كهربائي يشكل منطقةً تساوي كُمون [1]، فإذا ما وُصِّل ناقلان (أو أكثر) ببعضهما فإنهما سيتبادلان الشحنة الكهربائية فيما بينهما، سعياً إلى الاتزان الكهروستاتيكي، و ذلك بأن يصبح الناقلان ناقلاً واحداً، يمتلك كلَّ خصائص النواقل. يكون تبادل الشحنة هذا مصحوباً بفقد طاقتي [2]، يتغير مقداره من جملة إلى أخرى تبعاً لأشكال النواقل و وضعياتها بالنسبة لبعضها البعض.

حيث أن الشحنة الكهربائية والطاقة مقداران محفوظان، لا يمكنهما الاضمحلال، فهما ينتقلان من جسم إلى آخر، أو من جملة إلى أخرى، أو يتحولان من شكل إلى آخر، فإنه ينبغي تبرير الفقد الطاقي المصاحب لعملية توصيل النواقل ببعضها البعض.

لا يمكن تفسير الفقد المذكور بفعل جول الحراري فقط [3]؛ إذ أن النواقل عُوملت باعتبارها مثالية تقريباً، فلا توجد ضياعات حرارية كبيرة. ولما كان من المؤلفون جداً أنه عند توصيل ناقل بآخر تنشأ شرارة ضوئية، يمكن رؤيتها بالعين المجردة، و تحدث فرقتات، يمكن سماعها بالأذن البشرية، فإننا سنقوم في هذه الورقة بحساب طاقة هذه الشرارة باعتبارها إشعاعاً كهرومغناطيسياً منتشراً في الفضاء المحيط بجملة النواقل، و ممتداً إلى المالا نهاية.

في سبيل ذلك سنقترح نموذجاً لجملة ناقلين كرويين متماثلين، يتبادلان الشحنة فيما بينهما، ثم اقترح توزيع الشحنات و التيارات المكافئة لهذه العملية، و من ثمَّ حساب الكمونات الكهرومغناطيسية المتأخرة، ثم اشتقاق الحقول الكهرومغناطيسية، ثم استنباط متجه بوينتنغ لها، و هو يمثل تيار الطاقة الكهرومغناطيسية المتدفقة مع الموجة لوحدة الأزمنة و لوحدة السطوح المتعامدة مع اتجاه انتشار الموجة الكهرومغناطيسية. لقد استخدمنا نتيجة حساب سابق [4]، يخص منبعاً كيفياً، فطبّقناه على حالتنا الخاصة.

## 2. طاقة جملة كرتيين متماثلتين، قبل التوصيل و بعده:

باعتبار كرتين معدنيتين، تحمل الأولى شحنة ابتدائية  $q_0$ ، و الأخرى غير مشحونة، فإن الطاقة الابتدائية للكرتية الأولى قبل

$$U_0 = q_0 \cdot \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q_0^2}{4\pi\epsilon_0 R} \dots\dots\dots(1) \quad \text{التوصيل هي [5]:}$$

أما طاقة الكرتية الثانية فمعدومة. بعد تبادل الكرتين للشحنات بينهما يحصل اتزان كهروستاتيكي جديد، يقتضي أن يكون:

$$\left. \begin{array}{l} q_1 + q_2 = q_0 \\ V_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R} = V_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} q_1 = q_2 = \frac{1}{2} q_0 \dots\dots\dots(2) \end{array} \right.$$

و تصبح طاقة كل كرتية عند التوازن الكهروستاتيكي الجديد:

$$U_1 = U_2 = \frac{q_1^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q_2^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 4R} q_0^2 = \frac{1}{4} U_0 \dots\dots\dots(3)$$

أما طاقة التأثير المتبادل بين الكرتين إذا ما اعتبرنا نقطيتين فستكون [5]:

$$U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{q_0^2}{16\pi\epsilon_0 a} \dots\dots\dots(4)$$

نشير إلى أن هذا المقدار يكون أقل بكثير من طاقة أي من الكرتين إذا ما كان البعد بينهما كبيراً مقارنةً بأبعاد الكرتين ذاتيهما؛  $a \gg R$ .

$$U = U_1 + U_2 + U_{12} = \frac{1}{4} U_0 + \frac{1}{4} U_0 + U_{12} = \frac{1}{2} U_0 + U_{12} \dots\dots\dots(5) \quad \text{إذاً طاقة الجملة ستصبح:}$$

و يكون الفرق في طاقتي الجملة، بعد التوصيل و قبله:

$$\Delta U = U_0 - U = \frac{1}{2} U_0 - U_{12} \dots\dots\dots(6)$$

## 3. حساب طاقة الإشعاع الكهرومغناطيسي من منبع كيفي:

تنتشر طاقة الإشعاع الكهرومغناطيسي بانتشار الموجة ذاتها، و يعرف شعاع  $\vec{S}$  يُدعى شعاع بوينتنغ، يمثل الطاقة المنتشرة في وحدة الأزمنة عبر وحدة السطوح المتعامدة مع اتجاه انتشار الموجة، و يُعطى بـ [6]:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \dots\dots\dots(7)$$

لذا فإنه لتقدير طاقة الإشعاع الكهرومغناطيسي ينبغي أولاً حساب الحقل الكهربائي و الحقل المغناطيسي للموجة الكهرومغناطيسية.

**1.3. حساب حقول الإشعاع [4]:**

إن إيجاد الحقول الكهرومغناطيسية الناشئة عن توزيعات شحنة و تيار متغيرة مع الزمن يبدأ بإيجاد الكمونات، و التي هي حلول

$$\square^2 \psi(\vec{r}, t) = -f(\vec{r}, t) \dots\dots\dots(8)$$

للمعادلة العامة:

حيث:  $\square^2 \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ ، و يدعى مؤثر دالامبير، و  $c$  سرعة الضوء في الفراغ، و  $\psi(\vec{r}, t)$  الكمون العام، و هو يمثل

الكمون السلمي  $V$  أو إحدى مركبات الكمون الشعاعي  $\vec{A}$ ، أما  $f(\vec{r}, t)$  فهي تمثل منابع الحقول، الكثافة الحجمية للشحنة  $\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0}$ ، أو الكثافة الحجمية للتيار  $\mu_0 \vec{J}(\vec{r}, t)$ .

إذا كنا نعرف سلوك المنابع مع الزمن بشكل كافٍ، إذًا سيكون تحويل فورييه للمنابع العام  $f(\vec{r}, t)$ :

$$f_\omega(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r}, t) e^{-i\omega t} dt \dots\dots\dots(10) \quad \text{حيث} \quad f(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega \dots\dots\dots(9)$$

و كذلك الأمر بالنسبة للكمون العام:

$$\psi_\omega(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\vec{r}, t) e^{-i\omega t} dt \dots\dots\dots(12) \quad \text{حيث} \quad \psi(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega \dots\dots\dots(11)$$

بإدخال تمثيلات فورييه (9) و (11) في المعادلة (8)، و استخدام علاقة تبدد الفراغ للأمواج الكهرومغناطيسية  $\omega = ck$  يكون:

$$\nabla^2 \psi_\omega(\vec{r}) + k^2 \psi_\omega(\vec{r}) = -f_\omega(\vec{r}) \dots\dots\dots(13)$$

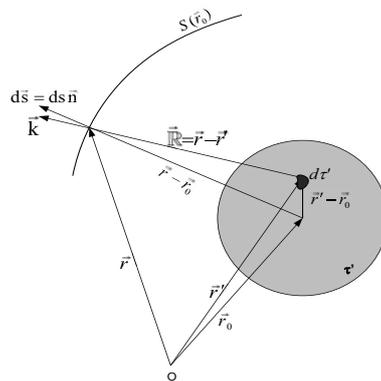
وفقاً للشكل (1) يمكن كتابة حلول المعادلة (8) كما يلي:

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau'} \frac{\rho(\vec{r}', t'_{ret})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau' \dots\dots\dots(14)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\vec{J}(\vec{r}', t'_{ret})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau' \dots\dots\dots(15)$$

$$\rho(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega \dots\dots\dots(16)$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{J}_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega \dots\dots\dots(17)$$



الشكل (1): تمثيل الجملة و أشعة المواضع

و تكون الكمونات المتأخرة:

$$V_\omega(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}} \rho_\omega(\vec{r}') \frac{e^{-ikR}}{R} d\omega \dots\dots\dots(19) \quad \text{حيث} \quad V(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega \dots\dots\dots(18)$$

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}} \vec{J}_\omega(\vec{r}') \frac{e^{ikR}}{R} d\omega \dots\dots\dots(21) \quad \text{حيث} \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{A}_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega \dots\dots\dots(20)$$

و  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ ، و في النهاية تُستخدم المقادير الحقيقية لهذه الكميات.

يكون حقل الإشعاع الكهرومغناطيسي مهيمًا عند المسافات البعيدة، و هو المسؤول عن نقل الطاقة بعيدا عن المنبع:

$$\vec{B}^{rad}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t'_{ret}) \times \vec{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2} d\tau' \dots\dots(22)$$

$$\vec{E}^{rad}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{[\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t'_{ret}) \times \vec{\mathbb{R}}] \times \vec{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^3} d\tau' \dots(23)$$

$$t'_{ret} = t - \frac{\mathbb{R}}{c}, \dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_{ret}) = \left( \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \right)_{t=t_{ret}} \quad \text{حيث:}$$

باستخدام تحويل فورييه يمكن كتابة المعادلتين (22) و (23) على النحو:

$$\vec{B}^{rad}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{B}_{\omega}^{rad}(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{\mu_0}{4\pi c} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{J}_{\omega}(\vec{r}') \times \vec{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2} d\tau' \dots\dots(24)$$

$$\vec{E}^{rad}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_{\omega}^{rad}(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{[\vec{J}_{\omega}(\vec{r}') \times \vec{\mathbb{R}}] \times \vec{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^3} d\tau' \dots\dots(25)$$

بدلا من دراسة الحقول في مجال الزمن  $t$ ، يمكن غالبا إنجاز تحليل طيفي في مجال الترددات  $\omega$ ، و دراسة كل مركبة فورييه مستقلة.

تراكب كل هذه المركبات و العودة إلى مجال الزمن يقودنا إلى الحل التام.

$$\vec{B}_{\omega}^{rad}(\vec{r}) = -\frac{i\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{J}_{\omega}(\vec{r}') \times \vec{k}}{\mathbb{R}} e^{ik\mathbb{R}} d\tau' \dots\dots(26)$$

$$\vec{E}_{\omega}^{rad}(\vec{r}) = -\frac{i}{4\pi\epsilon_0 c} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{[\vec{J}_{\omega}(\vec{r}') \times \vec{k}] \times \vec{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2} e^{ik\mathbb{R}} d\tau' \dots\dots\dots(27)$$

$$\text{حيث: } \vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{\mathbb{R}}$$

بالاستعانة بالمخطط الموضح بالشكل (1) فإنه إذا كان المنبع  $d\tau'$  قريبا من الموضع  $\vec{r}_0$  داخل الحجم  $\tau'$ ، و كان  $|\vec{r}' - \vec{r}_0| \ll |\vec{r} - \vec{r}'|$  و كان لسطح التكامل  $S(\vec{r}_0)$  المتمركز عند  $\vec{r}_0$  نصف قطر كبير كفاية؛ أي  $R_0 = |\vec{r} - \vec{r}_0| \gg \max(|\vec{r}' - \vec{r}_0|)$ ، فإنه يمكننا إجراء التقريب التالي:

$$\begin{aligned} k\mathbb{R} &\equiv \vec{k} \cdot \vec{\mathbb{R}} = \vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') = \vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}' - \vec{r}_0 + \vec{r}_0) = \vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) - \vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_0) \\ &\cong k|\vec{r} - \vec{r}_0| - \vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_0) = kR_0 - \vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_0) \dots\dots\dots(28) \end{aligned}$$

ذلك أنه عند مسافات بعيدة جدا عن المنبع يمكن اعتبار الشعاعين  $\vec{n} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$  و  $\vec{u}_k = \frac{\vec{k}}{k}$  متوازيين، لذا يمكننا تقريب:

$$\frac{\vec{u}_k \cdot d\vec{s}}{R_0^2} \cong \frac{ds \vec{u}_k \cdot \vec{n}}{R_0^2} = d\Omega \dots\dots\dots(29)$$

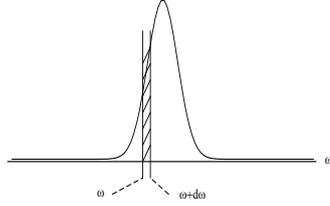
كما أن:  $R_0 \cong \mathbb{R}$ ، و المعادلتان (26) و (27) تصبحان:

$$\vec{B}_{\omega}^{rad}(\vec{r}) \cong -i \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \int_{\mathbb{R}^3} [\vec{J}_{\omega}(\vec{r}') \times \vec{k}] e^{-ik \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_0)} d\tau' \dots\dots\dots(30)$$

$$\vec{E}_{\omega}^{rad}(\vec{r}) \cong i \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \frac{\vec{R}_0}{R_0} \times \int_{\mathbb{R}^3} [\vec{J}_{\omega}(\vec{r}') \times \vec{k}] e^{-ik \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_0)} d\tau' \dots\dots\dots(31)$$

2.3. الطاقة المشعّة [4، 7]:

تكون الطاقة محمولّة بحقلّي الإشعاع  $\vec{E}_\omega^{\text{rad}}(r)$  و  $\vec{B}_\omega^{\text{rad}}(r)$ . سنعالج إشارات ذات مُدَد حياة محدودة، و بالتالي شريطا ذا عرض محدود حول الإشارات الوحيدة اللون، الشكل (2).



الشكل (2): الشريط ذو العرض المحدود من طيف الإشعاع

إذا كان المنبع وحيد اللون تماما فإنه يمكننا الحصول على متوسط زمني للاستطاعة المشعّة مباشرةً بإجراء متوسط على دور واحد:

$$\begin{aligned} \langle \vec{S} \rangle &= \frac{1}{\mu_0} \langle \vec{E} \times \vec{B} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \{ \vec{E} \times \vec{B}^* \} = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \{ \vec{E}_\omega e^{-i\omega t} \times (\vec{B}_\omega e^{-i\omega t})^* \} \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \{ \vec{E}_\omega \times \vec{B}_\omega^* e^{-i\omega t} e^{i\omega t} \} = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \{ \vec{E}_\omega \times \vec{B}_\omega^* \} \dots \dots \dots (32) \end{aligned}$$

باستخدام حقلّي الإشعاع (30) و (31)، و كذا المعاوقة المميزة للفراغ  $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \cong 377 \text{ Ohms}$  نحصل على:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{32\pi^2} Z_0 \frac{1}{R_0^2} \left| \int_{\tau'} [\vec{J}_\omega(\vec{r}') \times \vec{k}] e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_0)} d\tau' \right|^2 \frac{\vec{R}_0}{R_0} \dots \dots \dots (33)$$

و تكون الاستطاعة المشعّة لوحدة الزوايا المحسّمة:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{32\pi^2} Z_0 \left| \int_{\tau'} [\vec{J}_\omega(\vec{r}') \times \vec{k}] e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_0)} d\tau' \right|^2 \dots \dots \dots (34)$$

و لإيجاد الطاقة الكلية المشعّة نحتاج المكاملة على كل عرض الشريط.

الطاقة الكلية العابرة لوحدة السطوح هي التكامل الزمني لمتجه بوينتنگ:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{S}(t) dt &= \frac{1}{\mu_0} \int_{-\infty}^{+\infty} (\vec{E} \times \vec{B}) dt = \frac{1}{\mu_0} \int d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \int_{-\infty}^{+\infty} (\vec{E}_\omega \times \vec{B}_{\omega'}) e^{-i(\omega+\omega')t} dt \\ &= \frac{2\pi}{\mu_0} \int_0^{+\infty} (\vec{E}_\omega \times \vec{B}_\omega^* + \vec{E}_\omega^* \times \vec{B}_\omega) d\omega \dots \dots \dots (35) \end{aligned}$$

بإدخال تحويلات فورييه لحقول الإشعاع فإن:

$$U_{ray} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \oint_S d\vec{s} \cdot \int_0^{+\infty} \left| \frac{\vec{J}_\omega(\vec{r}') \times \vec{k} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_0)}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right|^2 d\tau' d\omega \vec{u}_k = \int_0^{+\infty} U_\omega d\omega \dots \dots \dots (36)$$

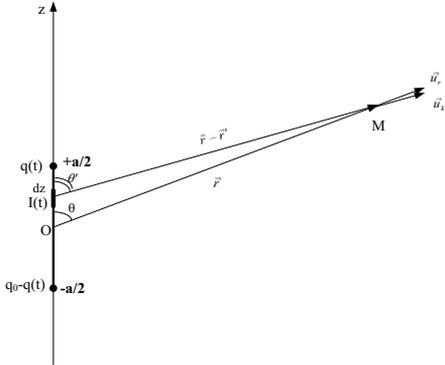
حيث تُدعى  $U_\omega$  كثافة الطاقة الطيفية، إذًا:

$$\frac{dU_\omega}{d\Omega} d\omega \cong \frac{1}{4\pi} Z_0 \left| \int_{\tau'} [\vec{J}_\omega(\vec{r}') \times \vec{k}] e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_0)} d\tau' \right|^2 d\omega \dots \dots \dots (37)$$

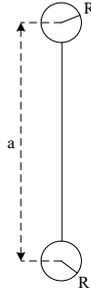
و هو -عند مسافات بعيدة- تقريبٌ جيد للطاقة المشعّة لوحدة الزوايا المحسّمة  $d\Omega$  في عرض شريط الترددات  $d\omega$ .

4. حساب كمية الطاقة المشعة من جملة كرتين متبادلان الشحنة فيما بينهما:

باعتبار جملة الكرتين الموصوفة كما بالشكل (3)، فإنه يمكننا تمثيلها بشحنتين نقطيتين، البعد بينهما  $a$ ، موصولتين ببعضهما بسلك رقيق جدا يسري فيه تيار كهربائي من الكرية السفلى إلى الكرية العليا، الشكل (4). عند لحظة كيفية  $t$  تكون الشحنة السفلى  $q(t)$  و الشحنة العليا  $q_0 - q(t)$ ، حيث:  $q_0$  هي الشحنة الابتدائية للكرية السفلى قبل التوصيل.



الشكل (4): تمثيل شحنتي الكرتين و التيار بينهما



الشكل (3): نموذج جملة الكرتين

سنحسب الآن الطاقة المشعة لوحدة الزوايا المجسمة، مستخدمين في ذلك المعادلة (37)، لذا ينبغي أولاً إيجاد عبارة  $\vec{J}_\omega(\vec{r}') d\tau'$ :

$$\vec{J}_\omega(\vec{r}') d\tau' \equiv I_\omega(\vec{r}') d\vec{\ell}' = I_\omega(\vec{r}') dz \vec{u}_z \dots\dots\dots(38)$$

$$I = \frac{dq(t)}{dt} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \dots\dots\dots(39) \quad \text{و حيث أن تيارنا تياراً تفرغ، فإنه يمكن كتابته على النحو [5]:}$$

حيث يُدعى  $\tau$  زمن الاسترخاء، و سنناقشه لاحقاً.

$$e^{-a|x|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}}{a^2 + \gamma^2} e^{-i\gamma x} d\gamma \dots\dots\dots(40) \quad \text{تحويل فورييه للدالة الأسية يُكتب كما يلي [8]:}$$

$$I_0 e^{-t/\tau} = \frac{I_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{1}{\tau} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} e^{-i\omega t}}{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + \omega^2} d\omega \dots\dots\dots(41) \quad \text{لذا يمكننا كتابة:}$$

$$\text{مثلاً أن } \vec{J}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{J}_\omega(\vec{r}') e^{-i\omega t} d\omega \quad \text{يمكن كتابة: } I = \int_{-\infty}^{+\infty} I_\omega(\vec{r}') e^{-i\omega t} d\omega \text{، حيث:}$$

$$I_\omega(\vec{r}') \equiv \frac{I_0}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\frac{1}{\tau} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}}{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + \omega^2} = \frac{I_0}{\tau \pi} \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + \omega^2\right]} \dots\dots\dots(42)$$

$$\frac{dU_\omega}{d\Omega} \cong \frac{1}{4\pi} Z_0 \left| \int_{\tau'} [\vec{J}_\omega(\vec{r}') \times \vec{k}] e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_0)} d\tau' \right|^2 \dots\dots\dots(43) \quad \text{إذاً الطاقة المشعة لوحدة الزوايا المجسمة هي:}$$

$$\text{لذلك سنبدأ أولاً بتقدير التكامل: } \text{Integ} \equiv \int_{\tau'} [\vec{J}_\omega(\vec{r}') \times \vec{k}] e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_0)} d\tau'$$

عند مسافات بعيدة يكون:  $\vec{u}_k \cong \vec{u}_r$ ، لذا فإن:

$$\begin{aligned}
 \text{Integ} &\cong \int_{-a/2}^{+a/2} \frac{I_0 \vec{u}_z \times \frac{\omega}{c} \vec{u}_r e^{i \frac{\omega \vec{r} \cdot z \vec{u}_z}{c}}}{\tau \pi \left[ \frac{1}{\tau^2} + \omega^2 \right]} dz = \left\{ \frac{I_0 \omega \sin \theta \vec{u}_\phi}{c \tau \pi \left[ \frac{1}{\tau^2} + \omega^2 \right]} \right\} \int_{-a/2}^{+a/2} e^{i \frac{\omega}{c} z \cos \theta} dz \\
 &= \left\{ \frac{I_0 \omega \sin \theta \vec{u}_\phi}{c \tau \pi \left[ \frac{1}{\tau^2} + \omega^2 \right]} \right\} \frac{c}{i \omega \cos \theta} \left( e^{\frac{i \omega a \cos \theta}{2c}} - e^{-\frac{i \omega a \cos \theta}{2c}} \right) \\
 &= \frac{I_0 \sin \theta 2 \sin \left( \frac{\omega a \cos \theta}{2c} \right) \vec{u}_\phi}{\tau \pi \left[ \left( \frac{1}{\tau} \right)^2 + \omega^2 \right] \cos \theta} \dots \dots \dots (44)
 \end{aligned}$$

$$\int_{\tau'} \left[ \vec{J}_\omega(\vec{r}') \times \vec{k} \right] e^{-i \vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_0)} d\tau' \cong \frac{I_0 2 \tau \sin \theta \sin \left( \frac{\omega a \cos \theta}{2c} \right)}{\pi (1 + \tau^2 \omega^2) \cos \theta} \vec{u}_\phi \dots \dots \dots (45) \quad \text{إذًا:}$$

و تكون الطاقة المشعّة لوحدة الزوايا المجسمة:

$$\frac{dU_\omega}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left[ \frac{I_0 2 \tau \sin \theta \sin \left( \frac{\omega a \cos \theta}{2c} \right)}{\pi (1 + \tau^2 \omega^2) \cos \theta} \right]^2 \dots \dots \dots (46)$$

و بمكاملة العبارة الأخيرة على الزاوية المجسمة الكُليّة، نحصل على كثافة الطاقة الطيفية:

$$U_\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left[ \frac{I_0 2 \tau \sin \theta \sin \left( \frac{\omega a \cos \theta}{2c} \right)}{\pi (1 + \tau^2 \omega^2) \cos \theta} \right]^2 \sin \theta d\theta d\phi \dots \dots \dots (47)$$

حيث:  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$  ، و يكون:

$$U_\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left[ \frac{2 I_0 \tau}{\pi (1 + \tau^2 \omega^2)} \right]^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta \sin^2 \left( \frac{\omega a \cos \theta}{2c} \right) \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \dots \dots \dots (48)$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi \quad \text{حيث:}$$

$$\text{Integ } 0 = \int_0^\pi \sin^3 \theta \sin^2 \left( \frac{\omega a \cos \theta}{2c} \right) \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \quad \text{إذًا سوف نحسب التكامل:}$$

سنضع  $A = \frac{\omega a}{2c}$  و بالتالي سيكون:

$$\begin{aligned}
 \sin^3 \theta \sin^2 \left( \frac{\omega a \cos \theta}{2c} \right) \frac{1}{\cos^2 \theta} &= \frac{(1 - \cos^2 \theta)}{\cos^2 \theta} \sin \theta \sin^2(A \cos \theta) \\
 &= \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \sin^2(A \cos \theta) - \sin \theta \sin^2(A \cos \theta)
 \end{aligned}$$

$$\text{Integ } 0 = \int_0^\pi \sin \theta \sin^2(A \cos \theta) \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} - \int_0^\pi \sin \theta \sin^2(A \cos \theta) d\theta \dots \dots \dots (49) \quad \text{و يصبح:}$$

لنستخدم التعويض التالي:  $u = \cos \theta \rightarrow du = -\sin \theta d\theta$  إذًا:

$$Integ 0 = \int_{-1}^1 \frac{\sin^2(Au)}{u^2} du - \int_{-1}^1 \sin^2(Au) du$$

و باعتبار:  $y = Au \rightarrow dy = Adu$  يكون:

$$Integ 0 = A \int_{-A}^A \frac{\sin^2 y}{y^2} dy - \frac{1}{A} \int_{-A}^A \sin^2 y dy \dots\dots\dots(50)$$

$$\int \frac{\sin^2 y}{y^2} dy = \frac{2y Si(2y) + \cos(2y) - 1}{2y} \quad [8] , \quad \int \sin^2 y dy = \frac{y}{2} - \frac{1}{4} \sin 2y \quad [8]$$

حيث  $Si$  دالة خاصة تُدعى تكامل الجيب (sine integral)، معرفة كما يلي [8]:

$$Si(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (x)^{2k-1}}{(2k-1) \cdot (2k-1)!}$$

بالتعويض عن حدود التكامل، حيث  $y = A \cos \theta$  ، يكون:  $\begin{cases} y = Au \\ u = \cos \theta \end{cases}$

$$Integ 0 = -2 + \frac{\sin 2A}{2A} + \cos(2A) + 2A Si(2A) \dots\dots\dots(51)$$

$$\therefore U_{\omega} \cong \frac{2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left[ \frac{I_0 \tau}{1 + \tau^2 \omega^2} \right]^2 \left\{ -2 + \frac{\sin 2A}{2A} + \cos(2A) + 2A Si(2A) \right\} \dots\dots\dots(52)$$

هذه هي عبارة كثافة الطاقة الطيفية.

بالتعويض عن  $U_{\omega}$  في المعادلة (36)، و استخدام ترميز أقل اختصاراً، يمكن كتابة:

$$U_{ray} = \int_0^{+\infty} U_{\omega} d\omega = \int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left[ \frac{I_0 \tau}{1 + \tau^2 \omega^2} \right]^2 \left\{ -2 + \frac{\sin(2A)}{2A} + \cos(2A) + 2A Si(2A) \right\} d\omega$$

$$= \frac{2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} (I_0 \tau)^2 \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{-2d\omega}{(1 + \tau^2 \omega^2)^2} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2A} \frac{\sin(2A)d\omega}{(1 + \tau^2 \omega^2)^2} + \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2A)d\omega}{(1 + \tau^2 \omega^2)^2} + \int_0^{+\infty} \frac{2A Si(2A)d\omega}{(1 + \tau^2 \omega^2)^2} \right\}$$

بالعودة إلى العبارة  $A = \frac{\omega a}{2c}$  يكون:

$$U_{ray} = \frac{2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} (I_0 \tau)^2 \times$$

$$\left\{ \int_0^{+\infty} \frac{-2d\omega}{(1 + \tau^2 \omega^2)^2} + \int_0^{+\infty} \frac{c}{a\omega} \frac{\sin\left(\frac{a}{c}\omega\right)d\omega}{(1 + \tau^2 \omega^2)^2} + \int_0^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{a}{c}\omega\right)d\omega}{(1 + \tau^2 \omega^2)^2} + \int_0^{+\infty} \frac{a}{c} \omega \frac{Si\left(\frac{a}{c}\omega\right)d\omega}{(1 + \tau^2 \omega^2)^2} \right\}$$

$$= \frac{2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} (I_0 \tau)^2 \times$$

$$\left\{ -2 \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{(1 + \tau^2 \omega^2)^2} + \frac{c}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{a}{c}\omega\right)d\omega}{\omega(1 + \tau^2 \omega^2)^2} + \int_0^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{a}{c}\omega\right)d\omega}{(1 + \tau^2 \omega^2)^2} + \frac{a}{c} \int_0^{+\infty} \frac{\omega Si\left(\frac{a}{c}\omega\right)d\omega}{(1 + \tau^2 \omega^2)^2} \right\}$$

$$= U_{\omega 0} \times \left\{ -2I_1 + \frac{c}{a} I_2 + I_3 + \frac{a}{c} I_4 \right\} \dots\dots\dots(53)$$

$$U_{\omega 0} = \frac{2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} (I_0 \tau)^2 \quad \text{حيث:}$$

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{(1 + \tau^2 \omega^2)^2}, \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\frac{a}{c} \omega) d\omega}{\omega(1 + \tau^2 \omega^2)^2}, \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\frac{a}{c} \omega) d\omega}{(1 + \tau^2 \omega^2)^2}, \quad I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\omega Si(\frac{a}{c} \omega) d\omega}{(1 + \tau^2 \omega^2)^2}$$

زمن الاسترخاء:

سنسعى الآن إلى المقارنة بين قيمة النسبة  $\frac{a}{c}$  و زمن الاسترخاء  $\tau$ ، لذا لنفترض مثلاً نصف قطر كل كرية  $R = 1\text{cm}$ ، و سلك التوصيل بينهما نحاسياً، له مقاومة كهربائية نوعية [9]  $\rho = 1.695 \times 10^{-8} \Omega^{-1} m^{-1}$ ، و طوله  $a = 1\text{m}$ ، و مساحة مقطعه  $D = 1\text{mm}^2 = 10^{-6} m^2$

تكون سعة هذه الجملة [10]  $C = 4\pi\epsilon_0 R \left(1 + \frac{R^2}{a^2 - R^2} + \dots\right) \cong 1.1 \times 10^{-12} \text{Farads}$ ، و تكون المقاومة الكهربائية

في  $r = \rho \frac{a}{D} = 1.695 \times 10^{-8} \frac{1}{10^{-6}} = 0.01695 \Omega$ ، فيكون زمن استرخاء الجملة [11]  $\tau = rC \cong 1.86 \times 10^{-14} \text{sec}$ ، حين يكون  $\frac{a}{c} = \frac{10^{-8}}{3} \text{sec}$ ، إذًا:  $\frac{a}{c} \cong 178779 = \beta$ ، فيمكننا إذًا كتابة:  $\frac{a}{c} = \beta\tau$ ، حيث:  $\beta = 178779$ .  
 إذًا ستصبح التكاملات المحدودة:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{(1 + \tau^2 \omega^2)^2}, \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\beta\tau\omega) d\omega}{\omega(1 + \tau^2 \omega^2)^2}, \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\beta\tau\omega) d\omega}{(1 + \tau^2 \omega^2)^2}, \quad I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\omega Si(\beta\tau\omega) d\omega}{(1 + \tau^2 \omega^2)^2}$$

لنقدّر الآن هذه التكاملات [12]:

$$I_1 = \frac{\pi}{4\tau}, \quad I_2(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\beta\tau\omega) d\omega}{\omega(1 + \tau^2 \omega^2)^2} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{(\beta/2) + 1}{e^\beta}\right),$$

$$I_3(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\beta\tau\omega) d\omega}{(1 + \tau^2 \omega^2)^2} = \frac{\pi}{4\tau} e^{-\beta} (\beta + 1), \quad I_4(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\omega Si(\beta\tau\omega) d\omega}{(1 + \tau^2 \omega^2)^2} = \frac{\pi}{4\tau^2} \frac{e^\beta - 1}{e^\beta}$$

و حيث  $\beta = 178779$  فهو كبير جداً، لذا فإن التكاملات الثلاثة الأخيرة تصبح:

$$I_1 = \frac{\pi}{4\tau}, \quad I_2(178779) \cong \frac{\pi}{2}, \quad I_3(178779) \cong 0, \quad I_4(178779) \cong \frac{\pi}{4\tau^2}$$

لنقدر الآن قيمة  $I_0$  بدلالة الشحنة الابتدائية  $q_0$ .

$$I = I_0 e^{-t/\tau} = \frac{dq(t)}{dt} \Rightarrow \frac{q_0}{2} = I_0 \int_0^{\infty} e^{-t/\tau} dt = I_0 \tau \Rightarrow I_0 = \frac{q_0}{2\tau}$$

بالتعويض عن كل هذه التكاملات و المقادير في عبارة الطاقة (53) نحصل على:

$$U_{\text{ray}} = \frac{30 q_0^2}{\tau} \left(-1 + \frac{1}{\beta} + \frac{\beta}{2}\right) \dots \dots \dots (54)$$

و باعتبار  $\beta$  كبيرة جداً، فإنه يمكن إجراء التقريب:  $-1 + \frac{1}{\beta} + \frac{\beta}{2} \cong \frac{\beta}{2}$ ، و يصبح:

$$U_{\text{ray}} = \frac{15 \beta q_0^2}{\tau} \dots \dots \dots (55)$$

## 5. مناقشة نتيجة الحساب:

إن النتيجة الأخيرة، المعادلة (55)، تمثل الطاقة المشعة أثناء التبادل الشحني بين الكريتين، باعتبارها إشعاعاً كهرومغناطيسياً ذا طيف مستمر على كل الترددات الممتدة من الصفر إلى المالا نهاية.

إذا ما اعتبرنا  $\beta = 1$ ؛ أي  $\frac{a}{c} = \tau$ ، و اعتبرنا الكريتين متلامستين:  $a = 2R$  فإن التكاملات  $I_2$  و  $I_3$  و  $I_4$  تصبح:

$$I_2(1) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{3}{2e}\right), \quad I_3(1) = \frac{\pi}{4\tau} \frac{2}{e}, \quad I_4(1) = \frac{\pi}{4\tau^2} \frac{e-1}{e}$$

و تكون الطاقة المشعة:

$$U_{\text{ray}} = 9.10^9 \frac{q_0^2}{R} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2e}\right) \dots \dots \dots (56)$$

إذا ما قارنا قيمة طاقة الإشعاع هذه بمقدار الطاقة الابتدائية للحملة، المعادلة (1)، فإن:

$$U_{\text{ray}} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2e}\right) U_0 \dots \dots \dots (57)$$

لنحسب الآن الطاقة المتبددة بفعل جول الحراري أثناء انتقال الشحنة من الكرية الأولى إلى الثانية [11]:

$$U_{\text{them}} = \int_0^{\infty} r I^2 dt = \int_0^{\infty} r I_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{r I_0^2 \tau}{2} \dots \dots \dots (58)$$

إذا كانت  $C_0$  سعة المكثف المؤلفة من جملة الكريتين و مقاومة السلك بينهما، فإن زمن استرخاء الجملة يُعطى بـ:

$$U_{\text{them}} = \frac{q_0^2}{8C_0} \dots \dots \dots (59) \quad \tau = rC_0 \text{ و يكون:}$$

تُعطى سعة جملة الكريتين الموصوفة بالشكل (3) بالعلاقة [10]:

$$C_0 = 4\pi\epsilon_0 \frac{R^2}{a} \left(1 + \frac{R^2}{a^2 - 2R^2} + \frac{R^4}{a^4 - 4a^2R^2 + 3R^4} + \dots\right) \\ + 4\pi\epsilon_0 R \left(1 - \frac{R}{a} + \frac{R^2}{a^2 - R^2} - \frac{R^3}{a^3 - 2aR^2} + \dots\right)$$

$$U_{\text{them}} = \frac{1}{12} \cdot \frac{q_0^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{12} U_0 \dots \dots \dots (60) \quad a = 2R \text{ يكون: } C_0 = \frac{3}{2} \cdot 4\pi\epsilon_0 R \text{ و يكون:}$$

لنحسب الآن الطاقة الكهروستاتيكية للحملة بعد التوصيل و انقطاع التيار تماما. باعتبار  $a = 2R$  فإنه من المعادلة (4)

يكون:

$$U_{12} = \frac{q_0^2}{16\pi\epsilon_0 a} = \frac{q_0^2}{32\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{8} U_0 \dots \dots \dots (61)$$

$$U = \frac{1}{2} U_0 + \frac{1}{8} U_0 = \frac{5}{8} U_0 \dots \dots \dots (62) \quad \text{من المعادلة (5) ستصبح الطاقة الكهروستاتيكية للحملة:}$$

حيث أن الطاقة مقدار محفوظ، فإنه ينبغي أن يكون مجموع الطاقات بعد التوصيل مساوياً تماماً مجموع الطاقات قبله؛ أي:

$$U + U_{\text{ray}} + U_{\text{them}} = U_0 \dots \dots \dots (63)$$

لنتحقق من ذلك. من المعادلات (57) و (60) و (62) يكون:

$$\frac{5}{8} U_0 + \frac{1}{12} U_0 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2e}\right) U_0 = \left(\frac{23}{24} - \frac{1}{2e}\right) U_0 \cong 0.7744 U_0 \dots \dots \dots (64)$$

فانحفاظ الطاقة يبدو غير محقق، و لكن ذلك يمكن تبريره بأسباب عدّة، يمكن أن نذكر منها الأخطاء التي قد تنجم عن التقريبات الحسابية العديدة و الاعتبارات المختلفة، كاعتبار المعامل  $\beta = 1$ ، في حين هو عدد كبير يساوي تقريبا 178779، كما ينبغي أن لا تغفل الصوت المسموع، و ربما غير المسموع، الذي يصدر أثناء توصيل النواقل ببعضها البعض؛ إذ يُعدُّ ذلك أيضا جزءًا من الطاقة المنتشرة بشكل ميكانيكي في الفضاء المجاور لجملة النواقل.

## 6. خلاصة:

لقد قمنا في هذه الورقة بحساب الطاقة المتقدمة أثناء توصيل ناقلين ببعضهما، على اعتبار ذلك إشعاعا كهرومغناطيسيا، و هو ما يتجلى في الشرارة الكهربائية التي ترافق هذه العملية. في سبيل ذلك اعتمدنا نموذجًا بسيطًا مؤلَّفًا من كرتين ناقلتين، يحدث بينهما تفريغ للشحنة عبر سلك ناقل يربط بينهما. حسبنا الطاقين الكهروستاتيكيتين للجملة، قبل التوصيل و بعده. حسبنا الطاقة المشعّة الصادرة عن الجملة الموصوفة آنفًا، كما حسبنا الطاقة المتبددة بفعل جول الحراري أثناء انتقال الشحنة من كرتة إلى أخرى. قارنًا الطاقة الابتدائية للجملة بمجموع طاقات الإشعاع و جول الحرارة و الكهروستاتيكية المتبقية في الجملة بعد التوصيل، فكان مجموعها حوالي 77,44% من قيمة الطاقة الابتدائية، أي أن هناك حوالي 22,56% لا نعرف -على وجه التحديد- فيما صُرِفَتْ، و مع ذلك فإننا برزنا الأمر على أنه قد يرجع إلى النموذج الذي قد يكون غير ملائم تماما، أو إلى الأخطاء التي قد تنجم عن التقريبات الحسابية و الاعتبارات المختلفة، كما أشرنا إلى أننا أغفلنا الطاقة الصوتية المصاحبة لعملية تفريغ الشحنة؛ إذ يُعدُّ ذلك أيضا جزءًا من الطاقة المنتشرة بشكل ميكانيكي في الفضاء المجاور لجملة النواقل.

## المراجع:

- 1- عبد الله موسى، الكهرباء و المغناطيسية، الجزء 1، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر (1987)
- 2- S. M. Al-Jaber and S. K. Salih; Energy consideration in the two-capacitor problem; Eur. J. Phys. **21**, pp. 341–345 (2000).
- 3- R. Serway, Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics, London (1996).
- 4- Bo Thidé, Electromagnetic field theory, 2<sup>nd</sup> edition, Swedish Institute of Space Physics and Department of Physics and Astronomy, Uppsala, Sweden (October 2009).
- 5- إدوارد م. بيرسل، مقرر بيركلي في الفيزياء، المجلد الثاني، الكهربائية و المغناطيسية، الترجمة العربية: محمد أمين سليمان و ليلي سعدو بالومال، دار ماكجروهيل للنشر، القاهرة، مصر (1984).
- 6- جون ر. ريتز و فريدريك ج. ميلفورد، أساسيات النظرية الكهرومغناطيسية، الترجمة العربية: يحيى عبد الحميد الحاج علي، دار الكتب للطباعة و النشر، جامعة الموصل، العراق (1988).
- 7- D. J. Griffiths; Introduction to electrodynamics; 3<sup>rd</sup> edition, Reed College, Prentice Hall, USA (1999).
- 8- Gradshteyn and Ryzhik's, Table of Integrals, Series, and Products, Alan Jeffrey and Daniel Zwillinger editors, 6th edition (July 2000).
- 9- R. A. Serway, C. J. Moses and C. A. Moyer; modern physics, 3<sup>rd</sup> edition, Thomson Learning, USA (2005).
- 10- <http://www.iue.tuwien.ac.at/phd/wasshuber/node77.html>
- 11- S. B. Cahn and B. E. Nadgorny; A guide to physics problems, part 1; kluwer academic publishers, State University of New York (2004).
- 12- <http://www.wolframalpha.com/>