République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Kadi-Merbah Ouargla
Faculté des Mathématiques et Sciences de la Matière
Département : Mathématique
Filière : Géométrie algébrique

N° d'ordre :

Mémoire

Présentée Pour l'obtention du Diplôme Magistère en Mathématiques

Stratification des Ensembles et Morphismes Semi-algébriques

Par

Reguiat Miloud

devant le jury composé de :

- D. A. Chacha,	Président	Pr. (Université de Ouargla)
- L. Noui,	Rapporteur	Pr. (Université de Batna)
- A. Benaissa,	Examinateur	M.C. (Université de Batna)
-M.Meflah	Examinateur	M.C (Université de Ouargla)

−2014−

Remerciements et Dédicace

J'exprime toute ma gratitude et mes remerciements au Professeur Noui Lemnouar mon encadreur qui m'a donné beaucoup de son temps et de ses connaissances en algèbre et qui m'a guidé dans plusieures branches en mathématiques, en étant très aimable avec moi, grace à lui et avec l'aide de Dieu ce travail n'aura pu être accompli.

Je remercie aussi Pr Chacha Ahmed Djamel professeur de l'université de Ouargla qui a accepté avec gentillesse de présider le jury.

Je remercie Benaissa Abdallah maitre de conférences de l'université de Batna le sympatique qui m'a jamais refuser une aide.je lui serai reconnaissant.

Je remercie Monsieur Meflah Mebrouk maitre de conférences de l'université de Ouargla d'avoir accepté de participer à ce jury.

Mes remerciements vont aussi à monsieur Boutarfaia Ahmed , recteur de l'université de Ouargla de sa compétence,et de son soutien professionnel et administratif .

Je n'oublie pas Monsieur Lounas Ali le Doyen de la faculté des mathématiques et Sciences de la Matière qui m'a encouragé de faire ce travail, ainsi que Monsieur Benbitour Mohamed Abdelwahab qui m'a aidé pour saisir ce mémoire.

Enfin, et surtout, je dédie ce travail à la mémoire de ma mère et mon père, à tout les amis et surtout mes collegues du département de mathématiques.

Table des matières

Introduction générale

La géométrie algébrique étudie essentiellement les ensembles qui sont les zéros d'un nombre fini de polynômes de plusieur variables à coefficients dans un corps commutatif k, qu'on appelle ensemble algébrique affine V (ou même projectif dans le cas ou les polynômes sont homogènes, un polynôme on peut le rendre homogène en ajoutant une variable pour aller à l'espace projectif). Sur un ensemble algébrique il y' a deux topologies, la topologie euclidienne lorsque le corps k est de caractéristique 0, et la topologie de Zariski qui est moins fine et qui n'est pas séparé, mais elle est quasi-compacte, deux ouverts non vide de Zariski se rencontrent forcément car ils sont trés grands, ils sont tout l'espace moins un ensemble de dimension inférieure (qui est les zéros de polynômes).

L'étude de ces ensembles algébriques devient facile lorsqu'on attache à tels ensembles des objets qui possédent des stuctures algébriques, commes les anneaux commutatifs unitaires ou les algèbres de types finies sur le corps k (lorsqu'il est algébriquement clos). Ce sont les anneaux des fonctions régulières, ou les corps des fractions rationnelles sur V. Pour l'étude locale au voisinage d'un point donné $x \in V$, on considère l'idéal formé des fonctions nulles en ce point qui est un idéal maximal et puit on localise en rendant inversible toute les fonctions non nulles en ce point pour obtenir un anneau local. Munir l'ensemble algébrique V de ces anneaux locaux constitue un faisceau qui s'appelle le faisceau structurel de la variéte algébrique V. Toute ces notions que j'ai exposé au chapitre 1 se trouvent dans les livres classiques de géométrie algébrique comme par exemple : J.Dieudonné (cours de géométrie algébrique, p.u.f 1974) D.Perrin (géométrie algébrique, cnrs éditions 1995) R.Hartshorne (algebraic geometry springer-verlag 1977) etc....

Lorsque le corps $k = \mathbb{R}$ ou un corps réel clos quelconque (qui est un corps qui admet une relation d'ordre total compatible avec les deux lois du corps), on remplace alors les ensembles algébriques par les ensembles semi-algébriques en ajoutant aux équations polynomiales des inégalités portées sur les polynômes on obtient des propriétés suplémentaires qui ne sont pas valable pour les ensembles algébriques, par exemple la projection d'un ensemble semi-algébrique est semi-algébrique, c'est le principe de Tarski-Seidenberg, ce principe permet aussi de faire l'extension d'un ensemble semi-algébrique sur un corps réel clos plus grand en gardant bien sûr la même formule qui décrive l'ensemble semi-algébrique S, il faut ensuite définir les fonctions semi-algébriques à la place des fonctions régulières pour fabriquer un faisceau.

Le théorème 31 de saucissonage dont la démonstration se trouve dans J.Bochnak,M.Coste, M.F.Roy (Real algebraic geomety, springer-verlag 1998),ce théorème est le maitre de la situation pour l'étude des semi-algébriques , il donne la possibilité de découper n'importe quel semi-algébrique en une partition finie de sous variétes C^∞ tous semi-algébriquement homéomorphe à des pavés de type $]0,1[^k$ pour $k \leq n$, qui sont limitées par des fonctions de Nash , ceci aide à faire des triangulations et des stratifications semi-algébriques avec des conditions d'incidences aux frontières commes les conditions a) et b) de Whitney.

Dans le chapitre 2 on a exposé le spectre de Zariski d'un anneau commutatif unitaire qui est une généralisation des variétés algébriques faite par des grands mathématiciens des années cinquantes comme O.Zariski, A.Grothendieck, J.P.Serre et d'autres.Ca consiste à définir un foncteur contravariant de la catégorie des anneaux commutatifs unitaires dans la catégorie des espaces topologiques, et puisque l'image réciproque d'un idéal maximal (qui sont en correspondance biunivoque avec les points dans le cas des variétés algébriques) n'est pas un idéal maximal par un homomorphisme d'anneau mais seulement premier, on prend les idéaux premiers comme points du spectre avec la topologie dite de Zariski qui est quasi-compacte, pour avoir un schéma affine il faut définir un faisceau d'anneaux locaux. Pour faire l'analogue des variétés algébriques il faut voir les éléments de l'anneau comme des fonctions ce qui apparait un peut moins clair (artificiel) .

Le spectre réel d'un anneau commutatif unitaire A est défini de la même manière les points ici sont les idéaux premiers réels avec un ordre sur l'anneau quotient qui est intégre ce qui se prolonge en un ordre sur le corps des fractions, et donc un point est un couple $(I, \leq)$ formé d'un idéal premier réel et d'un ordre, ce qui revient au même de donner un cône premier qui caractérise les éléments qui doivent être positifs dans un corps réel plus grand en quelque sorte, cela est équivalent aussi à la donnée d'une classe d'homomorphismes d'anneau de A dans un corps réel clos on définit dans cet ensemble une topologie en donnant une base d'ouverts et elle sera aussi quasi-compacte. Les propriétés importantes qu'on peut avoir dans le spectre réel c'est lorsque l'anneau A est l'anneau des fonctions polynomiales sur une variété algébrique réel V, dans ce cas V avec sa topologie euclidienne sera un sous espace du spectre réel, il y'a une opération très utile pour l'étude des ensembles semi-algébriques qui associe à chaque sous ensemble semi-algébrique S de V un constructible du spectre réel d'une façon biunivoque, donc on peut aller et revenir dans le spectre réel pour en servir de la quasi-compacité et extraire des recouvrements finis pour démontrer par exemple la trivialité locale des ensembles semi-algébriques, tout cela a été fait dans le chapitre 3. Il y'avait un problème qu'il faut signaler c'est qu'un corps réel clos peut être non archimedien, c.à.d il contient des éléments infiniments grands (plus grand que tout les nombres naturels), et par suite on peut avoir des triangulations qui envoient des points infiniments proches à des images non infiniments proches, en faite on a réglé ca on faisons des reparamétrisations bien choisie pour rendre de telle triangulations lipschitziennes.

Chapitre 1

Géométrie algébrique et géométrie algébrique réelle

On va donner une brève introduction à la géométrie algébrique dans un corps quelconque et surtout sur un corps algébriquement clos k. On définit tout d'abord les ensembles algébriques qui sont les objets qu'on va étudier le long de ce manuscript. Travailler avec les ensembles algébriques d'une façon purement géométrique n'est pas très commode c'est pour ça qu'on attache à un tel ensemble, un faisceau "le faisceau structural" qui permet de passer à des objets algébriques "les anneaux", qui eux donnent presque toute les propriétés des variétés algébriques. Cependant, pour arriver à des résultats concrets souvent on suppose que le corps k est algébriquement clos.

Dans la géométrie algébrique réelle le corps n'est pas algébriquement clos comme par exemple $k = \mathbb{R}$, mais ce qu'on va perdre on le recupère d'une certaine façon, par exemple pour annuler un nombre fini de polynômes il suffit d'annuler leurs somme de carrés, ou de ne pas être obligé d'aller à l'espace projectif.

1.1 Ensembles algébriques

Soit k un corps (toujours commutatif) quelconque, on note

$$k^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n)\,; \quad x_i \in k\}$$

l'espace affine de dimension n sur k.

Définition 1 *Une partie $V \subset k^n$ s'appelle ensemble algébrique affine s'il existe une famille $\{p_i\}_{i \in S}$ de polynômes p_i dans $k\,[X_1, ..., X_n]$, telle que :*

$$V = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in k^n : \quad p_i\,(x_1, x_2, ..., x_n) = 0; \quad i \in S\}$$

Si on note $(x_1, x_2, ..., x_n) = x$ l'élément de k^n, et $A = \{p_i\}_{i \in S} \subset k\,[X_1, ..., X_n]$, les ensembles algébriques affines de k^n sont les parties de la forme :

$V(A) = \{x \in k^n; \forall p \in A : \quad p(x) = 0\}$. Il est clair que si $A \subset B$ dans $k\,[X_1, ..., X_n]$ alors $V(B) \subset V(A)$, de cela on peut montrer que $V(A) = V(\langle A \rangle)$ où $\langle A \rangle$ est l'idéal engendré par A, pour un ensemble algébrique affine de k^n défini par une famille quelconque $\{p_i\}_{i \in S}$ on peut prendre un ensemble fini de polynômes $p_1, p_2, ...p_r$ de $k\,[X_1, ..., X_n]$ car ce dernier est noethérien et tout idéal est de type fini ,

$$V = \{x \in k^n : \quad p_1\,(x) = p_2\,(x) = ... = p_r\,(x) = 0\}$$

Exemples :-

1) $\emptyset = V(\{1\}) = V(k[X_1, X_2, ...X_n])$, est un ensemble algébrique affine .

2) $k^n = V(\{0\})$ est un ensemble algébrique affine .

3) La parabole $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : y = x^2\}$, est un ensemble algébrique affine de $\mathbb{R}^2$ aussi le cercle $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : x^2 + y^2 = 1\}$.

4) L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : y = \sin(x)\}$ n'est pas un ensemble algébrique , car si non son intersection avec l'axe des x : $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \ : x \in \mathbb{R}\}$;qui est infini : $\{(l\pi, 0) \in$

$\mathbb{R}^2 \ : l \in \mathbb{Z}\}$ sera algébrique , mais un ensemble algébrique de $\mathbb{R}^1$ est ou bien $\mathbb{R}$ ou bien un ensemble fini de points racines d'un polynôme non nul $p(x) = 0$ a une variable ," le nombre de solutions ne dépasse pas le degré" .

1.2 L'anneau des fonctions régulières

k est un corps commutatif,$k[X] = k\left[X_1, ..., X_n\right]$ et $V \subset k^n$ un ensemble algébrique affine, on pose $I(V) = \{p \in k\left[X\right]; \quad p(x) = 0 \quad \forall x \in V\}$, c'est un idéal de l'anneau $k\left[X\right]$.

Définition 2 *Si A est un anneau,$I \subset A$ un idéal ;alors l'idéal $\sqrt{I} = \{a \in A; \exists n \in \mathbb{N}, a^n \in I\}$ s'appelle le radical de I .*

Proposition 3 *Si $V \subset k^n$ est un ensemble algébrique affine, on a $\sqrt{I(V)} = I(V)$.*

Preuve. Il est clair que $I(V) \subset \sqrt{I(V)}$,inversement si $p \in \sqrt{I(V)}$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $p^n \in I(V)$ donc $p^n(x) = 0$ pour tout x dans V et donc $p(x) = 0$ pour tout $x \in V$ c'est-à-dire $p \in I(V)$. ■

Définition 4 *Soit $V \subset k^n$ un ensemble algébrique affine, l'anneau des fonctions régulières de V c'est l'anneau quotient $\frac{k[X_1,...,X_n]}{I(V)}$ noté $\Gamma(V)$.*

Un élément $f \in \Gamma(V)$ est considéré comme une fonction $f : V \to k$, car si $f \in \Gamma(V)$ est une classe d'un polynôme $p \in k\left[X\right]$ modulo $I(V)$, $f = \bar{p}$, on pose $f(x) = p(x)$ pour $x \in V$, cela ne dépend pas du représentant p car si $f = \bar{p} = \bar{q}$ on a $p - q \in I(V)$ et donc $\left(p - q\right)(x) = p(x) - q(x) = 0$ pour tout $x \in V$ et donc $p(x) = q(x)$ pour tout élément de V.

Théorème 5 (Théorème des zéros de Hilbert ou Nullstellensatz) *Si k est un corps algébriquement clos et $I \subset k\left[X\right] = k\left[X_1, ..., X_n\right]$ est un idéal alors $I(V(I)) = \sqrt{I}$.*

Preuve. Voir [10] ■

Conséquences pour k algébriquement clos

1 Si $I \neq k[X_1, ..., X_n]$ un idéal propre alors $V(I) \neq \emptyset$ car par contraposé si $V(I) = \emptyset$ alors $I(V(I)) = I(\emptyset) = k[X_1, ..., X_n] = \sqrt{I}$ et donc $I = k[X_1, ..., X_n]$

2 Les idéaux maximaux de $k[X_1, ..., X_n]$ sont de la forme $\langle X_1 - a_1, ..., X_n - a_n \rangle$ où $(a_1, ..., a_n) \in k^n$ car $\langle X_1 - a_1, ..., X_n - a_n \rangle$ est maximal puisque $\frac{k[X_1, ..., X_n]}{\langle X_1 - a_1, ..., X_n - a_n \rangle} \to k$ est un isomorphisme défini par (classe de X_i) $\mapsto a_i$.

Si $m \subset k[X_1, ..., X_n]$ est maximal donc $V(m) \neq \emptyset$ soit $(a_1, ..., a_n) \in V(m)$ donc $m \subset \langle X_1 - a_1, ..., X_n - a_n \rangle \subsetneq k[X_1, ..., X_n]$ donc $m = \langle X_1 - a_1, ..., X_n - a_n \rangle$

Remarque 6 *Si k n'est pas algébriquement clos on peut avoir $\sqrt{I} \neq I(V(I))$ comme le montre l'exemple $k = \mathbb{R}$, $n = 1$ et $I = \langle X_1^2 + 1 \rangle \subset \mathbb{R}[X_1]$, $V(I) = \emptyset$ et donc $I(V(I)) = I(\emptyset) = \mathbb{R}[X_1]$ et $\sqrt{I} = \sqrt{\langle X_1^2 + 1 \rangle} = \langle X_1^2 + 1 \rangle \neq \sqrt{\mathbb{R}[X_1]}$*

Retour aux corps algébriquement clos, on a vu qu'il existe une correspondance biunivoque entre les idéaux maximaux $m \in Spm\Gamma(V)$, ensemble des idéaux maximaux de $\Gamma(V)$, et les points de V, qui à tout idéal maximal $\langle X_1 - a_1, ..., X_n - a_n \rangle$ de $\Gamma(V)$ fait correspondre le point $x = (a_1, ..., a_n) \in V$, la réciproque est évidente.

On a encore une bijection entre l'ensemble des homomorphismes de k algèbre de $\Gamma(V)$ dans k : $Hom_{ka\lg}(\Gamma(V), k)$ dans $Spm\Gamma(V)$

$$\begin{array}{rcl} & & Hom_{ka\lg}(\Gamma(V), k) \xrightarrow{\sim} Spm\Gamma(V) \\ \varphi & \mapsto & \ker \varphi \end{array}$$

la réciproque fait correspondre à l'idéal maximal $m \subset \Gamma(V)$ l'homomorphisme canonique (projection)

$$p : \Gamma(V) \to \frac{\Gamma(V)}{m} = k$$

La composition des deux bijections précédentes est

$$\begin{array}{rcl} & & Hom_{ka\lg}(\Gamma(V), k) \xrightarrow{\sim} Spm\Gamma(V) \xrightarrow{\sim} V \\ \varphi & \mapsto & x = (a_1, ..., a_n) \in V \end{array}$$

tel que $\ker \varphi = \langle X_1 - a_1, ..., X_n - a_n \rangle$. La réciproque $x \in V \mapsto \mathcal{X}_x$ avec $\mathcal{X}_x : \Gamma(V) \to k$ définie par $\mathcal{X}_x(f) = f(x)$ pour $f \in \Gamma(V)$.

1.3 Topologie de Zariski dans un ensemble algébrique affine

Soit $V \subset k^n$ un ensemble algébrique affine, il est donc sous la forme $V = V(I)$ où I est idéal de $k[X]$, et on peut prendre I radical, i.e $I = \sqrt{I}$

$$\Gamma(V) = \frac{k[X]}{I(V)}$$

Soit $A \subset \Gamma(V)$ une partie on pose $V(A) = \{x \in V : f(x) = 0, \forall f \in A\}$ si $A \subset B$ alors $V(B) \subset V(A)$. On a $V(A) = V(\langle A \rangle)$ comme on a vu et que $V(\{0\}) = V$ et $V(\Gamma(V)) = \emptyset$.

Proposition 7 *1) Si A, B sont deux idéaux de $\Gamma(V)$ alors $V(A) \cup V(B) = V(A \cap B) = V(AB)$ où $AB = \{\Sigma x_i y_i, \quad x_i \in A, y_i \in B\}$, somme finie .*

2)Pour une famille quelconque $\{A_i\}_{i \in S}$ d'idéaux de $\Gamma(V)$ on a $\cap_{i \in S} V(A_i) = V(\Sigma_{i \in S} A_i)$.

Preuve. 1)On a $AB \subset A \cap B \subset A$ donc $V(A) \subset V(A \cap B) \subset V(AB)$ de même $V(B) \subset V(A \cap B) \subset V(AB)$ donc $V(A) \cup V(B) \subset V(B \cap A) \subset V(AB)$;on montre que $V(AB) \subset V(A) \cup V(B)$: si $x \in V(AB)$ et $x \notin V(A)$ donc il existe $f \in A$ et $f(x) \neq 0$, alors pour tout $g \in B$; $fg \in AB$ donc $fg(x) = f(x)g(x) = 0$ d'où $g(x) = 0$ donc $x \in V(B)$; et on a l'égalité.

2)$A_i \subset \Sigma_{i \in S} A_i$ donc $V(\Sigma A_i) \subset V(A_i)$ pour tout i alors $V(\Sigma A_i) \subset \cap V(A_i)$.

Inversement si $x \in \cap V(A_i)$ alors $x \in V(A_i)$ pour tout $i \in S$ donc $f_i(x) = 0$ pour tout $f_i \in A_i$. Si $f \in \Sigma A_i$ donc $f = \Sigma f_i$ somme finie avec $f_i \in A_i$ donc $f(x) = \Sigma f_i(x) = 0$ donc $x \in V(\Sigma A_i)$. ■

Définition 8 *Les parties sous la forme $V(A)$ pour A idéal de $\Gamma(V)$ sont les fermés d'une topologie sur V. Les ouverts sont donc $D(A) = V - V(A) = \{x \in V : \exists f \in A; f(x) \neq 0\}$. Les ouverts de la forme $D(f) = \{x \in V : f(x) \neq 0\}$ s'appellent les ouverts standards, ils forment une base d'ouverts pour cette topologie,dite de Zariski .*

Avec la topologie de Zariski V est quasi-compact car si $V = \cup_{i\in S} D(A_i) = \cup_{i\in S} (V - V(A_i)) = V - \cap_{i\in S} V(A_i) = V - V(\Sigma_{i\in S} A_i)$, les A_i sont les idéaux de $\Gamma(V)$ qui est noethérien donc $\Sigma_{i\in S} A_i$ est de type fini, donc engendré par $g_1, g_2, ..., g_r$ donc $\Sigma_{i\in S} A_i = \Sigma_{j\in S'} A_j$, S' fini (en prenant seulement les $i \in S$ tel que g_j, $j = 1, 2, ...r$, s'écrit comme somme des éléments de A_i qui sont alors fini). Donc $V = V - V(\Sigma_{j\in S'} A_j) = \cup_{\in S'} D(A_j)$,

On peut le démontrer autrement comme suit :

$V = V - V$ ($\Sigma_{i\in S} A_i$) qui est équivalent à $V(\Sigma_{i\in S} A_i) = \emptyset$, ce qui donne bien $\Sigma_{i\in S} A_i = \Gamma(V)$ et donc $1 = \Sigma a_i$ une somme finie avec $a_i \in A_i$ cela ssi $\Gamma(V) = A_1 + A_2 + ... + A_s$ avec un renommage d'indices. Donc $V = \cup_{i=1}^{s} V(A_i)$.

On remarque qu'on a utilisé dans la deuxième démonstration le nullstellensatz ce qui suppose que le cops k soit algébriquement clos malgré que le résultat est vrai pour n'importe quel corps.On a utilisé aussi une proposition qui est valable dans tout anneau unitaire même s'il n'est pas noethérien, c'est la suivante :

Proposition 9 *Si A est un anneau unitaire quelconque et $\{I_i\}_{i\in S}$ une famille (infinie) d'idéaux à gauches (à droites,bilatères) tel que $A = \sum_{i\in S} I_i$,alors il existe un nombre fini d'indices $i_1, i_2, ...i_n$ tel que $A = I_{i_1} + I_{i_2} ..... + I_{i_n}$*

Preuve. $1 \in A = \sum_{i\in S} I_i$ donc il existe $x_{i_1} \in I_{i_1}, x_{i_2} \in I_{i_2}, x_{i_3} \in I_{i_3} .....x_{i_n} \in I_{i_n}$ tel que $1 = x_{i_1} + x_{i_2} + x_{i_3} ..... + x_{i_n}$;pour tout élément a de A on a $a = ax_{i_1} + ax_{i_2} + ax_{i_3} ..... + ax_{i_n}$ et donc $a \in I_{i_1} + I_{i_2} + I_{i_3} ..... + I_{i_n}$;l'autre inclusion est évidente . ■

V n'est pas séparé généralement par exemple si $V = k^n$ avec k infini, on peut vérifier que deux ouverts non vides se rencontrent.

1.4 Les faisceaux

Définition 10 *Soit X un espace topologique, un préfaisceau $\mathcal{F}$ sur X c'est la donnée d'un ensemble $\mathcal{F}(U)$ pour tout ouvert U de X et d'une application*

$$\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$$

lorsque $V \subset U$ (qui s'appelle restriction) ,qui vérifie :

1) $\rho_{UU} = Id_{\mathcal{F}(U)}$

2) Si $W \subset V \subset U$ trois ouverts de X on a $\rho_{VW} \circ \rho_{UV} = \rho_{UW}$.

Un faisceau sur X est un préfaisceau qui vérifie de plus .

3) Si $U = \cup_{i \in S} U_i$ un recouvrement de U par des ouverts U_i de X et si $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tel que $\rho_{U_i,U_i \cap U_j}(s_i) = \rho_{U_j,U_i \cap U_j}(s_j)$ pour tout $i, j \in S$,alors il existe $s \in \mathcal{F}(U)$ unique tel que $\rho_{UU_i}(s) = s_i$

Il existe plusieurs façons d'associer un faisceau pour un espace topologique X par exemple si E est un ensemble quelconque on prend $\mathcal{F}(U) = E$ pour tout ouvert U de X et $Id_E = \rho_{UV} : E \rightarrow E$ si $V \subset U$. Ce faisceau est trivial et n'apporte rien pour l'espace topologique X.

1.4.1 Morphisme de faisceaux

Définition 11 *Si X est un espace topologique et $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux faisceaux sur X , un morphisme f de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$ est la donnée pour tout ouvert U de X d'une application f_U de $\mathcal{F}(U)$ dans $\mathcal{G}(U)$ tel que si $V \subset U$ deux ouverts de X on a le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \overset{f_U}{\rightarrow} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow \rho_{UV} & & \downarrow \rho'_{UV} \\ \mathcal{F}(V) & \overset{f_V}{\rightarrow} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

c'est-à-dire dans le langage des catégories c'est un morphisme fonctoriel entre le foncteur $\mathcal{F}$ et le foncteur $\mathcal{G}$.

Définition 12 (Faisceau image directe) *Si X et Y sont deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ une application continue et $\mathcal{F}$ un faisceau sur X, pour un ouvert U de Y on pose $\mathcal{G}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ et si $V \subset U$ deux ouverts de Y*

$$\rho'_{UV} = \rho_{f^{-1}(U)f^{-1}(V)} : \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \to \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

vérifie les conditions d'un faisceau $\mathcal{G}$ sur Y, on l'appelle le faisceau image directe de $\mathcal{F}$ noté $f_*\mathcal{F}$.

Définition 13 (Espace annelé) *Si X est un espace topologique et $\mathcal{F}$ un faisceau sur X tels que les $\mathcal{F}(U)$ sont des anneaux et pour tout $V \subset U$ des ouverts de X les applications $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ sont des homomorphismes d'anneaux, on dit que le couple $(X, \mathcal{F})$ est un espace annelé. Un morphisme entre deux espaces annelés $(X, \mathcal{F})$ et $(Y, \mathcal{G})$ est un couple $(f, f^\ddagger)$ tel que $f : X \to Y$ est une application continue et $f^\ddagger$ est un morphisme de faisceaux entre $\mathcal{G}$ et $f_*\mathcal{F}$ c'est-à-dire pour tout $V \subset U$ ouverts de Y on a le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(U) & \overset{f^\ddagger_U}{\to} & \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \\ \downarrow \rho_{UV} & & \downarrow \rho_{f^{-1}(U)f^{-1}(V)} \\ \mathcal{G}(V) & \overset{f^\ddagger_V}{\to} & \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \end{array}$$

Il faut chercher donc des faisceaux meilleurs qui transportent les propriétés topologiques et géométriques et même algébriques (lorsque l'espace topologique X posséde des propriétés algébriques, comme par exemple les ensembles algébriques), dans ce cas on peut retrouver dans le faisceau sur X presque toute les informations sur X.

Souvent on prend $\mathcal{F}(U)$ comme une partie de l'ensemble des fonctions de U dans un ensemble K, et on note dans ce cas $\rho_{UV}(s) = s|_V$ pour $V \subset U$. La restriction de la fonction $s : U \to K$ à V.

Proposition 14 *Si X est un espace topologique et K un ensemble, $\mathcal{U}$ une base d'ouverts de X, si pour tout ouvert $U \in \mathcal{U}$ on donne $\mathcal{F}(U)$ ensemble de fonctions de U dans K qui vérifie les deux conditions suivantes :*

1) $U, V \in \mathcal{U}$ avec $V \subset U$ on a $s|_V \in \mathcal{F}(V)$ pour tout $s \in \mathcal{F}(U)$

2) si $(U_i)_{i\in S}$ est une famille de $\mathcal{U}$ et $U = \cup_{i\in S} U_i$ est dans $\mathcal{U}$ et $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tel que $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$ pour tout $i, j \in S$ alors il existe $s \in \mathcal{F}(U)$ unique tel que $s|_{U_i} = s_i$.

Alors il existe un faisceau unique $\bar{\mathcal{F}}$ sur X tel que $\bar{\mathcal{F}}(U) = \mathcal{F}(U)$ pour tout ouvert $U \in \mathcal{U}$.

Preuve. On prend seulement

$\bar{\mathcal{F}}(U) = \{s : U \to K;\ s|_V \in \mathcal{F}(V) \text{ pour tout } V \in \mathcal{U} \text{ et } V \subset U\}$ ■

Dans la géométrie algébrique, si V est un ensemble algébrique sur un corps k quelconque on prend la base d'ouverts formée des ouverts standard : $D(f) = \{x \in V : f(x) \neq 0\}$ et $\mathcal{F}(D(f)) = \Gamma(V)_f$ où $\Gamma(V)_f = \left\{\frac{a}{f^n}, n \in \mathbb{N}, a \in \Gamma(V)\right\}$.

La difficulté c'est la condition 2) de la proposition 14 , on peut le faire lorsque k est algébriquement clos, mais on peut le faire aussi quand k est un corps réel clos.

1.4.2 Cas où k est algébriquement clos

Soit V un ensemble algébrique affine de k^n, on prend la base d'ouverts $(D(f))_{f\in\Gamma(V)}$ de l'espace V muni de la topologie de Zariski. On pose $\mathcal{F}(D(f)) = \Gamma(V)_f = \left\{\frac{a}{f^n}, n \in \mathbb{N}, a \in \Gamma(V)\right\}$ qu'on note aussi $\Gamma(D(f), O_V)$

Condition 1) Si $D(f) \subset D(g)$ pour $f, g \in \Gamma(V)$ donc $V(g) = \{x \in V : g(x) = 0\} \subset V(f)$ alors $f \in \sqrt{\langle g\rangle}$ par nullstellensatz , donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n = hg$ avec $h \in \Gamma(V)$, si $\frac{u}{g^i} \in \Gamma(V)_g$ sa restriction dans $\Gamma(V)_f$ s'ecrit

$$\frac{u}{g^i} = \frac{uh^i}{g^i h^i} = \frac{uh^i}{f^{n_i}} \in \Gamma(V)_f$$

Condition 2) Si $D(f)$ est recouvert par les $D(f_i)_{i\in S}$ avec $f_i \neq 0$ c.à.d $D(f) = \cup_{i\in S} D(f_i)$ donc $V(f) = \cap_{i\in S} V(f_i) = V(\cup_{i\in S}\{f_i\})$,donc on peut prendre un nombre fini de f_i car $\Gamma(V) = \frac{k[X]}{I(V)}$ est noethérien donc $V(f) = V(f_1) \cap V(f_2) \cap ... \cap V(f_r) = V(f_1, ..., f_r)$. Si s_i est une séction de $D(f_i)$: $s_i \in \Gamma(V)_{f_i}$ et puisqu'il existe un nombre fini de s_i on peut prendre $s_i = \frac{a_i}{f_i^n}$ avec la même puissance $n > 0$ pour toute les f_i . Si s_i coincide avec s_j dans $D(f_i) \cap D(f_j) = D(f_i f_j)$ donc $\frac{a_i}{f_i^n} = \frac{a_j}{f_j^n}$ donc il existe l entier :

$$f_i^l f_j^l (a_i f_j^n - a_j f_i^n) = 0$$

qu'on l'écrie aussi

$$a_i f_j^{n+l} f_i^l = a_j f_i^{n+l} f_j^l$$

$f \in \sqrt{I(V(f_1, ..., f_r))} = \sqrt{I(V(f_1^n, ..., f_r^n))}$ par nullstellensatz , donc il existe m entier naturel tel que $f^m = \Sigma b_j f_j^{n+l}$ et on prend $a = \Sigma_{t=1}^r a_t b_t f_t^l$ et $s = \frac{a}{f^m} \in \Gamma(V)_f$ on aura

$$\begin{aligned} a f_i^{n+l} &= f_i^{n+l} \Sigma_{t=1}^r a_t b_t f_t^l = \Sigma_{t=1}^r a_t f_i^{n+l} f_t^l b_t \\ &= \Sigma_{t=1}^r a_i f_t^{n+l} f_i^l b_t = a_i f_i^l \Sigma_{t=1}^r f_t^{l+n} b_t \\ &= a_i f_i^l f^m \end{aligned}$$

donc $f_i^l (a_i f^m - a f_i^n) = 0$ donc $\frac{a}{f^m} = \frac{a_i}{f_i^n}$ c.à.d $s|_{D(f_i)} = \frac{a_i}{f_i^n} = s_i$.

Chapitre 2

Variété algébrique

Le faisceau défini sur un ensemble algébrique affine V par $\mathcal{F}(D(f)) = \Gamma(V)_f$ d'aprés la proposition 14 s'appelle le faisceau des fonctions régulières de V qu'on note O_V.

Définition 15 *Une variété algébrique affine est un espace annelé isomorphe à* (V, O_V) *pour un ensemble algébrique* V *et* O_V *c'est le faisceau des fonctions régulières . Un morphisme de variétés affines est un morphisme d'espaces annelés .*

Si $x \in V$, $O_{V,x}$ c'est la limite inductive du système $(O_V(U)_{x \in U}, \rho_{UU''})$ c'est donc l'anneau local, $\Gamma(V)_m = \left\{\frac{a}{b} : a \in \Gamma(V), b \notin m\right\}$ où $m = \{a \in \Gamma(V) : a(x) = 0\}$ qui est un idéal maximal c'est l'ensemble des fonctions polynomiales qui s'annule au point x.

Lorsque dans un espace annelé (X, O_X) les fibres $O_{X,x}$ sont des anneaux locaux on dit que c'est un espace annelé en anneaux locaux

Il faut préciser c'est quoi un isomorphisme d'espaces annelés. Pour cela il faut voir la définition dans A.Grothendieck,J.Dieudonné (E.G.A.)

Définition 16 *Une variété algébrique est un espace annelé en anneaux locaux* (X, O_X) *qui est quasi-compact et localement isomorphe à une variété algébrique affine.*

Donc pour tout $x \in X$ il existe un ouvert $U \subset X$ avec $x \in U$ tel que $(U, O_X/U)$ est une variété algébrique affine.Bien sûr si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur un espace topologique X et

U est un ouvert de X, le faisceau $\mathcal{F}|_U$ est défini par $\mathcal{F}|_U(V) = \mathcal{F}(V)$ pour tout ouvert V de U.

2.1 Ensemble algébrique projectif

Si k est un corps, l'espace projectif $P^n(k)$ de dimension n est le quotient de $k^{n+1} - \{0\}$ par la relation de colinéarité xRy ssi il existe $\alpha \in k^* : y = \alpha x$ qui est une relation d'équivalence, une classe est donc une droite qui passe par l'origine de k^{n+1} privé de l'origine.

Un point de l'espace projectif $P^n k$ est une classe de $(x_1, x_2, ..., x_n) \in k^{n+1} - \{0\}$ qu'on note $(x_0 : x_1 : x_2 : ... : x_n)$ et on a $(x_0 : x_1 : x_2 : ... : x_n) = (\lambda x_0 : \lambda x_1 : \lambda x_2 : ... \lambda x_n)$ pour tout $\lambda \in k^*$

Exemple 17 *1) $P^0 k =$ un point , car tous les points de $k^1 - \{0\}$ sont équivalents*

2) $P^1 k = \{(x_0 : x_1) ; x_0 \neq 0 \vee x_1 \neq 0\} = \{(x_0 : x_1) ; x_0 \neq 0\} \cup \{(0 : x_1) ; x_1 \neq 0\}$
$= \left\{\left(1 : \frac{x_1}{x_0}\right) ; x_0 \neq 0\right\} \cup \{(0 : x_1) ; x_1 \neq 0\}$
$= \{(1 : \lambda) ; \lambda \in k\} \cup \{(0 : x_1) ; x_1 \neq 0\}$
le premier ensemble est isomorphe à l'espace affine de dimension 1 par $(1 : \lambda) \mapsto \lambda$
le deuxième c'est $P^0 k$ (un point à l'infini)

3) d'une façon générale $P^n k = A^n k \cup P^{n-1} k$ où $A^n k$ est l'espace affine de dimension n sur k (la réunion est disjointe) et $P^{n-1} k$ sont les points à l'infini et par suite

$$P^n k = A^n k \cup A^{n-1} k \cup ... \cup A^1 k \cup P^0 k.$$

Un polynôme $P \in k[X_0, ..., X_n]$ est dit homogène de degré d si pour tout $\lambda \in k$ on a $P(\lambda x_0, \lambda x_1, ..., \lambda x_n) = \lambda^d P(x_0, x_1, ..., x_n)$. Un point $(x_0, x_1, ..., x_n)$ de $P^n(k)$ annule le polynôme P si $P(x_0, x_1, ..., x_n) = 0$ pour tous les représentants de la classe du point donc aussi $P(\lambda x_0, \lambda x_1, ..., \lambda x_n) = 0$ si $\lambda \neq 0$ ce qui fait qu'on prend ou bien seulement les polynômes homogènes, ou bien les polynômes quelconques qui sont forcément somme de polynômes homogènes tel que chaque composante est annulée par les coordonnées $(x_0, x_1, ..., x_n)$.

Définition 18 *Un ensemble algébrique projectif c'est un ensemble de la forme* $V(S) = \{x \in P^n(k) : P(x) = 0 \forall P \in S\}$ *où* S *est une partie de* $k[X_0, X_1, ..., X_n]$ *on a les propriétés suivantes :*

1) $S \subset S'$ *alors* $V(S') \subset V(S)$ *.*

2) $V(S) = V(\langle S \rangle)$ *où* $\langle S \rangle$ *est l'idéal engendré par* S

3) $V(S) \cup V(S') = V(S \cap S')$ *pour tous les idéaux* S, S' *.*

4) $\cap_{i \in J} V(S_i) = V(\Sigma_{i \in J} S_i)$ *où les* S_i *sont des idéaux de* $k[X_0, ..., X_n]$ *.*

5) $V(\langle 1 \rangle) = \emptyset = V(\langle X_0, X_1, ..., X_n \rangle$ *et* $V(\emptyset) = P^n(k)$ *.*

Les parties $V(S)$ sont donc les fermés d'une topologie dite de Zariski de $P^n k$, ou même d'un ensemble algébrique projectif, qui sont des parties de $P^n k$.

Une base d'ouverts standarts est formée par les parties $D^+(f) = \{x \in V / f\ (x) \neq 0\ \}$.

Remarque 19 *Pour* S *on peut prendre un ensemble fini de polynômes homogènes car* $k[X]$ *est noethérien, comme dans le cas affine lorsque* V *est un ensemble algébrique projectif on définit son idéal par* $I(V) = \{P \in k[X_0, X_1, ..., X_n] : P(x) = 0, x \in V\}$ *c'est un idéal homogène ie peut être engendré par des polynômes homogènes on note aussi* $\Gamma(V) = \frac{k[X_0, X_1, ..., X_n]}{I(V)}$ *.*

Lorsqu'on veut compléter une variété affine définie par les polynômes $P_1, P_2, ..., P_r \in k[X_1, ..., X_n]$, on les rendent homogènes dans $k[X_0, X_1, ..., X_n]$ par l'opération :

$P_h(X_0, X_1, ..., X_n) = X_0^d P(\frac{X_1}{X_0}, ..., \frac{X_n}{X_0})$, où $d = d^\circ P$ pour arriver aux points à l'infini si il y on a par exemple .Le parabole d'équation $Y = X^2 + bX + c$ devient dans $P^2 k$ l'ensemble :$\{(x, y, t) \in P^2 k : yt = x^2 + bxt + ct^2\}$

On peut définir un faisceau d'anneaux sur un ensemble algébrique projetif V ,lorsque le corps k et algébriquement clos par $\mathcal{F}(D^+(f)) = \Gamma(V)_{(f)} = \left\{ \frac{a}{f^r} / a \in \Gamma(V); d^\circ a - r d^\circ f = 0 \right\}$ où a, f sont bien sûr des polynômes homogènes

Proposition 20 *Un ensemble algébrique projetif est une variété algébrique au sens de la définition15, lorsqu'on le muni du faisceau défini ci-dessus*

Preuve. On peut recouvrir un ensemble algébrique projectif par des ouverts affines dont la restriction du faisceau précédent donne la structure de variété algébrique affine en question. ■

2.2 Dimension d'une variété

Définition 21 *Une partie fermée non vide Y d'un espace topologique X est dite irréductible si on ne peut pas l'écrire sous la forme d'union $Y = Y_1 \cup Y_2$ pour deux fermés propres de Y ($Y \neq Y_1$ et $Y \neq Y_2$). En d'autres termes si $Y = Y_1 \cup Y_2$ avec Y_i fermés de Y alors $Y = Y_1$ ou $Y = Y_2$.*

Une chaîne de fermés irréductibles de l'espace topologique X est une suite finie strictement croissante de fermés irréductibles $X_0 \subset X_1 \subset ... \subset X_n$, n s'appelle la longueur de la chaîne,(les $X_i \subset X$ sont distincts). La dimension de X est par définition la longueur maximale des chaînes de fermés irréductibles si elle existe, sinon on dit que X est de dimension infinie .

Définition 22 *La dimension de Krull d'un anneau commutatif unitaire A c'est la longueur maximale des chaînes d'idéaux premiers P_i de A, c.à.d $P_0 \subset P_1 \subset ... \subset P_n$ où P_i sont premiers et distincts ,lorsque la chaîne est maximale,* $\dim A = n$*.sinon la dimension est infinie*

Théorème 23 *Si A est une $k-$algèbre de type fini et intégre alors la dimension de A est le degré de transcendance sur k du corps de fractions de A.*

Preuve. Voir [11] ■

Exemple 24 *1) Une variété algébrique affine V est irréductible ssi son idéal $I(V)$ est premier, donc ssi $\Gamma(V)$ est un anneau intègre.*

2) Tout espace topologique séparé X qui contient au moins deux éléments n'est jamais irréductible, car il existe alors deux ouverts disjoints voisinages des deux points en question, leurs complémentaires sont des fermés propres qui recouvrent X.

3) La dimension d'un espace séparé est zéro. Avec la topologie euclidienne de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, et même pour n'importe quelle partie de ces derniers la dimension donnée plus haut est zéro, ce qui contredit notre intuition géométrique de la dimension. Il faut donc prendre la topologie de Zarski et calculer la dimension avec. Par exemple la boule ouverte $X = B_n(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n$ (un polynôme nul sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est identiquement nul) et $\dim X = \dim adh_{Zari} X$ qui donne n pour la boule. On remarque que cela marche pour les espaces topologiques X inclus dans k^n ou $P^n k$ pour un corps k, c'est pour cela que la définition ne porte rien pour les espaces qui ne sont pas de type Zariski .Cela ne marche que si X est un semi-algébrique de $\mathbb{R}^n$ car si $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin x\}$ qui n'est ni algébrique ni semi-algébrique $adh_{Zar} X = \mathbb{R}^2$ et $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ normalement $\dim X = 1$ puisque c'est une courbe (non algébrique).

4) La dimension de $V = \{(x, y) \in k^2 : y = x^2\}$ est 1 car le degré de transcendance du corps de fractions de $\frac{k[X,Y]}{\langle Y - X^2 \rangle}$ sur k est 1.

Pour la géométrie algébrique réelle on prend des corps réellement clos qui sont des corps qui ressemble à $\mathbb{R}$ c.à.d dont la seule extension algébrique c'est $\frac{\mathbb{R}[X]}{\langle X^2+1 \rangle}$ algébriquement clos tel que on peut définir une relation d'ordre compatible avec la structure de corps, et on ne concidère pas seulement les ensembles algébriques qui sont des zéros d'un certain nombre de polynômes mais aussi les ensembles qui sont défini par les inégalités sur ces derniers. En remarquant que la projection d'un ensemble algébrique comme le cercle de $\mathbb{R}^2$ dans l'axe des x c'est un intervale fermé, il existe une technique trés puissante qui est le spectre réel analogue au spectre de Zariski, mais qui est un peut différent.

Passons maitenant à l'introduction des corps réels et la géométrie sur ces corps.

2.2.1 Corps réel

Définition 25 *Un corps réel est un couple $(K, \leq)$ où K est un corps et $\leq$ est une relation d'ordre total qui vérifie :*

1) $x \leq y$ et $x' \leq y'$ alors $x + x' \leq y + y'$

2) $x \leq y$ et $0 \leq z$ alors $xz \leq yz$

Remarque 26 *Tous les carrés sont positifs .*

Tous les sommes de carrés sont positifs .

-1 n'est pas positif.

Un corps réel est de caractéristique zéro (il contient $\mathbb{Q}$). Sinon K étant de caractéristique p non nul ,alors on aurait $0 = 1 + 1 + ... + 1.$ $p - fois$ et donc $-1 = 1 + 1 + ... + 1$ qui doit étre positif .Un corps réel est donc une extension de $\mathbb{Q}$.

Le corps $\mathbb{C}$ des complexes n'est pas réel car $i^2 = -1$ doit être positif .

Définition 27 *Un corps réel clos est un corps réel qui ne posséde pas une extension algébrique réelle non triviale dont l'ordre étend l'ordre initial. Si $(R, \leq)$ est un corps réel clos $\frac{R\ [X]}{\langle X^2+1 \rangle}$ est algébriquement clos, la réciproque est aussi vraie.*

Dans un corps réel clos tout élément positif α est un carré,ou d'une autre façon les polynômes irréductibles de $R\ [X]$ sont de la forme $X + a$ ou $X^2 + bX + c$ avec $b^2 - 4c < 0$

2.3 Ensemble semi-algébrique

R désigne un corps réel clos.

Définition 28 *Les ensembles semi-algébriques de R^n c'est la plus petite collection de parties de R^n qui contient les ensembles de la forme $\{x \in R^n : P(x) < 0\}$ avec P un polynôme de $R[X_1, ..., X_n]$ est stable par union finie, intersection finie, et passage au complémentaire.*

Un semi-algébrique de R^n donc peut s'écrire comme union finie d'ensembles de la forme $\{x \in R^n : f(x) = 0; g_1(x) < 0; ...g_n(x) < 0\}$ où f et g_i sont des pôlynômes de $R[X_1, ..., X_n]$. Un ensemble algébrique est aussi semi-algébrique.

Un semi-algébrique de R est réunion finie de points et d'intervalles ouverts $]a, b[= \{x \in R : a < x < b\}$, car un polynôme (ou plusieurs polynômes) en une seule variable, non identiquement nul, s'annule en un ensemble fini de points et garde un signe constant sur un nombre fini d'intervalles ouverts.

Le principe de Tarski-Seidenberg dit que la projection d'un ensemble semi-algébrique est aussi semi-algébrique, qu'on peut l'énoncer sous la forme suivante :

Proposition 29 *Si S est un ensemble semi-algébrique de R^{n+1} alors $\Pi(S)$ est semi-algébrique de R^n, où $\Pi : R^{n+1} \to R^n$ est l'application définie par*

$\Pi(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) = (x_1, ..., x_n)$.

Voir [3] pour la démonstration.

Définition 30 *Si $A \subset R^n$ et $B \subset R^m$ sont deux ensembles semi-algébriques, une application $f : A \to B$ est dite semi-algébrique lorsque son graphe est un ensemble semi-algébrique de R^{n+m}.*

A l'aide de cette définition l'ensemble des fonctions semi-algébriques de A dans R où A est semi-algébrique, forment un anneau commutatif unitaire. On tire aussi que l'image d'une partie semi-algébrique par une application semi-algébrique est semi-algébrique.

La démonstration est dans (3) (BCR)

Théorème 31 (Saucissonage) *Si $f_1(X, Y), f_2(X, Y), ..., f_s(X, Y)$ sont des polynômes de $R[X_1, X_2, ..., X_n, Y]$, alors il existe une partition finie de R^n en semi-algébriques $A_1, A_2, ..., A_m$ et pour $i = 1, 2, ..., m$ un nombre fini de fonctions semi-algébriques continues $\xi_{i,1} < \xi_{i,2} < ... < \xi_{i,l_i} : A_i \to R$ telles que*

1) pour tout $x \in A_i$ on a $\left\{\xi_{i,1}(x), \xi_{i,2}(x), ..., \xi_{i,l_i}(x)\right\}$ est l'ensemble des racines des polynômes $f_1(x, Y), f_2(x, Y), ..., f_s(x, Y)$ non identiquement nuls.

2) pour tout $x \in A_i$, les signes de $f_k(x, y)$ ne dépendent que des signes de $y - \xi_{i,j}(x)$ pour tout $j = 1, 2, ..., l_i$. En particulier le graphe de $\xi_{i,j}$ est contenu dans les zéros d'un f_k, où k dépend seulement de i et j.

Preuve. : Voir ([3]) ■

Corollaire 32 *Tout ensemble semi-algébrique $A \subset R^n$ est une réunion disjointe d'un nombre fini d'ensembles semi-algébriques $A = \cup_{i=1}^r S_i$, où S_i est semi-algébriquement homéomorphe à un pavé ouvert $]0, 1[^{d_i}$ pour un $d_i \in \mathbb{N}$,qui est un point lorsque $d_i = 0$*

Preuve. Par récurrence sur n ; si $n = 1$ c'est clair car un semi-algébrique de R est une réunion d'un nombre fini de points qui sont homéomorphe à $]0, 1[^0$,et d'intervales ouverts qui sont semi-algébriquement homéomorphe à $]0, 1[$. Si le résultat est vrai pour n et $A \subset R^{n+1}$ semi-algébrique on peut utiliser le théorème précédant avec les polynômes $f_1, f_2, ..., f_s \in R[X_1, X_2, ..., X_n, Y]$ qui définissent A on aura un saucissonage $(A_i, \xi_{i,j})$ où $A_i \subset R^n$, $\xi_{i,j} : A_i \to R$ des fonctions semi-algébriques qui donnent les zéros des polynômes non identiquement nuls parmis $f_1, f_2, ..., f_s$ et que A est réunion des graphes de $\xi_{i,j} = \{(x, y) \in R^{n+1} : x \in A_i, y = \xi_{i,j}(x)\}$ et des tranches en nombre fini de la forme $]\xi_{i,j}, \xi_{i,j+1}[= \{(x, y) \in R^{n+1} : x \in A_i, \xi_{i,j}(x) < y < \xi_{i,j+1}(x)\}$ qui est semi-algébriquement homéomorphe à $A_i \times]0, 1[$ par hypothèse de récurrence puisque les $A_i \subset R^n$ on deduit le résultat. ■

Chapitre 3

Spectre de Zariski et Spectre Réel

Comme au chapitre premier, à un ensemble algébrique V de k^n (ou même $P^n k$ dans le cas projectif) on a fait correspondre l'anneau $\Gamma(V)$ qui est une $k-$algèbre de type fini et réduite ; l'étude se résume à cet anneau par exemple les points de V sont en correspondance biunivoque avec les idéaux maximaux de $\Gamma(V)$ lorsque k est algébriquement clos ,et que pour une fonction régulière entre deux variétés $V \xrightarrow{f} V'$,on a un homomorphisme de k -algèbre

$$\varphi_f : \Gamma(V') \to \Gamma(V)$$

défini par $\varphi_f(p) = p \circ f$

Pour tout homomorphisme de $k-$algèbre $\varphi : \Gamma(V') \to \Gamma(V)$ on défini une application

$$\begin{aligned} \varphi^* &: Hom_{k\mathrm{a}\lg}(\Gamma(V), k) \to Hom_{k\mathrm{a}\lg}(\Gamma(V'), k) \\ \varphi^*(\theta) &= \theta \circ \varphi \end{aligned}$$

bien sûr $\theta : \Gamma(V) \to k$ non nul détermine un point de V c.à.d ,un idéal maximal de $\Gamma(V)$ de même que $\theta \circ \varphi$ aussi détermine un point de V' donc il y a une application $V \to V'$ qui à tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\Gamma(V)$ fait correspondre l'idéal maximal $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ de $\Gamma(V')$.

Mais si on remplace l'anneau $\Gamma(V)$ par un anneau commutatif unitaire A quelconque le problème qui se pose c'est que si $\varphi : A \to B$ est un homomorphisme d'anneaux unitaires pour un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de B, $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ n'est pas forcément maximal de A, mais seulement un idéal premier, donc au lieu de prendre $SpmA$ comme les idéaux maximaux on prend $SpecA$, l'ensemble des idéaux premiers de A.

3.1 Topologie de Zariski sur le spectre d'un anneau

Définition 33 *Si A est un anneau commutatif unitaire on note $SpecA$ l'ensemble des idéaux premiers p de A, qui s'appelle le spectre de l'anneau A.*

On va définir une topologie sur $SpecA$, en posant pour toute partie $\mathfrak{a} \subset A$, $V(\mathfrak{a}) = \{p \in SpecA : \mathfrak{a} \subset p\}$. On vérifie que si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ alors $V(\mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a})$ et que $V(\mathfrak{a}) = V(\langle \mathfrak{a} \rangle)$ où $\langle \mathfrak{a} \rangle$ est l'idéal de A engendré par la partie $\mathfrak{a}$, c'est pour ça qu'on considère seulement les $V(\mathfrak{a})$ pour les idéaux $\mathfrak{a}$ de A.

Propriétés

1. $V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}})$
2. $V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{b})$ ssi $\sqrt{\mathfrak{b}} \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$
3. $V(0) = SpecA$
4. $V(A) = \emptyset$
5. $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$
6. $\cap_{i \in S} V(\mathfrak{a}_i) = V(\Sigma_{i \in S} \mathfrak{a}_i)$ pour une famille quelconque $\{\mathfrak{a}_i\}_{i \in S}$ d'idéaux de A.

On va vérifier la première propriété les autres sont par exemple dans [10]

On a $\mathfrak{a} \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$ donc $V(\sqrt{\mathfrak{a}}) \subset V(\mathfrak{a})$ inversement si $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$ alors $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ pour montrer que $\mathfrak{p} \in V(\sqrt{\mathfrak{a}})$ il faut que $\sqrt{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{p}$ or pour tout $x \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ il existe $n \in \mathbb{N}$ $x^n \in \mathfrak{a}$ donc $x^n \in \mathfrak{p}$ (car $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$) donc $x \in \mathfrak{p}$ (car $\mathfrak{p}$ est premier) et en fin $\sqrt{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{p}$

On voit que les parties de la forme $V(\mathfrak{a})$ constituent les fermés d'une topologie sur $SpecA$ appelé Topologie de Zariski, les points fermés pour cette topologie sont les idéaux maximaux de A, car si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal alors $adh_{Zar}\{\mathfrak{m}\} = \overline{\{\mathfrak{m}\}} = V(\mathfrak{m}) = \{p \in SpecA, \mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{m}\}$.

Lorsque A est intégre ,$\{0\}$ qu'on note tout simplement $0 \in SpecA$ et son adhérence c'est $SpecA$ tout entier car $\overline{\{0\}} = V(0) = \{p \in SpecA, 0 \subset \mathfrak{p}\} = SpecA$. Un élément dans un espace topologique qui vérifie cette propriété s'appelle point générique .

Exemple 34 *1)* $Spec\mathbb{Z} = \{0\} \cup \{\langle p \rangle : p \text{ premier de } \mathbb{N}\}$.

2) $Speck[X,Y] = \{0\} \cup \{\langle X-a, Y-b \rangle : a, b \in k\} \cup \{\langle p(X,Y) \rangle : p(X,Y) \text{ polynôme irréductible}\}$

Il y a donc 0 qui est un point générique, les idéaux maximaux $\langle X-a, Y-b \rangle$ qui sont en correspondance biunivoque avec les points de k^2, ils sont donc fermés, et les idéaux $\langle p(X,Y) \rangle$ premiers lorsque $p(X,Y)$ est un polynôme irréductible non constant, ces points du spectre ne sont pas maximaux lorsqu'il existe $(a,b) \in k^2$ tel que $p(a,b) = 0$ car dans ce cas $\langle p(X,Y) \rangle \subset \langle X-a, Y-b \rangle$ et ce point est adhérent à $\langle p(X,Y) \rangle$

Il y a une base d'ouverts de $SpecA$ formée par des parties $D(f) = SpecA - V(f) = \{\mathfrak{p} \in SpecA : f \notin \mathfrak{p}\}$ car tout ouvert $U = SpecA - V(\mathfrak{a}) = SpecA - \cap_{f \in \mathfrak{a}} V(f) = \cup_{f \in \mathfrak{a}} (SpecA - V(f)) = \cup_{f \in \mathfrak{a}} D(f)$.

On définit un faisceau sur $SpecA = X$ pour le munir d'une structure d'espace localement annelé (X, O_X) en posant $O_X(D(f)) = A_f = \left\{\frac{a}{f^n} : a \in A, n \in \mathbb{N}\right\}$. La condition de recollement c'est un peut difficile on peut voir par exemple [13]

Il faut mettre $O_X(U) = \left\{ \begin{array}{c} s : U \to \amalg_{\mathfrak{p} \in U} A_p : \forall \mathfrak{p} \in U, s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}, \text{ et } \forall \mathfrak{p} \in U \exists V \subset D(f), \\ \forall \mathfrak{q} \in V,\ s(\mathfrak{q}) = \text{image de } \frac{a}{f} \text{ dans } A_{\mathfrak{q}} \end{array} \right\}$

$O_{X,\mathfrak{p}}$ la fibre au point $\mathfrak{p} \in SpecA$ c'est $A_{\mathfrak{p}}$ localisé de l'anneau A en l'idéal premier $\mathfrak{p}$.

3.2 Le principe de Tarski-Seidenberg et Spectre Réel

3.2.1 Langage du premier ordre $\mathcal{L}^1(R)$ des corps ordonnés

Si R est un corps réel clos (donc contient $\mathbb{Q}$), on peut identifier un polynôme $f \in R[X_1, X_2, ...X_n]$ avec sa fonction polynomiale $f : R^n \to R$.

Langage $\mathcal{L}^1(R)$

Le langage $\mathcal{L}^1(R)$ du premier ordre des corps ordonnés à paramétres dans R, comme tout langage du premier ordre ; ses formules atomiques sont de deux types :

1. $f(x_1, ..., x_n) = 0$
2. $f(x_1, ..., x_n) < 0$

où $f \in R[X_1, X_2, ...X_n]$ est un polynôme.

Les autres formules se construisent par induction :

-Une formule atomique est une formule de $\mathcal{L}^1(R)$

-Si F est une formule de $\mathcal{L}^1(R)$, alors (non$F$) est une formule de $\mathcal{L}^1(R)$

-Si F, G sont deux formules alors $F \wedge G$, $F \vee G$, $F \Rightarrow G$ et $F \Longleftrightarrow G$ sont des formules de $\mathcal{L}^1(R)$

-Si F est une formule et x est une variable alors $\exists xF$, $\forall xF$ sont des formules de $\mathcal{L}^1(R)$

Si $x_1, x_2, ..., x_n$ sont les variables libres d'une formule ϕ (ceux qui ont une occurrence non quantifiée) on note la formule par $\phi(x_1, x_2, ..., x_n)$.

3.2.2 Principe de Tarski-Seidenberg

Une version du principe de Tarski-Seidenberg dit qu'un ensemble $S \subset R^n$ est semi-algébrique s'il y a une formule $\phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ de $\mathcal{L}^1(R)$ telle que

$$S = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n : \phi(x_1, x_2, ..., x_n)\}$$

L'élimination des quantificateurs existenciels se fait à l'aide de ce principe : projection d'un ensemble semi-algebrique est un ensemble semi-algébrique, de même pour le quantificateur universel .Cette version dit simplement qu'une formule de $\mathcal{L}^1(R)$ est équivalente à une formule sans quantificateurs .

Exemple 35 *La sphère* $S^2 = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$ *qui est algébrique, sa projection dans* R^2 *donne le disque* $D = \{(x, y) \in R^2 : \exists z \in R, (x, y, z) \in S^2\}$
$= \{(x, y) \in R^2 : \exists z \in R, x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$ *si on veut éliminer le quantificateur* $\exists$, *on utilise l'équivalence* $\exists z \in R, x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 - 1 \leq 0$ *qui donne le disque* $D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 - 1 \leq 0\}$.

Si R est un corps réel clos et K est une extension réelle close de R alors $\mathcal{L}^1(R)$ est un sous langage $\mathcal{L}^1(K)$. Une autre version du principe s'énonce de la façon suivante :

Proposition 36 *Si* K *est une extension réelle close de* R *et si* $\phi(x_1, ..., x_n)$ *est une formule de* $\mathcal{L}^1(R)$ *(donc aussi de* $\mathcal{L}^1(K)$*), alors l'ensemble semi-algébrique* $S = \{x \in R^n : \phi(x)\}$ *de* R^n *n'est pas vide si et seulement si* $\{x \in K^n : \phi(x)\}$ *de* K^n *n'est pas vide.*

Preuve. Voir [3] proposition 4-1-1 ■

Conséquences

1. L'ensemble semi-algébrique $\{x \in K^n : \phi(x)\}$ dépend seulement de $S = \{x \in R^n : \phi(x)\} \subset R^n$ et pas de la formule $\phi(x)$ on le note S_K, et on l'appelle extension de S à K
2. Si $S \subset R^{n+1}$ un ensemble semi-algébrique alors $\Pi_K(S_K) = (\Pi(S))_K$, où $\Pi : R^{n+1} \to R^n$ et $\Pi_K : K^{n+1} \to K^n$ désignent les projections sur les n premières composantes.
3. Si $A \subset R^n$, $B \subset R^m$ sont deux ensembles semi-algébriques et $f : A \to B$ est une fonction semi-algébrique, alors il existe une seule fonction semi-algébrique $f_K : A_K \to B_K$ telle que $(Graphe f)_K = Graphe f_K$ c'est à cause du fait que le graphe de f est décrit par une formule de $\mathcal{L}^1(R)$ donc la même formule nous donne le graphe d'une fonction de A_K vers B_K lorsqu'on la considére dans $\mathcal{L}^1(K)$.

3.2.3 Idéal réel

Avant de définir le spectre réel on a besoin de la notion d'idéal réel d'un anneau quelconque A.

Définition 37 *Soit A un anneau, un idéal $I \subset A$ est dit réel si pour toute suite finie $a_1, a_2, ..., a_p$ d'éléments de A telles que $a_1^2 + ... + a_p^2 \in I$ on a ; $a_1 \in I, ..., a_p \in I$*

Exemple 38 *1) $A = \mathbb{Z}$ il y a seulement deux idéaux réels (qui sont triviaux) $I = 0$ et $I = \mathbb{Z}$, car si $I \neq (0)$ est réel il contient un nombre naturel et non nul $n \in I$ mais $n = 1^2 + 1^2 + ... + 1^2 \in I$ donc $1 \in I$ et $I = \mathbb{Z}$.*

2) Même chose pour $A = \mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right] = \left\{n + m\sqrt{d}/n, m \in \mathbb{Z}\right\}$ et d n'est pas un carré dans $\mathbb{Z}$, il y a seulement $I = 0$, $I = A$ qui sont réels car si $0 \neq n + m\sqrt{d} \in I$ alors $\left(n + m\sqrt{d}\right)\left(n - m\sqrt{d}\right) = n^2 - dm^2 \in I$ donc si d n'est pas un carré alors $n^2 - m^2 d \neq 0$ dans I donc $1 \in I$

3) $A = \mathbb{R}[X]$ un idéal de la forme $I = \langle X - \alpha \rangle$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, est réel mais $I = \langle f(X) \rangle$ où f n'est pas constant et n'admetant pas de racines comme $\langle X^2 + 1 \rangle$ n'est pas réel, plus généralement un idéal $I = \langle f \rangle$ dans $\mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ qui est non trivial pour que I soit réel il faut et il suffit que f change de signe c.à.d il existe $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x)f(y) < 0$

4)$A = \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ il n'y a que $I = A$ qui soit réel, même $I = 0$ ne l'est pas car $0 = 1^2 + i^2$ alors $1 \in I$

3.3 Cône premier

Définition 39 *Si A est un anneau commutatif unitaire, un cône premier de A est une partie $\alpha \subset A$ qui vérifie :*

1) $\alpha + \alpha \subset \alpha$ où $\alpha + \alpha = \{x + y/x \in \alpha, y \in \alpha\}$

2) $\alpha.\alpha \subset \alpha$ où $\alpha.\alpha = \{x.y/x \in \alpha, y \in \alpha\}$

3) Pour tout $x \in A$, $x^2 \in \alpha$

4) $-1 \notin \alpha$

5) Pour tout x, y dans A si $xy \in \alpha$ alors $x \in \alpha$ ou $-y \in \alpha$

Un cône premier α de A vérifie forcément $\alpha \cup -\alpha = A$ où $-\alpha = \{-x : x \in \alpha\}$ car $\alpha \cup -\alpha \subset A$ et pour tout $x \in A$, $x^2 \in \alpha$ donc $x \in \alpha$ ou $-x \in \alpha$ par 5)

Proposition 40 *A est un anneau qui est commutatif unitaire et $\alpha \subset A$ est un cône premier , alors $\alpha \cap -\alpha$ est un idéal premier réel noté $Supp\alpha$ (support de α)*

Preuve. $0 \in \alpha \cap -\alpha$ car $0 = 0^2$ si $x \in \alpha \cap -\alpha$ alors il est clair que $-x \in \alpha \cap -\alpha$. Si $x, y \in \alpha \cap -\alpha$ alors $x \in \alpha$ et $x \in -\alpha$, $y \in \alpha$ et $y \in -\alpha$ donc $x + y \in \alpha$ et $x + y \in -\alpha$ c.à.d $x + y \in \alpha \cap -\alpha$.

Si $x \in \alpha \cap -\alpha$ et $a \in A$ alors il y a deux cas :

1) $a \in \alpha$ donc $ax \in \alpha$ et $-ax \in \alpha$,donc $ax \in \alpha \cap -\alpha$

2) $-a \in \alpha$ donc $-ax \in \alpha$ et $ax \in \alpha$ donc $ax \in \alpha \cap -\alpha$.

Donc $\alpha \cap -\alpha$ est un idéal.

Il est premier car si $xy \in \alpha \cap -\alpha$ donc ($xy \in \alpha$ et $xy \in -\alpha$) donc ($x \in \alpha$ ou $-y \in \alpha$) et ($-x \in \alpha$ ou $-y \in \alpha$) donc par distribution on a :

ou bien : ($x \in \alpha \wedge -x \in \alpha$) donc $x \in \alpha \cap -\alpha$,

ou ($x \in \alpha \wedge -y \in \alpha$) donc si $-x \notin \alpha$ alors $y \in \alpha$ et donc $y \in \alpha \cap -\alpha$,

ou ($-x \in \alpha \wedge -y \in \alpha$) donc si $y \notin \alpha$ alors $x \in \alpha$ et donc $x \in \alpha \cap -\alpha$,

ou ($-y \in \alpha \wedge -y \in \alpha$) donc si $y \notin \alpha$ alors $-x \in \alpha$ et $x \in \alpha$ qui implique aussi $x \in \alpha \cap -\alpha$.

Dans tous les cas on a $x \in \alpha \cap -\alpha$ ou $y \in \alpha \cap -\alpha$.

Montrons que $\sup p\alpha$ est réel , si $a_1^2 + ... + a_p^2 \in \alpha \cap -\alpha$,alors $a_1^2 + ... + a_p^2 \in \alpha$ (qui est toujours vraie et ne donne rien) et $-a_1^2 - ... - a_p^2 \in \alpha$ et puisque toujours $a_2^2 + a_3^2 ... + a_p^2 \in \alpha$ on tire par addition que $-a_1^2 \in \alpha$ donc $-a_1 \in \alpha$ ou $-a_1 \in \alpha$ c.à.d $-a_1 \in \alpha$ de même $-a_1^2 = a_1(-a_1) \in \alpha$ donc $a_1 \in \alpha$ ou $a_1 \in \alpha$ toujours par la condition 5). Enfin on arrive à $a_1 \in \alpha$ et $a_1 \in -\alpha$ c.à.d $a_1 \in \alpha \cap -\alpha$; de même pour les autres a_i. ■

Conséquence : lorsque $\alpha \subset A$ est un cône premier on peut ordonner le corps de fraction $Fr\left(\frac{A}{Supp\alpha}\right)$ par $\frac{\bar{a}}{\bar{b}} \geq 0$ si seulement si $ab \in \alpha$.

Remarque 41 *1) $\frac{A}{Supp\alpha}$ est ordonné par la relation $\bar{a} \leq \bar{b}$ si et seulemnt si $b - a \in \alpha$ (où a et b sont dans A) ,qui est bien définie. Il suffit de voir que si $\bar{a} = \bar{a}'$ et $\bar{b} = \bar{b}'$ et que si $b - a \in \alpha$ (qui veut dire $\bar{a} \leq \bar{b}$) on aura aussi $b' - a' \in \alpha$ (qui veut dire $\bar{a}' \leq \bar{b}'$).*

$\bar{a}=\bar{a}'$ alors $a'-a\in\alpha\cap-\alpha$ et donc $a-a'\in\alpha$,

$\bar{b}=\bar{b}'$ alors $b'-b\in\alpha\cap-\alpha$ et donc $b'-b\in\alpha$ mais on a déja $b-a\in\alpha$ donc $b'-a'=(b'-b)+(b-a)+(a-a')\in\alpha$

2) Pour un corps k si α est un cône propre alors $\alpha\cap-\alpha=\{0\}$ car c'est le seul idéal de k qui ne contient pas -1. Si $k=\mathbb{Q}$ les nombres rationels, le seul cône propre c'est $\alpha=\Sigma k^2$ avec la notation $\Sigma k^2=\{x\in k:\exists a_1,a_2,...,a_n\in k,x=a_1^2+...+a_n^2\}$ et tout nombre positif de $\mathbb{Q}$ est une somme de quatre carrés car si $x=\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ avec $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}^*$ on a

$$x=\frac{a}{b}=\frac{ab}{b^2}=\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}{b^2}=\left(\frac{x_1}{b}\right)^2+\left(\frac{x_2}{b}\right)^2+\left(\frac{x_3}{b}\right)^2+\left(\frac{x_4}{b}\right)^2$$

Pour $k=\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]=\left\{a+b\sqrt{2}/a,b\in\mathbb{Q}\right\}$,le nombre positif $\sqrt{2}$ ne peut pas s'ecrire comme somme de carrés d'éléments de $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ car si $\sqrt{2}=\left(a+b\sqrt{2}\right)^2=a^2+2b^2+2ab\sqrt{2}$ alors $a^2+2b^2=0$ donc $a=b=0$ impossible ; même chose pour $\sqrt{2}=\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)^2+\left(a_2+b_2\sqrt{2}\right)^2+...+\left(a_n+b_n\sqrt{2}\right)^2$ qui est aussi impossible

3.4 Spectre Réel

L'analogue du spectre de Zariski en géométrie algébrique réelle c'est le spectre réel d'un anneau A, mais au lieu de prendre les idéaux premiers on prend les cônes premiers de A. Si A n'est pas ordonnable (qui est équivalent à $-1\in\Sigma A^2$) son spectre réel est vide, on définit de même une topologie sur l'ensemble des cônes premiers en donnant une base d'ouverts. Le cas intéressant c'est lorsque A est l'anneau des fonctions régulières $\Gamma(V)=\frac{R[X_1...X_n]}{I(V)}$ où V est un ensemble algébrique sur un corps réel clos R.

Il y a une opération intéressante c'est l'opération Tilde, qui fait correspondre à chaque partie semi-algébrique S de V une partie $\tilde{S}$ de $Spec_rA$ qui porte presque les mêmes propriétés que S d'ailleur elle est définie par la même formule de $\mathcal{L}^1(R)$ dans une famille de corps tous extensions réelles closes de R.

Si A est un anneau commutatif unitaire et α est un cône premier de A, on a vu que

α détermine un ordre sur le corps des fractions de $\frac{A}{Supp\alpha}$ défini par $0 \leq \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$ ssi $ab \in \alpha$, et on sait que tout corps ordonné admet une cloture réelle unique à isomorphisme près (les isomorphismes des corps ordonnés présérvent l'ordre : $x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$), si $a \in A$ on note $a(\alpha)$ son image par les applications canoniques :

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & \dfrac{A}{Supp\alpha} \xrightarrow{i} Fr\left(\dfrac{A}{Supp\alpha}\right) \rightarrow R \\ a & \mapsto & a(\alpha) \end{array}$$

R est la clôture réelle de $Fr\left(\frac{A}{Supp\alpha}\right)$ qu'on note $k(\alpha)$, qui ne dépend que de A et le cône premier α. $a(\alpha)$ est donc un élément de $k(\alpha)$ qui est ordonné. Dans ce cas on a :

$a(\alpha) = 0$ ssi $a \in Supp\alpha = \alpha \cap -\alpha$, car il doit être nul dans $A/\alpha \cap -\alpha$.

$a(\alpha) \geq 0$ ssi $a \in \alpha$, car c'est l'image d'un élément positif $\frac{\bar{a}}{1}$ dans $k(\alpha)$, donc $a.1 \in \alpha$.

Enfin $a(\alpha) > 0$ équivalent à $a(\alpha) \geq 0$ et $a(\alpha) \neq 0$ donc $a \in \alpha$ et $a \notin \alpha \cap -\alpha$, qui est $a \notin -\alpha$.

Définition 42 *Si A est un anneau commutatif unitaire, l'ensemble :*

$Spec_r A = \{\alpha : \alpha$ est un cône premier de $A\}$, est un espace topologique, en prenant la base d'ouverts formée des parties de type :

$$\tilde{U}(a_1, a_2, ..., a_n) = \{\alpha \in Spec_r A : a_1(\alpha) > 0 \wedge a_2(\alpha) > 0 \wedge ... \wedge a_n(\alpha) > 0\}$$

cet espace topologique s'appelle le spectre réel de l'anneau A .

On remarque que $\tilde{U}(a_1, a_2, ..., a_n) \cap \tilde{U}(b_1, b_2, ..., b_n) = \tilde{U}(a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n)$ et ça tombe bien donc.

Exemple 43 *Si $A = R[X]$ l'anneau des polynômes d'une seule variable sur un corps réel clos R, les idéaux premiers réels sont de deux genres .*

1) $I = \langle X - a\rangle$ ou $a \in R$; $I = Supp\alpha$ donc $A/Supp\alpha = \frac{R[X]}{\langle X-a\rangle} \simeq R$ qui est ordonné naturelement, si $f \in A = R[X]$, α un cône premier correspondant à I, $f(\alpha) = \bar{f}$ la classe *de* f *dans* $\frac{R[X]}{\langle X-a\rangle}$ *qui est simplement* $f(a)$ *l'évaluation du polynôme* f *au point* $a \in R$*, et* $\alpha = \{f \in R[X] : f(\alpha) \geq 0\} = \{f \in R[X] : f(a) \geq 0\}$ *on le note* P_a*, donc il n'y a qu'un seul cône premier* P_a *correspondant à* I *, qui donne un seul élément du* $Spec_r R[X]$ *et qui ne dépend que de* $a \in R$*, ce cône est identifié par la suite avec a (on peut dire donc que* R *est une partie du* $Spec_r R[X]$ *avec cette identification* $a \leftrightarrow P_a$*).*

2)$I = \langle 0\rangle$ *donc* $\frac{A}{Supp\alpha} = R[X]$ *son corps des fractions est* $R(X)$*, il faut l'ordonné pour trouver le cône* α *c.à.d il faut placer l'indéterminée* X *dans un endroit (comme les coupures de Dedekind) .*

Ou bien on met $X < x$ *pour tout* $x \in R$*, le cône* α *devient :*

$\alpha = \{f \in R[X] : \exists m \in R, \forall x < m, f(x) \geq 0\}$ *c'est tout les polynômes qui sont positifs au voisinage de* $-\infty$*, ce point est noté* $-\infty \in Spec_r R[X]$*.*

Ou bien $x > X$ *pour tout* $x \in R$ *on trouve* $\alpha = \{f \in R[X] : \exists m \in R, \forall x > m, f(x) \geq 0\}$ *les polynômes qui sont positifs au voisinage de* $+\infty$*, ce point est noté* $+\infty \in Spec_r R[X]$*.*

Si on place X *juste à droite d'un élément* $a \in R$*, ;* $X > a$ *et* $\forall x \in R$ *tel que* $x > a$ *on a* $X < x$ *, ce point est noté* $a_+ = \{f \in R[X] : \exists \varepsilon \in R, \varepsilon > 0, \forall x \in]a, a+\varepsilon[\, , f(x) \geq 0\}$*,* $a_+ \in Spec_r R[X]$*.*

La même chose avec a_-*, lorsqu'on place* X *juste à gauche de* $a \in R$ *;* $X < a$ *et* $\forall x \in R$ *tel que* $x < a$ *on a* $X > x$ *c.à.d* $a_- = \{f \in R[X] : \exists \varepsilon \in R, \varepsilon > 0, \forall x \in]a-\varepsilon, a[\, , f(x) \geq 0\}$*,* $a_- \in Spec_r R[X]$*.*

En tous $Spec_r R[X] = \{a : a \in R\} \cup \{a_+ : a \in R\} \cup \{a_- : a \in R\} \cup \{-\infty, +\infty\}$*.*

Les ouverts de la topologie de $Spec_r R[X]$ *:* $\tilde{U}(X-a) = \{\alpha \in Spec_r R[X] : (X-a)(\alpha) > 0\}$*. Si* $\alpha = x$ *est réel (*$x \in R$*) le corps résiduel c'est* $\frac{R[X]}{\langle X-x\rangle} \simeq R$*, on a classe de* $X - a = x - a > 0 \Leftrightarrow x > a$ *qui donne* $]a, +\infty[$*. Sinon* $Supp\alpha = \{0\}$ *le corps résiduel* $R(X)$ *,*$x = x_+$ *ou* x_- *l'image* $(X-a)(\alpha)$ *c'est* $X - a$ *avec l'ordre défini par* α *qui donne* $X - a > 0$ *donc* $X > a$ *c'est tout les* x_- *où* $x > a$ *,et les* x_+ *donc* $\tilde{U}(X-a) = [a_+, +\infty]$*.*

On calcul de la même manière $\tilde{U}(-X+b) = [-\infty, b_-]$ *et* $\tilde{U}(X-a, -X+b) = \tilde{U}(X-a) \cap \tilde{U}(-X+b) = [a_+, b_-]$ *lorsque* $a < b$ *dans* R*.* $\tilde{U}(X^2+1) = \tilde{U}(X^2+bX+c) = Spec_r R[X]$ *si* $b^2 - 4c < 0$ *,et* $\tilde{U}(-X^2-1) = \tilde{U}(-X^2-bX-c) = \emptyset$ *si* $b^2 - 4c < 0$*.*

$\tilde{U}((X-a)(-X+b)) = [a_+, b_-] = \tilde{U}(X-a, -X+b)$. $\tilde{U}(X+a) = [-\infty, (-a)_-]$, $\tilde{U}(-X-a) = [(-a)_+, +\infty]$, $\tilde{U}(X+a) \cup \tilde{U}(-X-a) = [-\infty, (-a)_-] \cup [(-a)_+, +\infty] = Spec_r R[X] - \{-a\}$, $\tilde{U}(X^2) = Spec_r R[X] - \{0\}$.

Le théorème clef pour le spectre réel c'est le suivant lorsqu'on considére $A = \Gamma(V) = \frac{R[X_1,...,X_n]}{I(V)}$ où $V \subset R^n$ est ensemble algébrique .

Théorème 44 *1) L'application $\varphi : V \to Spec_r\Gamma(V)$ définie par*

$$\varphi(x) = P_x = \{f \in \Gamma(V) : f(x) \geq 0\}$$

est injective et induit un homéomorphisme de V avec la topologie euclidienne sur son image dans $Spec_r\Gamma(V)$ et donc on peut identifier V avec un sous espace du spectre ($V \subset Spec_r(\Gamma(V))$)

2) Si S est un sous-ensemble semi-algébique de V alors il existe un seul constructible $\tilde{S}$ du $Spec_r\Gamma(V)$ tel que $\tilde{S} \cap V = S$.

3) Si $S = \{(x_1, ..., x_n) \in V : \phi(x_1, ..., x_n)\}$ alors

$$\tilde{S} = \{\alpha \in Spec_r\Gamma(V) : \phi(X_1(\alpha), ..., X_n(\alpha)), vraie.dans.k(\alpha)\}$$

où ϕ est une formule de $\mathcal{L}^1(R)$ et $X_i(\alpha)$ l'image de $X_i \in \frac{R[X_1,...,X_n]}{I(V)} = \Gamma(V)$ dans la cloture réelle du corps des fractions de $\frac{\Gamma(V)}{Supp\alpha}$ qu'on a noté $k(\alpha)$.

Preuve. Voir [3] chapitre 7 ■

Un constructible de $Spec_r\Gamma(V)$ est une combinaison Booléenne des ouverts de base $\tilde{U}(f_1, f_2, ..., f_n)$; Un constructible de $Spec_r\Gamma(V)$ est toujours quasi-compact et réciproquement, tous ces résultats se trouvent dans [3].

On peut aussi définir un faisceau sur $Spec_r\Gamma(V)$ de la façon suivante :

Si $f : S \to R$ est une fonction semi-algébrique de $S \subset V$ qui doit être un semi-algébrique et si $\alpha \in \tilde{S}$ on peut évaluer la fonction f en α noté $f(\alpha)$ et qui est l'image de $X(\alpha) = (X_1(\alpha), ..., X_n(\alpha)) \in k(\alpha)^n$ par la fonction $f_{k(\alpha)} : S_{k(\alpha)} \to k(\alpha)$,($f(\alpha) \in k(\alpha)$)

et on peut montrer par le théorème précédant que si $U(f) = \{x \in S : f(x) > 0\}$ alors $\tilde{U}(f) = \{\alpha \in Spec_r\Gamma(V) : f(\alpha) > 0\}$.

Dans ce cas on définit le faisceau $\mathcal{F}$ sur $Spec_r\Gamma(V)$ par :

$\mathcal{F}(\tilde{U}) = \zeta^0(U) = \{f : U \to R$ fonction semi-algébrique continue $\}$. On remarque que $\mathcal{F}(\tilde{U})$ est un ensemble de fonctions sur U qui sont aussi des fonctions sur $\tilde{U}$ avec la façon précédante d'évaluer. Il faut démontrer la condition de recollement ;elle marche bien à cause de la quasi-compacité de $\tilde{U}$.

La fibre au point $\alpha \in Spec_r\Gamma(V)$ c'est l'anneau locale des germes de fonctions semi-algébriques en α c'est aussi la limite inductive $\zeta^0(U)$ avec $\alpha \in U$.

Un germe de fonctions semi-algébriques en α est une classe d'équivalence d'un couple (U, f), formé d'un ouvert semi-algébrique $U \subset V$ contenant α et d'une fonction semi-algébrique $f : U \to R$ par la relation d'équivalence $(U, f) \sim (U', f')$ ssi il existe un ouvert semi-algébrique W contenu dans $U \cap U'$ avec $\alpha \in W$ et que $f|_W = f'|_W$.

Exemple 45 *$V = R$ et $\alpha = 0_+$ la fibre $\mathcal{F}_{\tilde{R},0_+} = k(0_+)$ cloture réelle de $R(X)$ avec $X > 0$ dans R c'est les series de Puiseux algébriques sur R. Pour vérifier que $\mathcal{F}_{\tilde{R},0_+} \simeq k(0_+)$ il suffit de voir que l'homomorphisme $\varphi : \mathcal{F}_{\tilde{R},0_+} \to k(0_+)$ défini par $\varphi(f) = f(0_+)$ (où $f :]0, \varepsilon[\to R$ semi-algébrique),qui est surjective et aussi injective :si $f(0_+) = 0$ puisque f est semi-algébrique dans $]0, \varepsilon[$ son graphe est $\{(x, y) \in R^2, y = f(x)\} = \{(x, y) \in R^2, \phi(x, y)\}$ il existe un polynôme $P(X, Y) \in R[X, Y]$ tel que $P(x, f(x)) = 0$ pour $x \in]0, \varepsilon[$, $P(X, Y) = a_n(X)Y^n + ... + a_1(X)Y + a_0(X)$ si f n'est pas identiquement nulle on peut supposer que $a_0(X)$ non identiquement nul $f_{k(0_+)} :]0, \varepsilon[_{k(0_+)} \to k(0_+)$ l'extension de f à $k(0_+)$ son graphe est $\{(x, y) \in k(0_+)^2, \phi(x, y)\}$, la formule ,$\phi(x, y)$ de $\mathcal{L}^1(R)$ c'est $P(X, Y) = 0$ et $0 < x < \varepsilon$ puisque $f(0_+) = 0 = f_{k(0_+)}(0_+)$ donc $P(X, 0) = a_0(X) = 0$ c'est une contradiction donc f est identiquement nulle et φ est un isomorphisme.*

Définition 46 *Soient $X \subset R^n \times R^p$ un ensemble semi-algébrique défini par la formule $\phi(x, t)$ où $x = (x_1, ..., x_n)$ et $t = (t_1, ..., t_n)$, si $\alpha \in \tilde{R}^p$ on note $X_\alpha \subset k(\alpha)^n$ le semi-algébrique défini par $X_\alpha = \{x \in k(\alpha)^n : \phi(x, (T_1(\alpha), ..., T_p(\alpha))\}$, qui ne dépend que de X*

et de α , il s'appelle la fibre de X en α. Si $Y \subset R^m \times R^p$ est un autre ensemble semi-algébrique et $f : X \to Y$ est une fonction semi-algébrique telle que $f(x,t) = (y,t)$ il y a une seule fonction semi-algébrique $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ qui a le graphe Graphe$f_\alpha = \Gamma(f)_\alpha$ où $\Gamma(f\ \ ) = \{(x,y,t) \in R^n \times R^m \times R^p : (x,t) \in X, f(x,t) = (y,t) \in Y\}$, f_α s'appelle la fibre de f en α.

On a le résultat suivant : Si $\alpha \in \tilde{R}^p$ et $E \subset k(\alpha)^n$ un ensemble semi-algébrique alors il existe une famille semi-algébrique $X \subset R^m \times R^p$ telle que $X_\alpha = E$. Un théorème trés important qui sera utile pour la trivialité locale des fonctions semi-algébriques c'est le suivant :

Théorème 47 *Soient $X \subset R^n \times R^p$, $Y \subset R^m \times R^p$ deux familles d'ensembles semi-algébriques, $\alpha \in \tilde{R}^p$ et $\varphi : X_\alpha \to Y_\alpha$ une application semi-algébrique, on a*

1) Il existe un ensemble semi-algébrique $S \subset R^p$ avec $\alpha \in \tilde{S}$ et une fonction semi-algébrique $f : X \cap (R^n \times S) \to Y \cap (R^m \times S)$ qui commute avec la projection sur R^p telle que la fibre de f en α est $f_\alpha = \varphi$.

2) f est continue ssi φ l'est .

3) Si φ est un homéomorphisme, alors il existe $S \subset R^p$ semi-algébrique tel que $\alpha \in \tilde{S}$ et un homéomorphisme semi-algébrique $f : X \cap (R^n \times S) \to Y \cap (R^m \times S)$ qui commute avec la projection sur R^p telle que la fibre de f en α est $f_\alpha = \varphi$

Preuve. Voir [3] (7-4-4 et 7-4-10) ■

Lorsqu'on dit $f : X \to Y$ semi-algébrique où $X \subset R^n \times R^p$, $Y \subset R^m \times R^p$ commute avec la projection sur R^p il veut dire tout simplement $\pi \circ f = \pi'|_X$ où $\pi : R^m \times R^p \to R^p$, $\pi(x,t) = t$, $\pi' : R^n \times R^p \to R^p$, $\pi'(y,t) = t$ ce qui revient au même de dire que $f(x,t) = (y,t)$

3.5 Triangulation semi-algébrique

3.5.1 Simplexe

Si $a_0, ..., a_d$ sont $d+1$ points de R^n linéairement indépendants le $d-$simplexe de sommets $a_0, ..., a_d$ est $[a_0, ..., a_d] = \left\{x \in R^n : \exists t_0, ..., t_d \in R, t_i \geq 0, \Sigma_{i=0}^d t_i = 1, \Sigma_{i=0}^d t_i a_i = x\right\}$ c.à.d l'envellope convexe engendré par les a_i. un $0-$simplexe c'est un point, $1-$simplexe c'est un segment limité par deux points, un $2-$simplexe est un triangle ...

Une face propre du simplexe $[a_0, ..., a_d]$ est un simplexe de la forme $[a_{i_0}, ..., a_{i_k}]$ où $\{a_{i_0}, ..., a_{i_k}\}$ est une partie propre de $\{a_0, ..., a_d\}$.

Un complexe simplicial fini de R^n est une partie $K = \cup_{i=1}^p \sigma_i$, où les σ_i sont des simplexes et pour $i \neq j$, $\sigma_i \cap \sigma_j$ est une face de σ_i et de σ_j et que les faces de chaque σ_i c'est aussi dans K c.à.d un σ_k de l'union K.

On note σ_i^0 l'ensemble des points de σ_i qui n'appartiennent pas à n'importe quelle face propre de σ_i.

Définition 48 *Si $X \subset R^n$ est un ensemble semi-algébrique , une triangulation de X est un homéomorphisme semi-algébrique d'un complexe simplicial fini dans X c.à.d $\phi : K = \cup_{i=1}^p \sigma_i \to X$ un homéomorphisme semi-algébrique.*

Théorème 49 *Tout ensemble semi-algébrique borné et fermé $X \subset R^n$, il existe un complexe simplicial fini $K = \cup_{i=1}^p \sigma_i$ et un homéomorphisme semi-algébrique $\phi : K \to X$; de plus si $\{X_j\}_{j=1,...,q}$ sont des parties semi-algébriques de X alors on peut trouver une triangulation semi-algébrique de X telle que $\phi^{-1}(X_j)$ soit réunion de certain σ_i^0 .*

pour la preuve on peut voir (3) B,C.R.real algebraic geometry.

Définition 50 *Une fonction de Nash est une fonction semi-algébrique $f = (f_1, f_2, ..., f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ où U est un ouvert semi-algébrique de $\mathbb{R}^n$ et chaque f_i est analytique et vérifie une relation polynomiale , c.à.d il existe un polynôme $P_i \in \mathbb{R}[X_1, .., X_n, Y]$ non identiquement nul et $P_i(x_1, x_2, ..., x_n, f_i(x_1, ..., x_n)) = 0$, et puisque toute fonction semi-algébrique vérifie la dernière condition , donc on peut définir une fonction de Nash comme* *une fonction semi-algébrique et analytique* $f : U \to \mathbb{R}^m$ *où* U *est un ouvert semi-algébrique de* $\mathbb{R}^n$*.*

Pour définir les variétés de Nash de dimension n sur un espace topologique M, on définit une carte de Nash qui est un homéomorphisme $\psi : U \to S$ où U est un ouvert de M et S un ouvert semi-algébrique de $\mathbb{R}^n$. Deux cartes $\psi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ et $\psi_j : U_j \to \mathbb{R}^n$ sont Nash compatible si $\psi_j \circ \psi_i^{-1} : \psi_i (U_i \cap U_j) \to \psi_j (U_i \cap U_j)$ est un difféomorphisme de Nash .

Définition 51 *Une variété de Nash est un espace topologique* M *muni d'un recouvrement fini de cartes de Nash deux-à-deux Nash compatibles .*

Lorsqu'on a un recouvrement de M qui n'est pas fini en cartes de Nash deux-à-deux compatibles on dit que M est une variété localement de Nash, parcequ'une union infinie d'ensembles semi-algébrique n'est pas forcément semi-algébrique Voir ([12]).

Pour un corps réel clos quelconque R ,on définit les fonctions de Nash de $U \subset R^n \to R$ ouvert semi-algébrique comme étant des fonctions semi-algébriques de classe C^{∞}.qui devient anlytique-algébrique dans le cas $R = \mathbb{R}$;car une fonction semi-algébrique d'un ouvert s.a $U \subset \mathbb{R}^n$ si elle est C^{∞} ,alors elle est analytique (la fonction $f(x) = e^{-1/x^2} si$ $x \neq 0 \ et \ f(0) = 0$ qui est de classe C^{∞} n'est pas semi-algébrique) .

3.6 Stratification semi-algébrique

D'aprés le théorème de saucissonage, on peut partitioner les ensembles semi-algébriques en des morceaux qu'on appelle les strates qui sont des graphes de fonctions $\xi_{i,j}$ qui sont des fontions de Nash et des tranches entres les graphes de ces fonctions. Elles sont donc des sous variétés analytiques réelles. Une fonction de Nash est une fonctions $f : U \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert semi-algébrique de $\mathbb{R}^n$ et f est analytique réelle et qui est algébrique c'est à dire qu'il existe un polynôme $P(X, Y) \in \mathbb{R}[X_1, X_2, ..., X_n, Y]$ et $\forall x \in U$, $P(x, f(x)) = 0$, l'exemple type des fonctions de Nash sont les fonctions ξ_{ij} du théorème de saucissonage.

Définition 52 *Soit $S \subset R^n$ un ensemble semi-algébrique, une stratification de Nash de S est une partition finie de S en des sous variété de Nash S_i avec la propriété ; pour tout i, k l'intersection de $adhS_i \cap S_k$ est une union de certain S_j*

(Voir Drusvyatskiy-Loffe-Lewis "The dimension of semi-algebraic subdifferential graphs)

Avec cette définition l'adhérence de chaque strate S_i est l'union de S_i avec d'autres strates S_j de dimension plus petite. On peut demontrer l'existence de telles stratifications d'un ensemble semi-algébrique S, en rendant l'ensemble des polynômes qui decrivent S en une famille stratifiante .

Définition 53 (Famille stratifiante de polynômes) *Une famille de polynômes*

$(P_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq l_i}$ non nuls à coefficients dans un corps réel clos R, est dite stratifiante si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1)Pour tout i fixé les polynômes $(P_{i,j})_{1\leq j\leq l_i}$ sont dans $R[X_1, ..., X_i]$ dont le coefficient dominant en X_i est constant et stable par dérivation en la variable X_i lorsque'les dérivés ne sont pas nuls .

2)Pour $k > 1$ la famille $(P_{i,j})_{i<k, 1\leq j\leq l_i}$ saucissone les polynômes $(P_{k,j})_{j=1,...,l_k}$ (Voir Théorème 31 de saucissonage)

Proposition 54 *Si $Q_1, Q_2, ..., Q_s$ sont des polynômes non nuls dans $R[X_1, ..., X_n]$, on peut trouver un automorphisme linéaire $u : R^n \to R^n$ et une famille stratifiante $(P_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq l_i}$tel que $Q_j(u(x)) = P_{n,j}(x)$ pour $j = 1, 2, ..., s$,et $x \in R^n$.*

Théorème 55 *Soient X un ensemble semi-algébrique relativement compact et $h : X \to \mathbb{R}$ est une fonction semi-algébrique positive $(h(x) \geq 0)$ continue tel que si $(x, 0) \in adh\Gamma(h)$ alors $x \in X$, où $\Gamma(h)$ est le graphe de h. Soit $\varepsilon > 0$ dans $\mathbb{R}$ posons $\bar{\omega}_\varepsilon = \{x \in X : h(x) \leq \varepsilon\}$, $Z = \{x \in X : h(x) = 0\}$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et $r : \bar{\omega}_\varepsilon \to Z$ retract par déformation semi-algébrique ; $\exists H : \bar{\omega}_\varepsilon \times [0, 1] \to \bar{\omega}_\varepsilon$ semi-algébrique continue tel que $H(-, 0) = id_{\bar{\omega}_\varepsilon}$, $H(-, 1) = r$ et $\forall t \in [0, 1]$, $z \in Z$, $H(z, t) = z$ et de plus on a $h((H(x, t)) = (1 - t)h(x)$.*

Preuve. Le théomrème de la trivialité locale de Hardt nous donne pour $\varepsilon > 0$ un homéomorphisme semi-algébrique

$$\begin{tikzcd} \theta : \left]0,\varepsilon\right] \times h^{-1}(\varepsilon) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \bar{\omega}_\varepsilon - Z \arrow[dl, "h"] \\ & \left]0,\varepsilon\right] & \end{tikzcd}$$

Si $x \in Z$ posons $H(x,t) = x$. Si $x \in \bar{\omega}_\varepsilon - Z \Rightarrow x = \theta(h(x), y)$ pour un unique $y \in h^{-1}(\varepsilon)$ et $h(x) \in]0,\varepsilon]$. On pose encore $H(x,t) = \theta((1-t)h(x), y)$ H n'est pas définie pour $t = 1$ donc pour montrer le théorème il suffit de prolonger θ dans $[0,\varepsilon] \times h^{-1}(\varepsilon) \xrightarrow{\sim} \bar{\omega}_\varepsilon$ de façon semi-algébrique continue en envoyant $\{0\} \times h^{-1}(\varepsilon)$ dans Z ,car $H(z,t) = z$ par définition si $z \in Z$ et $H(-,0) = id_{\bar{\omega}_\varepsilon}$ car

$$H\ (x,0) = x \quad si \quad x \in Z$$

$$= \theta(h(x), y\ \ ) = x \ \text{ si } x \notin Z$$

$H\ (x,1) \in Z$ de plus H est semi-algébrique car son graphe est la réunion de deux graphes de fonctions semi-algébriques : $H/Z \times [0,1] = \pi_1$ *projection* semi-algébrique et $H/(\bar{\omega}_\varepsilon - Z) \times [0,1]$: $H(x,t) = \theta((1-t)h(x), \pi(\theta^{-1}(x)))$ qui est la composition de fonctions semi-algébriques.

H est continue pour cela il suffit de voir ce qui se passe en $Z \times [0,1]$, si $(z,t) \in Z \times [0,1]$, $\forall \varepsilon'' > 0\ \exists \eta > 0 : \|z - x\| < \eta \Longrightarrow |h(z) - h(x)| = |h(x)| < \varepsilon''$ car h continue et θ continue donc $\forall \varepsilon' > 0\ \exists \eta' > 0 : 0 \neq |h(x)| < \eta' \Longrightarrow$

$\left\|\theta((h(x), \pi(\theta^{-1}(x))) - \theta((1-t')h(x), \pi(\theta^{-1}(x)))\right\| < \frac{\varepsilon'}{2}$ on prend $\varepsilon'' = \eta'$, $\eta" = \inf(\eta, \frac{\varepsilon'}{2})$ donc $\forall \varepsilon' > 0$ si $\|z - x\| < \eta'' \Longrightarrow$

$\|H(z,t) - H(x,t')\| = \|z - x\| < \eta'' \leq \frac{\varepsilon'}{2} < \varepsilon'$ si $x \in Z$ et $\|H(z,t) - H(x,t')\| = \left\|z - \theta((1-t')h(x), \pi(\theta^{-1}(x)))\right\| \leq \|z - x\| + \left\|x - \theta((1-t')h(x), \pi(\theta^{-1}(x)))\right\| = \|z - x\|$ $+ \left\|\theta(h(x), \pi(\theta^{-1}(x))) - \theta((1-t')h(x), \pi(\theta^{-1}(x)))\right\| < \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon'}{2} = \varepsilon'$ si $x \in \bar{\omega}_\varepsilon - Z$ donc H est continue ■

3.6.1 Prologement de θ

Proposition 56 *Dans n'import quel corps réellement clos on peut supposer que les sommets d'un complexe simplicial fini sont à coordonnées entières.*

Preuve. Il suffit de montrer ceci pour un simplexe, qui est claire en raisonant par récurrence sur la dimension. ■

Le lemme de sélection de courbes semi-algébrique qu'on trouve dans [3] dit la chose suivante :

Lemme 57 *Si S est un ensemble semi-algébrique de R^n et $x \in R^n$ et un point adhérent à S il existe une fonction semi-algébrique continue $f : [0,1] \to R^n$ tel que $f\ (0) = x$ et $f\ (]0,1]) \subset S$*

Maintenant soit X un semi-algébrique relativement compact donc $\bar{X} = adhX$ est un semi-algébrique compact. On va utiliser le spectre réel dans la suite, $0_+ \in Spec_r\mathbb{R}[t]$ qui fait $t > 0$ est infiniment petit si $\bar{X} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \phi(x,t)\}$ on note $\bar{X}_{0_+} = \{x \in k(0_+)^n : \phi(x, t(0_+))\}$ qui est semi-algébrique compact dans $k(0_+)^n$, donc il existe une triangulation semi-algébrique $f_{0_+} : (K \times \mathbb{R})_{0_+} = K_{k(0_+)} \to \bar{X}_{0_+}$ où K est un compexe simplicial de $\mathbb{R}^n$, $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \psi(x)\}$, $K_{k(0_+)} = \{x \in k(0_+)^n : \psi(x)\}$ qui est un complexe de $k(0_+)^n$ dont les sommets sont pris entiers d'aprés la proposition 56 et tel que $f_{0_+}^{-1}(X_{0_+})$ soit une réunion de certains $(\mathring{S}_i\ )_{k(0_+)}$ ou $(S\ _i\ )_{k(0_+)}$ simplexes de $K_{k(0_+)}$, $f_{0_+}^{-1}(X_{0_+}) = \cup_{i=1}^{n}(\mathring{S}_i)_{k(0_+)} = K'_{k(0_+)}$, $f_{0_+} : (K' \times \mathbb{R})_{0_+} = K'_{k(0_+)} \to X_{0_+}$

D'aprés le théorème 47 $f_{0_+} : (K' \times \mathbb{R})_{0_+} \to X_{0_+}$ nous donne $\varepsilon > 0$ et $f : K' \times]0,\varepsilon] \to X/\,]0,\varepsilon]$,car un semi-algébrique $S \subset \mathbb{R}$ tel que $0_+ \in \tilde{S}$ contient $]0,\varepsilon]$ pour $\varepsilon > 0$ dans $\mathbb{R}$.

Revenons à la démonstration du théorème principal on peut poser $X = \Gamma(h) = graph(h)$ qui est encore relativement compact, alors $X/\,]0,\varepsilon] \overset{\sim}{\to} \bar{\omega}_\varepsilon - Z$ et $K' \overset{\sim}{\to} h^{-1}(\varepsilon)$ sont des homéomorphismes semi-algébriques et on a :

$$]0,\varepsilon] \times h^{-1}(\varepsilon) \overset{\sim}{\to}]0,\varepsilon] \times K' \underset{f}{\overset{\sim}{\to}} \Gamma(h)/\,]0,\varepsilon] \overset{\sim}{\to} \bar{\omega}_\varepsilon - Z$$

On a remplacé $K' \times]0,\varepsilon]$ par $]0,\varepsilon] \times K'$ ce qui ne change rien ,donc on prend $\theta :]0,\varepsilon] \times h^{-1}(\varepsilon) \to \bar{\omega}_\varepsilon - Z$ la composé des trois homéomorphismes semi-algébriques. Donc pour prolonger θ dans $[0,\varepsilon] \times h^{-1}(\varepsilon)$ il suffit de prolonger f dans $[0,\varepsilon] \times K' \to \Gamma(h)/[0,\varepsilon]$ on a alors $\mathbb{R}[X] \to \frac{\mathbb{R}[X]}{Supp(0_+)} = \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}(X) \to k(0_+)$, $k(0_+)$ est le corps des series de Puiseux algébriques sur les polynômes $k(0_+) = \{\Sigma_{i=n_0}^{\infty} a_i t^{\frac{i}{k_0}} : k_0 \in \mathbb{N}^*, n_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{R}$ algébriques sur les polynômes$\}$, c'est un corps réellement clos avec l'ordre donnée par $\Sigma_{i=n_0}^{\infty} a_i t^{\frac{i}{k_0}} \geq 0$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $t_0 \in]0,\varepsilon]$.on a $\Sigma_{i=n_0}^{\infty} a_i t_0^{\frac{i}{k_0}} \geq 0$ Si $(0,x) \in [0,\varepsilon] \times K'$ donc d'aprés le lemme de sélection des courbes il existe $s_1,...,s_n$ series de Puiseux algébriques tels que $s = (s_1,...,s_n)$ et $s(0) = x$ et si $t \in]0,\varepsilon]$, on a $(s(t),t) \in K' \times]0,\varepsilon]$ et $s \in k(0_+)^n$ alors $s \in (K' \times \mathbb{R})_{0_+}$ $s' = f_{\ 0_+}(s)$, s' est un petit morceau de courbe dans X car si $X = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \phi(x,t)\}$ et $X_{0_+} = \{x \in k(0_+)^n : \phi(x,t(0_+))\}$, $s' \in k(0_+)^n$, $s' \in X_{0_+} \Longrightarrow \phi(s',t(0_+))$ qui est des égalités et inégalités sur les composantes de s' donc d'aprés l'ordre mis dans $k(0_+)$ $\exists\varepsilon > 0 : \forall t \in]0,\varepsilon]$, $\phi(s',t)$ est vraie. $s'(0)$ existe et est bien définie car la courbe est dans X qui est borné car $\bar{X}$ est compact. $(s'(0),0) \in \bar{X} = adh\Gamma(h) \Longrightarrow (s'(0),0) \in \Gamma(h)$ posons $f_0(x,0) = (s'(0),0)$ pour que ceci prolonge f continuement il faut montrer que $s'(0)$ ne dépend pas du choix de s : si $s,\sigma \in (K' \times \mathbb{R})_{k(0_+)} = K'_{k(0_+)}$ tel que $\sigma(0) = s(0)$ alors $f_{0_+}(s)(0) = f_{0_+}(\sigma)(0)$. Il suffit de montrer ça pour

$$f_{0_+} : K_{k(0_+)} \xrightarrow{\sim} \bar{X}_{0_+}$$

$K \subset \mathbb{R}^n$. On raisonne par récurrence sur n. $n = 1$; f_{0_+} envoie des intervalles comme $[0,1]_{k(0_+)}$ dans $[s_1,s_2]$, $s_1,s_2 \in k(0_+)$ de manière linéaire $\lambda \in [0,1]_{k(0_+)}$, $f_{0_+}(\lambda) = (1-\lambda)s_1 + \lambda s_2$ si $\lambda_1(0) = \lambda_2(0)$, $f_{0_+}(\lambda_1)(0) = (1-\lambda_1(0))s_1(0) + \lambda_1(0)s_2(0) = (1-\lambda_2(0))s_1(0) + \lambda_2(0)s_2(0) = f_{0_+}(\lambda_2)(0)$ si c'est vraie pour n, on reprend la construction du triangulation des ensembles semi-algébriques (voir [3]). Si s est un point correspondant à un point de $\bar{X}_{0_+}$ situé entre deux graphes de fonctions $\bar{\xi}_t^k$ et $\bar{\xi}_{t+1}^k$, $s = \alpha\Sigma_{i=1}^d \lambda_i s_i + (1-\alpha)\Sigma_{i=1}^d \lambda_i s_i'$ où $\Sigma\lambda_i = 1$ et $\lambda_i \geq 0$ et s_i et s_i' sont les sommets correspond aux graphes de $\bar{\xi}_t^k$ et $\bar{\xi}_{t+1}^k$

respectivement donc

$$f_{0_+}(s) = (\psi(\pi(s)), \alpha\bar{\xi}_t^k(\psi(\pi(s))) + (1-\alpha)\bar{\xi}_{t+1}^k(\psi(\pi(s))))$$

$K_{k(0_+)}$ est la réunion de certain simplexes $[b_{t,0}, ..., b_{t,d}]$ et des tranches fermées comprises entre des simplexes $[b_{t',0}, ..., b_{t',d}]$ et $[b_{t'+1,0}, ..., b_{t'+1,d}]$ correspond aux graphes $\bar{\xi}_{t'}^k$ et $\bar{\xi}_{t'+1}^k$ qui sont dans $\bar{X}_{0_+}$.

f_{0_+} envoie $[b_{t,0}, ..., b_{t,d}]$ sur le graphe de $\bar{\xi}_t^k$ par $f_{0_+}(s) = (\psi(\pi(s)), \bar{\xi}_t^k(\psi(\pi(s)))$ où ψ est l'homéomorphisme de $T = \cup T_k \xrightarrow{\sim} \pi(\bar{X}_{0_+})$ donné par hypothèse de récurrence.

Si s est compris entre deux simplexes c.à.d $s = \alpha\Sigma_{i=0}^d \lambda_i b_{t',i} + (1-\alpha)\Sigma_{i=0}^d \lambda_i b_{t'+1,i}$ avec $\Sigma_i \lambda_i = 1$ et $\lambda_i \geq 0$ dans $k(0_+)$ on a

$$f_{0_+}(s) = (\psi(\pi(s)), \alpha\bar{\xi}_{t'}^k(\psi(\pi(s)) + (1-\alpha)\bar{\xi}_{t'+1}^k(\psi(\pi(s)))).$$

Maintenant si $s, \sigma \in K_{k(0_+)}$ tel que $s(0) = \sigma(0)$ alors $\pi(s)(0) = \pi(s(0)) = \pi(\sigma(0)) = \pi(\sigma)(0)$ est donc $\psi(\pi(s))(0) = \psi(\pi(\sigma))(0)$ on a aussi si $s''(0) = \sigma''(0)$ alors $\bar{\xi}_{t'}^k(s'')(0) = \bar{\xi}_{t'}^k(\sigma'')(0)$, $s'', \sigma'' \in \psi(T_k)$ car $\bar{\xi}_{t'}^k$ est une racine d'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ donc $P(s'', \bar{\xi}_{t'}^k(s'')) = 0$ donc $\bar{\xi}_{t'}^k$ est dévellopable en serie entière en s'' dans un voisinage de s''

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{t'}^k(s'') &= \Sigma_i^\infty a_i s''^i \\ \bar{\xi}_{t'}^k(\sigma'') &= \Sigma_i^\infty a_i \sigma''^i \end{aligned}$$

donc $\bar{\xi}_{t'}^k(s'')(0) = \Sigma_i^\infty a_i s''^i(0) = \Sigma_i^\infty a_i \sigma''^i(0) = \bar{\xi}_{t'}^k(\sigma'')(0)$, si $s, \sigma \in K_{k(0_+)}$ avec $s(0) = \sigma(0)$ alors $\sigma = \beta\Sigma_{i=0}^{d'} \lambda'_i b'_{t'',i} + (1-\beta)\Sigma_{i=0}^{d'} \lambda'_i b'_{t''+1,i}$ et $s = \alpha\Sigma_{i=0}^d \lambda_i b_{t',i} + (1-\alpha)\Sigma_{i=0}^d \lambda_i b_{t'+1,i}$

$\alpha(0)\Sigma_{i=0}^d \lambda_i(0) b_{t',i} + (1-\alpha(0))\Sigma_{i=0}^d \lambda_i(0) b_{t'+1,i} = \beta(0)\Sigma_{i=0}^{d'} \lambda'_i(0) b'_{t'',i} + (1-\beta(0))\Sigma_{i=0}^{d'} \lambda'_i(0) b'_{t''+1,i}$ on a $\pi(b_{t',i}) = \pi(b_{t'+1,i})$ et $\pi(b'_{t'',i}) = \pi(b'_{t''+1,i})$ donc $\Sigma\lambda_i(0)\pi(b_{t',i}) = \Sigma\lambda'_i(0)\pi(b'_{t'',i})$ et $\pi(s(0)) = \pi(\sigma(0))$ donc ils sont dans le même simplexe de $\mathbb{R}^n$, donc aprés un réarangement des sommets on aura $\pi(b_{t',i}) = \pi(b_{t'',i})$ et aussi $\lambda_i(0) = \lambda'_i(0)$ donc aussi $\alpha(0) = \beta(0)$. s et σ sont au-dessus de deux simplexes $k(0_+)^n$ non disjoint, donc il existe un prolongement continu de $\bar{\xi}_{t'}^k$ dans les deux simplexes qui soit $\bar{\xi}_{t'}^k$ au-dessus de T_k et $\bar{\xi}_{t''}^{k'}$ au-dessus de $T_{k'}$. $T_k \cap T_{k'} = T_{k''} \neq \emptyset$ et $\pi(s(0)) = \pi(\sigma(0)) \in T_{k''}$ dans $k(0_+)^n$ mais $b_{t',i} = b'_{t'',i}$ et

$b_{t'+1,i} = b'_{t''+1,i}$

$$\begin{aligned}
\bar{\xi}^k_{t'}(s'')(0) &= \bar{\xi}^k_{t'}(s''(0))(0) = \bar{\xi}^{k''}_{t'}(s''(0))(0) \\
&= \bar{\xi}^{k''}_{t''}(\sigma''(0))(0) = \bar{\xi}^{k'}_{t''}(\sigma''(0))(0) \\
&= \bar{\xi}^{k'}_{t''}(\sigma'')(0) \\
f_{0_+}(s) &= (\psi(\pi(s)), \alpha\bar{\xi}^k_{t'}(\psi(\pi(s))) + (1-\alpha)\bar{\xi}^k_{t'+1}(\psi(\pi(s)))) \\
f_{0_+}(\sigma) &= (\psi(\pi(\sigma)), \beta\bar{\xi}^{k'}_{t''}(\psi(\pi(\sigma))) + (1-\beta)\bar{\xi}^{k'}_{t''+1}(\psi(\pi(\sigma))))
\end{aligned}$$

$s(0) = \sigma(0) \Rightarrow \psi(\pi(s))(0) = \psi(\pi(\sigma))(0)$ et $\alpha(0) = \beta(0)$ et $\bar{\xi}^k_{t'}(\psi(\pi(s)))(0) = \bar{\xi}^{k'}_{t''}(\psi(\pi(\sigma)))(0)$ et $\bar{\xi}^k_{t'+1}(\psi(\pi(s)))(0) = \bar{\xi}^{k'}_{t''+1}(\psi(\pi(\sigma)))(0)$ donc $f_{0_+}(s)(0) = f_{0_+}(\sigma)(0)$

Donc il reste à montrer que $f_0 : K \times [0,\varepsilon] \to X/\, [0,\varepsilon]$ est semi-algébrique continue.

Il est clair que f_0 est semi-algébrique car $f_0/K \times]0,\varepsilon] = f$ qui est semi-algébrique et graphe de $f_0 = (adhgraphef)\, [0,\varepsilon]$ qui est semi-algébrique.

Continuité de f_0 : Il suffit de montrer que c'est continue en tout point de $K \times \{0\}$, donc il faut montrer que :

$\forall \varepsilon'' > 0\ \exists \eta > 0$ on a $\|(x,0) - (x',t)\| < \eta \Rightarrow \|f_0\,(x,0) - f_0\,(x',t)\| < \varepsilon''$ pour un point $(x,0) = (s(0),0) \in K \times \{0\}$.

On envisage deux cas :

1) $t = 0$ il faut montrer que $\forall \varepsilon'' > 0\ \exists \eta > 0$ on a

$\|(x,0) - (x',t)\| < \eta \Rightarrow \|f_0\,(x,0) - f_0\,(x',0)\| < \varepsilon''$ c.à.d si $x' = s'(0)$ alors

$\|(s(0),0) - (s'(0),0)\| < \eta \Rightarrow \left\|f_{0_+}(s)(0) - f_{0_+}(s')(0)\right\| < \varepsilon''$ où

$\|s(0) - s'(0)\| < \eta \Rightarrow \left\|f_{0_+}(s)(0) - f_{0_+}(s')(0)\right\| < \varepsilon''$, f_{0_+} est continu donc,

$\forall \varepsilon' > 0\ \exists \eta' \in k(0_+)$, $\eta' > 0$ ε' pris dans $\mathbb{R}_+$, tel que ,

$\|s - s'\|_{k(0_+)} < \eta' \Rightarrow \left\|f_{0_+}(s) - f_{0_+}(s')\right\|_{k(0_+)} < \varepsilon'$.

Posons $\eta'' = \sup\left\{\eta'/\ \|s - s'\|_{k(0_+)} < \eta' \Rightarrow \left\|f_{0_+}(s) - f'_{0_+}(s')\right\|_{k(0_+)} < \varepsilon'\right\}$, on a

$\eta''(0) \neq 0$ car si $\eta''(0) = 0$ alors $\exists s' \in K_{k(0+)}$ tel que $\|s - s'\|_{k(0_+)} < 2\eta''$,

$\left\|f_{0_+}(s) - f_{0_+}(s')\right\| \geq \varepsilon''$.

Alors$\|s\,(0) - s'\,(0)\|_{k(0_+)} < 2\eta''\,(0) = 0$ donc $s(0) = s'(0) \Rightarrow f_{0_+}(s)(0) = f_{0_+}(s')(0)$

mais $\left\|f_{0_+}(s)(0)-f_{0_+}(s')(0)\right\| \geq \varepsilon' \neq 0$ c'est une contradiction donc $\eta''(0)\neq 0$ donc pour un $\varepsilon''>0$ on prend $\varepsilon'<\varepsilon''$ alors $\exists \eta=\frac{\eta''(0)}{2}>0$ tel que :

$\|s\,(0)-s'\,(0)\|<\eta \Rightarrow \left\|f_{0_+}(s)(0)-f_{0_+}(s')(0)\right\| \leq \varepsilon'<\varepsilon''$

2) $t\neq 0$ il faut montrer que $\forall \varepsilon''>0\ \exists \eta>0$ tel que

$\|(x,0)-(x',t)\|<\eta \Rightarrow \|(s(0),0)-f_0\,(x',t)\|=\|(s(0),0)-f\,(x',t)\|<\varepsilon''$,on peut supposer que $x'=x$ car $(x',0)\in K\times\{0\}$ c.à.d de montrer que

$|t|<\eta \Rightarrow \|(s(0),0)-f\,(x,t)\|<\varepsilon''$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
f \quad : \quad K\times\left]0,\varepsilon\right] \arrow[rr] \arrow[dr] & & \bar{X}/\left]0,\varepsilon\right] \arrow[dl] \\
& \left]0,\varepsilon\right] &
\end{tikzcd}$$

tel que $\Gamma(f)_{0_+}=\Gamma(f_{0_+})$

$$\begin{aligned}
\Gamma(f) &= \{(x,t,y,t):\phi(x,y,t)\} \\
\Gamma(f)_{0_+} &= \left\{(x,y,)\in k(0_+)^{2n}:\phi(x,y,t(0_+))\right\} \\
&= \Gamma(f_{0_+})=\left\{(s,f_{0_+}(s)):s\in K_{k(0^+)}\right\}
\end{aligned}$$

donc $\phi(s,f_{0_+}(s),t(0_+))\ \forall s\in K_{k(0_+)}$ et on a de plus si $\phi(x,y',t)$ alors $y=y'$ et si $\phi(s,\sigma,t(0_+))\quad f_+(s)=\sigma$ où $s(0)=x$ on a $s(0)=x$, et $f(x,t)=(y,t)$ il suffit de montrer que $\forall\varepsilon''>0\ \exists\eta>0$ on a ;

$|t|<\eta \Rightarrow \|s(0)-y\|<\varepsilon''$ on a $s(0)=x\in K_{k(0_+)}$ et $y\in \bar{X}_{0^+}$ et $\phi(x,y,t)$ dans $\mathbb{R}$ donc $\phi(s(0),y,t)$ dans $k(0_+)$ donc $y=f_{0_+}(s(0))(t)$, et $f_{0_+}(s(0))(0)=f_{0_+}(s)(0)$,donc

$\forall\varepsilon''>0\ \exists\eta>0\ |t|<\eta$ ou bien $t\in\left]0,\eta\right[\Rightarrow \left\|f_{0_+}(s(0))(t)-f_{0_+}(s)(t)\right\|<\varepsilon''$ donc

$\left\|y-f_{0_+}(s)(0)\right\|<\varepsilon''$.

Chapitre 4

Triangulations lipschitziennes

Le contenu de ce chapitre ce trouve en majorité dans un article que j'ai écrit avec monsieur M. Coste voir [14].

On se propose de montrer comment transformer n'importe quelle triangulation en une triangulation lipschitzienne. On va travailler sur un corps réel clos quelconque $\mathcal{R}$, ce qui nous sera utile par la suite et qui ne complique pas les démonstrations. Par contre, il faut être un peu soigneux à cause du fait que $\mathcal{R}$ n'a aucune raison d'être archimédien. On insiste sur le fait que l'on veut une P-lipschitzianité pour un entier P. Ceci ne peut bien sûr s'obtenir que si l'ensemble semi-algébrique à trianguler n'est pas infiniment grand par rapport aux entiers, c.à.d, que s'il est contenu dans un pavé $[-N, N]^n$ où N est un entier. Dans ce qui suit, I désigne l'intervalle $[0, 1]$ de $\mathcal{R}$.

Proposition 58 *Soit $G : I^d \to \mathcal{R}^n$ une application semi-algébrique continue. On suppose qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $G\left(I^d\right) \subset [-N, N]^n$, et que G est N-lipschitzienne sur les faces de I^d. Alors il existe un homéomorphisme semi-algébrique $H : I^d \to I^d$, qui est l'identité sur les faces de I^d, et un entier P tel que $G \circ H$ soit P-lipschitzienne.*

La démonstration se fait en appliquant plusieurs fois le lemme suivant. On note pour ce lemme (x, y, z), les coordonnées dans $\mathcal{R}^d$, avec $x \in \mathcal{R}$, $y \in \mathcal{R}^k$ et $z \in \mathcal{R}^{d-k-1}$, où $0 \leq k < d$. On reprend les notations et les hypothèses de la proposition, en supposant que $n = 1$ (G est une fonction à valeurs dans $\mathcal{R}$).

Lemme 59 *Supposons, en plus des hypothèses de la proposition, que G est une fonction N-lipschitzienne par rapport aux variables y :*

$$\forall x, z \qquad |G(x, y', z) - G(x, y, z)| \leq N \|y' - y\|$$

Alors il existe un homéomorphisme semi-algébrique $H : I^d \to I^d$ qui est l'identité sur les faces de I^d, et un entier Q tel que $G \circ H$ et H soient Q-lipschitziens par rapport aux variables (x, y)

Démonstration. On écrit $I^d = I \times I^{d-1}$, où le premier facteur correspond à la variable x. On "démonte" ensuite le cube, I^d de la manière suivante : I^{d-1} est divisé en une partition finie en sous ensembles semi-algébriques, et pour chacun des sous-ensembles semi-algébriques A de cette partition, le cylindre $I \times A$ est divisé en tranches au moyen de fonctions semi-algébriques continues (théorème 31) :

$$0 = \xi_0 < \xi_1 < ... < \xi_p = 1 : A \to \mathcal{R}$$

telles que, sur chaque tranche $\left]\xi_{i-1}, \xi_i\right[$, $i = 1, ..., p$, du cylindre $I \times A$, G est une fonction de Nash, et $\partial G / \partial x$ est ou bien constamment majoré par N en valeur absolue, ou bien constamment plus grand que N en valeur absolue. On notera T le nombre maximal de ces tranches, quand A parcourt la partition semi-algébrique de I^{d-1}.

Considérons la fonction semi-algébrique $L : I^d \to [1, 0]$ définie comme suit. On pose toujours $L(0, y, z) = 0$. Soit $(y, z) \in A$ et supposons $L(x, y, z)$ défini pour $x \in [0, \xi_l(x, y)]$. Si, dans la tranche $\left]\xi_l, \xi_{l+1}\right[$, $\partial G / \partial x$ est majoré en valeur absolue par N, on pose simplement

$$L(x, y, z) = L(\xi_l(y, z), y, z) + x - \xi_l(y, z)$$

pour $\xi_l(y, z) \leq x \leq \xi_{l+1}(y, z)$.

Si dans la tranche $]\xi_l, \xi_{l+1}[$, $\partial G/\partial x$ est plus grand en valeur absolue que N, on pose

$$L(x,y,z) = L(\xi_l(y,z), y, z) + \frac{1}{N}|G(x,y,z) - G(\xi_l(y,z), y, z)|$$

pour $\xi_l(y,z) \leq x \leq \xi_{l+1}(y,z)$.

On peut remarquer que $\frac{1}{N}|G(x,y,z) - G(\xi_l(y,z), y, z)|$ est, dans la tranche, une fonction croissante de x, et minorée par $x - \xi_l(y,z)$. On remarque aussi que, pour (y,z) fixé, la fonction $x \mapsto L(x,y,z)$ est un homéomorphisme semi-algébrique de I sur $[0, L(1,y,z)]$. On notera H la bijection semi-algébrique réciproque de la bijection :

$$\begin{array}{ccc} I^d & \to & I^d \\ (x,y,z) & \mapsto & \left(\dfrac{L(x,y,z)}{L(1,y,z)}, y, z\right) \end{array}$$

Notons tout de suite que H est l'identité sur les faces de I^d. En effet, puisque G est N-lipschitzienne sur les faces, on a, pour tout (y,z) appartenant à une face de I^{d-1}, $L(x,y,z) = x$. Il reste à établir les propriétés annoncées de H. La première chose est de montrer que L est continu. Ceci suffira à établir que H^{-1} est continu, et donc que H est un homéomorphisme : une bijection semi-algébrique continue d'un fermé borné sur un fermé borné est bicontinue, même sur un corps réel clos quelconque.

Soit $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in R$. Fixons $(y,z) \in I^{d-1}$. Alors il existe $\delta > 0$, $\delta \in R$ tel que

$$\|(y', z') - (y,z)\| < \delta$$

entraîne

$$|G(x,y',z') - G(x,y,z)| < \varepsilon.$$

En effet, même sur un corps réel clos quelconque, une fonction semi-algébrique continue sur un fermé borné est uniformément continue. Soit alors $(y',z') \in I^{d-1}$ vérifiant $\|(y',z') - (y,z)\| < \delta$. L'intervalle I est subdivisé en au plus $2T - 1$ intervalles tels que, quand x varie dans l'intérieur d'un de ces intervalles, ni (x,y,z) ni (x,y',z') ne sautent de tranche dans leurs cylindres respectifs. Soient $x_0 < ... < x_m < ... < x_q = 1$ les bornes de ces intervalles. Pour $x \in [x_m, x_{m+1}]$, on a suivant les cas :

$$\begin{aligned}
|L(x, y', z') - L(x, y, z)| \quad \leq \quad & |L(x_m, y', z') - L(x_m, y, z)| + \\
& \begin{cases}
0 \\
\frac{|G(x,y',z') - G(x_m,y',z')|}{N} - x + x_m \\
\frac{|G(x,y,z) - G(x_m,y,z)|}{N} - x + x_m \\
\left| \frac{|G(x,y',z') - G(x_m,y',z')|}{N} - \frac{|G(x,y,z) - G(x_m,y,z)|}{N} \right|
\end{cases}
\end{aligned}$$

Dans le dernier cas, on a clairement

$$|L(x, y', z') - L(x, y, z)| < |L(x_m, y', z') - L(x_m, y, z)| + \frac{2\varepsilon}{N} \tag{4.1}$$

Le deuxième cas se présente quand $\partial G / \partial x$ est majoré par N en valeur absolue sur $]x_m, x_{m+1}[\times \{(y, z)\}$, et donc

$$\begin{aligned}
|G(x, y', z') - G(x_m, y', z')| \quad < \quad & |G(x, y, z) - G(x_m, y, z)| + 2\varepsilon \\
\leq \quad & N(x - x_m) + 2\varepsilon
\end{aligned}$$

On aboutit aussi dans ce cas à la majoration (4.1). On procède de même dans le troisième cas. Finalement, on obtient

$$\forall x \in I \qquad |L(x, y', z') - L(x, y, z)| < (2T - 1)\frac{2\varepsilon}{N}$$

Si on a choisi δ suffisamment petit pour que l'on ait aussi, pour tout $(y, z) \in I^{d-1}$,

$$|x - x'| < \delta \Rightarrow |L(x', y, z) - L(x, y, z)| < \varepsilon$$

alors $\|(x', y', z') - (x, y, z)\| < \delta$ entraîne

$$|L(x', y', z') - L(x, y, z)| < \left(2\frac{(2T-1)}{N} + 1\right)\varepsilon$$

Ceci montre la continuité de L, et donc le fait que H est un homéomorphisme. I1 reste à vérifier que H et $G \circ H$ sont Q-lipschitziens, pour un entier Q, par rapport aux variables (x, y). On voit que, si $x' > x$, alors $L(x', y, z) - L(x, y, z) > x' - x$, et que $L(1, y, z) < TN$ (on utilise ici l'hypothése $G\left(I^d\right) \subset [-N, N]$). Donc H est (TN)-lipschitzien par rapport à x, et $G \circ H$ est (TN^2)-lipschitzien par rapport à x. Voyons maintenant ce qui se passe pour les variables y. Les calculs faits ci-dessus pour la continuité montrent aussi que :

$$|L(x, y', z) - L(x, y, z)| < 2(2T-1)\|y' - y\|$$

Posons

$$\xi = \frac{L(x, y, z)}{L(1, y, z)}, \quad \xi' = \frac{L(x, y', z)}{L(1, y', z)}$$

I1 vient

$$\begin{aligned}
|\xi' - \xi| &\leq L(1, y, z)\,|L(x, y', z) - L(x, y, z)| + L(x, y, z)\,|L(1, y, z) - L(1, y', z)| \\
&\leq 4TN(2T-1)\|y' - y\| \\
\|H(\xi, y', z) - H(\xi, y, z)\| &\leq \|H(\xi, y', z) - H(\xi', y', z)\| + \|H(\xi', y', z) - H(\xi, y, z)\| \\
&\leq TN\,|\xi' - \xi| + \|(x, y', z) - (x, y, z)\| \\
&\leq \left(4T^2N^2(2T-1) + 1\right)\|y' - y\| \\
\|G \circ H(\xi, y', z) - G \circ H(\xi, y, z)\| &\leq \|G \circ H(\xi, y', z) - G \circ H(\xi', y', z)\| \\
&\quad + \|G \circ H(\xi', y', z) - G \circ H(\xi, y, z)\| \\
&\leq TN^2\,|\xi' - \xi| + \|G(x, y', z) - G(x, y, z)\| \\
&\leq N\left(4T^2N^2(2T-1) + 1\right)\|y' - y\|
\end{aligned}$$

En prenant par exemple $Q = 16T^3N^3$, on a que H et $G \circ H$ sont Q-lipschitziens par rapport aux variables (x, y).

Preuve. de la proposition. On commence par remarquer que l'on peut étendre le lemme au cas où G est à valeurs dans R^n avec n quelconque. Pour cela, on traite successivement chaque coordonnée de G au moyen du lemme. Comme l'homéomorphisme dans le lemme est lipschitzien, on ne perd pas, en rendant une coordonnée lipschitzienne, la lipschitzianité des coordonnées précédentes. En appliquant d fois le lemme ainsi étendu, on transforme G en une application P-lipschitzienne, pour un certain entier P, en toutes les variables.

Nous passons maintenant du cas d'un pavé fermé, vu dans la proposition, à celui d'un complexe simplicial fini. Nous expliquons d'abord comment "quadranguler" un complexe simplicial fini. Considérons le simplexe standard

$$\Delta^d = \left\{ (t_0, ..., t_d)\,;\sum_{i=0}^{d} t_i = 1, \quad t_i \geq 0 \right\} \subset R^{d+1}$$

On le divise en $d+1$ morceaux

$$C_i^d = \left\{ (t_0, ..., t_d) \in \Delta^d; \forall j, \quad t_i \geq t_j \right\}$$

chacun projectivement isomorphe au pavé fermé I^d. La formule pour l'isomorphisme de C_0^d sur I^d est :

$$(t_0, ..., t_d) \mapsto \left(\frac{t_1}{t_0}, ..., \frac{t_d}{t_0} \right)$$

On remarque que la subdivision induite sur les faces de Δ^d est bien la subdivision des simplexes de dimensions inférieures à d : les subdivisions se recollent bien. Si maintenant K est un complexe simplicial fini dans R^m, on le quadrangule en transportant, pour chaque simplexe σ de dimension d de K, la quadrangulation du simplexe standard Δ^d par un isomorphisme affine de Δ^d sur σ. On a alors K comme réunion de boîtes projectivement isomorphes à des pavés fermés, l'intersection de deux boites étant une face (itérée) commune, ou vide. On notera K_{quad} le complexe ainsi quadrangulé ; le k-squelette de K_{quad} est la réunion des boites de dimensions inférieures ou égales à k. ■

Théorème 60 *Soit $K \subset R^m$ un complexe simplicial fini, dont les sommets ont des* *coordonnées entières. Soit $G : K \to R^n$ une fonction semi-algébrique continue, avec $G(K) \subset [-N, N]^n$ pour un certain entier N. Alors il existe un homéomorphisme semi-algébrique $H : K \to K$ et un entier P tels que $G \circ H$ soit P-lipschitzien.*

Preuve. On quadrangule K et on construit H par induction sur les k-squelettes de K_{quad}. Les homéomorphismes que l'on construit à chaque étape préservent les boites de K_{quad}. Supposons que l'on ait un tel homéomorphisme H_k tel que $G \circ H_k$ soit P_k-lipschitzien sur le k-squelette de K_{quad}, pour un entier P_k. Alors la proposition permet d'obtenir un homéomorphisme semi-algébrique h_{k+1} du $k + 1$-squelette sur lui-même, préservant les boites, qui est l'identité sur le k-squelette, et tel que $G \circ H_k \circ h_{k+1}$ soit P_{k+1}-lipschitzien, pour un nouvel entier P_{k+1}.on peut étendre $H_k \circ h_{k+1}$ à un homéomorphisme semi-algébrique H_{k+1} de K_{quad} sur lui-même, préservant les boites. ■

Remarque 61 *a) Vu la façon dont on l'a construit, on peut ajouter dans le théorème que l'homéomorphisme H est semi-algébriquement homotope à l'identité.*

b) Il n'y a pas d'effectivité dans le théorème, mais on peut en rajouter aprés coup. Rappelons que pour mesurer la complexité d'un objet semi-algébrique, on considère son degré, qui est la somme des degrés des polynômes qui interviennent dans sa description. On obtient alors, pour $N = 1$, une borne pour le degré e de H et pour P, en fonctions récursives du nombre de sommets s du complexe K, du degré d de G et de n. En effet, si l'on fait $N = 1$ et si l'on fixe s, d, n, e et P, alors le théorème s'écrit comme un énoncé $\Phi(s, d, n, e, P)$ de la théorie des corps réels clos. Etant donnés s, d et n, il existe e et P tels que cet énoncé soit un théorème de la théorie des corps réels clos ; sinon, on obtiendrait par ultraproduit un corps réel clos où le théorème serait en défaut. Enfin, l'algorithme de décision pour la théorie des corps réels clos montre que ces e et P sont des fonctions récursives de $s, d,$ et n.

Théorème 62 *Soit B un ensemble semi-algébrique, et soit X un sous-ensemble semi-algébrique de $R^n \times B$. On note p la projection de X sur B. On suppose qu'il existe un entier N tel que, pour tout $b \in B$, la fibre X_b soit contenue dans $[-N, N]^n$. Alors il existe* *un entier P, une partition de B en un nombre fini de sous-ensembles semi-algébriques B^i, avec pour chaque i un ensemble semi-algébrique F^i et un homéomorphisme semi-algébrique*

$$h^i : F^i \times B^i \to X \cap p^{-1}\left(B^i\right)$$

tel que $p \circ h^i$ soit la projection sur B^i et tel que pour tout $b \in B^i$, l'application h^i_b : $F^i \times B^i \to X_b$ soit P-lipschitzienne.

Preuve. On suit fidèlement la seconde démonstration du théorème de Hardt dans [3]. Soit d'abord $\bar{X}$ l'adhérence de X dans $R^n \times B$. on note comme d'habitude $\tilde{B}$ le constructible du spectre réel correspondant à B, et un point α de $\tilde{B}$, $k(\alpha)$ désigne le corps réel clos associé. La fibre $\bar{X}_\alpha$ est fermée dans $[-N,N]^n_{k(\alpha)}$. On a donc une triangulation P-lipchitzienne, pour un certain entier P, de $\bar{X}_\alpha$, compatible avec X_α, par un complexe simplicial fini contenu dans $k(\alpha)^n$, dont les sommets sont à coordonnées entiéres. Soit $F_{k(\alpha)}$ la réunion des simplexes ouverts de ce complexe dont l'image par la triangulation est dans X_α. Cet ensemble semi-algébrique $F_{k(\alpha)}$ est l'extension à $k(\alpha)$ d'un sous-ensemble semi-algébrique F de R^n (on a spécifié que les sommets étaient à coordonnées entières pour en être sûrs). On récupère donc un sous-ensemble semi-algébrique B' de B, avec $\alpha \in \tilde{B}\,'$,et un homéomorphisme $h : F \times B' \to X \cap p^{-1}(B')$, compatible avec les projections sur B', et qui est P-lipschitzien par rapport aux variables dans R^n. La compacité de $\tilde{B}$ permet ensuite de trouver la partition finie du théorème. ■

4.1 Prolongement de trivialisations

Nous avons déjà évoqué le théoréme de triviatité semi-algébrique de Hardt [7]. Formulons en une conséquence dans un cas très particulier, qui nous occupera dans cette section. Soit X un ensemble semi-algébrique, et $f : X \to R$ une fonction semi-algébrique. Alors il existe un $\varepsilon > 0$ et un homéomorphisme semi-algébrique

$$h : f^{-1}(\varepsilon) \times]0,\varepsilon] \to f^{-1}(]0,\varepsilon])$$

tel que $f \circ h$ est la projection sur $]0, \varepsilon]$ et que $h(., \varepsilon)$ est l'identité sur $f^{-1}(\varepsilon)$. Peut-on prolonger continûment cette trivialisation au-dessus de $]0, \varepsilon]$ en 0 ? Il faut déjà supposer que la fonction f est propre, mais ceci ne suffit pas. Prenons pour f la projection de $[0, 1] \times [0, 1]$ sur le deuxième facteur, et pour h la fonction de $[0, 1] \times]0, 1]$ dans R^2 définie par

$$(x, t) \mapsto \begin{cases} (x, t) & si \quad x + t \geq 1 \\ \left(t\frac{x}{1-x}, t\right) & si \quad x + t \leq 1 \end{cases}$$

Ce h ne peut pas se prolonger par continuité à $[0, 1] \times]0, 1]$. Cependant, il y a toujours moyen de choisir la trivialisation pour que le prolongement soit possible.

Théorème 63 *Soit X un ensemble semi-algébrique, et $f : X \to R$ une fonction semi-algébrique propre. Alors il existe un $\varepsilon > 0$ et une application semi-algébrique*

$$h : f^{-1}(\varepsilon) \times [0, \varepsilon] \to f^{-1}([0, \varepsilon])$$

tel que $f \circ h$ est la projection sur $]0, \varepsilon]$ que $h(., \varepsilon)$ est l'identité sur $f^{-1}(\varepsilon)$ et que h en restriction à $f^{-1}(\varepsilon) \times]0, \varepsilon]$ est un homéomorphisme sur $f^{-1}(]0, \varepsilon])$

Preuve. Comme f est propre, on peut se ramener au cas où $f^{-1}(]0, \varepsilon])$ est contenu dans un pavé $[-N, N]^n$, avec N entier. On applique alors le théorème, qui nous donne un $\varepsilon > 0$ et un homéomorphisme semi-algébrique

$$g : K \times]0, \varepsilon] \to f^{-1}(]0, \varepsilon])$$

où K est un ensemble semi-algébrique compact, tel que $f \circ g$ est la projection sur $]0, \varepsilon]$ et que, pour tout $t \in]0, \varepsilon]$, $g(., t) : K \to f^{-1}(t)$ est P-lipschitzien pour un entier P indépendant de t. Soit $y \in K$, puisque f est propre, alors l'intersection de $\{(y, 0)\} \times X$ avec l'adhérence du graphe de g est non vide. Cette intersection est réduite à un point. En effet, soient $(y, 0, x)$ et $(y, 0, x')$ deux points de cette intersection. Par le lemme de sélection des courbes, il existe deux chemins semi-algébriques

$$\gamma, \gamma' : [0, \delta[\rightarrow K$$

tels que $\gamma(0) = \gamma'(0) = y$, que $\mathrm{limt}_{t\to 0} g(\gamma(t), t) = x$ et que limt $\mathrm{limt}_{t\to 0} g(\gamma'(t), t) = x'$. Alors la propriété de lipschitzianité implique que $x = x'$. On a ainsi montré que g se prolonge par continuité à $K \times [0, \varepsilon]$, ce qui nous donne le résultat. ■

Le théorème précédent montre que $f^{-1}([0,\varepsilon])$ se rétracte par déformation semi-algébrique sur $f^{-1}(0)$, tandis que $f^{-1}(]0,\varepsilon])$ est semi-algébriquement homéomorphe $f^{-1}(\varepsilon) \times]0, \varepsilon]$. On a donc ainsi des morphismes de l'homologie de $f^{-1}(\varepsilon)$ dans celle de $f^{-1}(0)$ (et ceci sur n'importe quel corps réel clos de base). On peut interpréter le théorème précédent comme une généralisation du théorème de structure conique locale pour les ensembles semi-algébriques : soit Y un sous-ensemble semi-algébrique fermé borné de l'ensemble semi-algébrique X fermé dans R^n, et soit f une fonction semi-algébrique continue de X dans R, positive ou nulle, propre, et telle que $Y = f^{-1}(0)$; par exemple, on peut prendre pour f la distance à Y. Alors le voisinage compact $f^{-1}([0,\varepsilon])$ de Y, pour ε suffisamment petit, est semi-algébriquement homéomorphe au "mapping cylinder" d'une application semi-algébrique continue de $f^{-1}(\varepsilon)$ dans Y. A. Durfee [4] a considéré les voisinages semi-algébriques d'ensembles semi-algébriques : ce sont les $f^{-1}([0,\varepsilon])$ comme ci-dessus. I1 obtient l'unicité à homéomorphisme prés de ces voisinages (ils ne dépendent essentiellement ni du choix de ε, ce que l'on a vu, ni du choix de f). Mais les homéomorphismes sont obtenus par utilisation du premier lemme d'isotopie de Thom, et ils ne sont pas semi-algébriques.

Le théorème s'obtient comme conséquence facile du résultat de triangulation des fonctions semi-algébriques (à valeurs dans R) de Shiota [9]. Ce résultat dit que, si $f : X \rightarrow R$ est une fonction semi-algébrique continue bornée, alors il existe un complexe simplicial fini K sur R, une fonction $g : K \rightarrow R$ affine sur chaque simplexe de K, et un homéomorphisme semi-algébrique h d'une réunion U de simplexes ouverts de K sur X tels que $f \circ h = g|_U$.

Bibliographie

[1] Aoki K., Nagachi H. : On topological types of polynomial map germs of plane to plane, Memoirs of the School of Science & Engineering 44 (1980), 133-156, Waseda University

[2] Benedetti, R., & Shiota, M. (1991). Finiteness of semialgebraic types of polynomial functions. Mathematische Zeitschrift, 208(1), 589-596.

[3] Bochnak J., Coste M., Roy M-F : "Real algebraic geometry" Erg DrMath 36, Springer Verlag(1998)

[4] Durfee A. : Neighborhoods of algebraic sets, Trans. A.M.S. 270 (1983), 517-530

[5] Fukuda T. : Types topologiques des polynômes, Publ. math. I.H.E.S. 46 (1976), 87-106

[6] Gromov M. : Entropy, homology and semialgebraic geometry (after Y. Yomdin), Astérisque 145-146 (1987), 225-240

[7] Hardt R. : Semi-algebraic local-triviality in semi-algebraic mappings, Amer. J. Math. 102 (1980), 291-302

[8] Nakai I. : On topological types of polynomial mappings, Topology 23 (1984), 45-66

[9] Shiota M. : Piecewise linearization of subanalytic functions II. Dans : Real analytic and algebraic geometry, Lect. Notes Math. 1420, 247-307, Springer

[10] J.P Lafon, "algèbre commutative"

[11] O.Zariski,P. Samuel "commutative algebra", princeton 1970

[12] J. Madden Stanton "One dimensional Nash groups" Pacific Journal of Mathematics Vol 154 (1992)

[13] R. Hartshorne "Algebraic geometry" Springer-Verlag (1977)

[14] M. Coste, M. Reguiat,. "Trivialité en Famille"., Lect. Note. Math. Springer-Verlag 1524 (1991)