Étude des solutions périodiques approchées d'un système parabolique de réaction-diffusion

BEKHOUCHE Rania* **Said M. S. (encadreur)**

Département de Mathématiques
Faculté des Mathématiques et Sciences de la matière
Université Kasdi Merbah Ouargla, Algérie
*rania_bekhou@yahoo.com

Résumé

Dans, ce travail on se propose d'étudier les solution périodique des problèmes paraboliques de réaction diffusion. pour ceci on va utiliser la méthode de décomposition des opérateurs qui décompose le problème initiale en plusieurs problèmes approchés couplé qui seront étudier simultanément .
ceci se fera on faisant une semi discrétisation en temps en fin on passera à la limite .
Mots clés: *Méthode de compacité, réaction diffusion, problèmes paraboliques, solutions périodiques, méthode de décomposition.*

1. Introduction

Dans le cas des systèmes à coefficients périodiques . L'équation considérée s'écrit donc :

$$X' = A(t)X \tag{1.1}$$

où A est une matrice $n \times n$ de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$A(t+\omega) = A(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

On appelle période de A le nombre $\omega \in \mathbb{R}$.

Théorème 1:
Soit Φ la matrice fondamentale de solutions de (1.1) .Alors Ψ est ω - périodique et vérifie :

$$\Psi(t) = \Phi(t+\omega) \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

Alors $\Phi(t+\omega)$ est aussi une matrice fondamentale de solutions pour le système (1.1), de plus, pour toute matrice constante R, on a:

$$\Phi(t) = P(t)e^{tR} \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

Définition 1:
Les valeurs propres de la matrice $e^{\omega R}$ sont appelées multiplicateurs associés à l'équation (1.1) ou encore à la matrice A ,et les valeurs propres de R sont appelées exposants caractéristiques de A .

1.1 Résultats complémentaires sur les solutions périodiques pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2:

Nous allons encore présenter deux résultats sur les solutions périodiques. pour cela nous intéressons à une équation de la forme suivante :

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t) \tag{1.5}$$

avec a, b et c trois fonctions réelles continues et $\omega-$ périodiques.
Théorème 2:
Considérons une équation du type ci-dessus .
L'équation homogène associée s'écrit donc :

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0 \tag{1.6}$$

Alors (1.5) admet une solution ω-périodique pour toute fonction $c(t)$ si et seulement si (1.6) n'en a pas .
Lemme 1:
L'équation différentielle (1.5) admet une solution ω-périodique. si et seulement s'il existe une solution x vérifiant la condition de périodicité :

$$x(\omega) = x(0) \quad x'(\omega) = x'(0) \tag{1.7}$$

1.2 Méthode de décomposition:

Pour montrer l'existence d'une solution de notre problème, on va utiliser la méthode de décomposition des opérateurs qui décompose le problème initial en deux sous problèmes adjacents, après une semi discrétisation en temps de deux sous problèmes, on récupéré une suites de solution périodiques approches du problème initial, après on met en évidence des estimations à priori, enfin on passera à la limite.

1.2.1 Exposition de la Méthode de décomposition:

De façon générale et formelle , considérons le système (u désignant éventuellement un vecteur):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \\ u\mid_{\Gamma} = 0 \quad u(x,0) = u_{0(x)} \end{cases} \tag{1.8}$$

u^n approximation de u à l'instant nk et u^{n+1} approximation de u à l'instant $(n+1)k$.

Première étape: On considère l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = f_1 \\ v\mid_{\Gamma} = 0 \quad v(x,0) = v_0(x) \end{cases} \tag{1.9}$$

par la discrétisation en temps de (1.9) on trouve :

$$\begin{cases} \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{k} = \frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} \\ u^{n+\frac{1}{2}}\mid_{\Gamma} = 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

1.2.2 Estimations à priori:

Dans ce paragraphe on fait des estimations à priori sur la suite de solutions approches qu'on a obtenu ci dessus
on montrera que la suite de solutions approches obtenue après la semi discrétisation en temps des deux sous problèmes demeure dans un borné de H^1.

Passage à la limite: Dans ce paragraphe on étudie la convergence de la suite et on passe à la limite ce qui donne l'existence d'au moins une solution du problème .

1.3 Unicité:

Pour établir l'unicité on part de deux solutions et en utilisant le lemme de Gronwall, on montre qu'elles sont égales .

Deuxièmes étape : On considère la deuxième partie de l'équation (1.8)

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = f_2 \\ \omega\mid_{\Gamma} = 0 \quad \omega(x,0) = \omega_0(x) \end{cases} \tag{1.11}$$

par la discrétisation en temps de(1.11) on trouve:

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{k} = \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} \\ u^{n+\frac{1}{2}}\mid_{\Gamma} = 0 \end{cases} \tag{1.12}$$

avec $k = \Delta t$.

2. Position de problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t) \\ u\mid_{\Gamma} = 0 \quad u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{2.1}$$

ou a,b,f,périodique en x
on utilise la méthode de décomposition alors par la discrétisation en temps le problème rendre sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{k} = a(x)\frac{\partial^2 u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x^2} + f_1 \quad avec \\ u^{n+\frac{1}{2}}(\Gamma) = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{k} = b(x)\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + f_2 \quad avec \\ u^{n+1}(\Gamma) = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\begin{cases} u^{n+\frac{1}{2}} - u^n = ka(x)\frac{\partial^2 u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x^2} + f_1 \\ u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}} = kb(x)\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + f_2 \end{cases} \tag{2.4}$$

on applique les résultat des EDO du 1er et 2ème ordre aux problèmes (2.2) et(2.3) à coefficients périodique.
On pose : $u^n = f_1, u^{n+\frac{1}{2}} = y$ ce qui donne:

$$\begin{cases} y'' - \frac{1}{ka(x)}y = -\frac{k}{a(x)}f_1 \quad avec \\ y\mid_{\Gamma} = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Et en posant $u^{n+1} = z, \ f_2 = u^{n+\frac{1}{2}}$

$$\begin{cases} z' - \frac{1}{kb(x)}z = \frac{1}{kb(x)}f_2 \quad avec \\ u^{n+1}(\Gamma) = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

On appliquera maintenant les résultats déjà obtenu pour les EDO du second ordre à coefficients périodiques

3. Application Numérique

Enfin, on valide notre travail par une application numérique simple!.

Références

[1] BRESIS. H . Analyse Fonctionnelle Masson Paris 1983.
[2] LIONS. J.L. MAGENES E. Problèmes aux limites non homogènes et applications Tome 1, Dunod Paris 1968.
[3] LIONS J.L. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires Dunod Guautier Villars Paris 1969.
[4] REINHARD H Equations différentielles ordinaires, Dunod Paris 1981.
[5] REINHARD H Equations aux dérivées partielles, Dunod Paris 1983.
[6] SAID M.S Résolution d'un système non linéaire en deux dimensions intervenant en dynamique des Gaz par la méthode d'approximation successive Actes de l'université UHA université de Mulhouse France 2006 N° pp.137-144.
[7] TARTAR L. Topics in non linear analysis Publications mathématiques d'Orsay 1978 N°13.