Méthode de Kikuchi pour les équations de Marguerre-von Kármán

Hachef Imane* **Ghezal A.(encadreur)**

Département de Mathématiques
Faculté des Mathématiques et Sciences de la matière
Université Kasdi Merbah Ouargla, Algérie
*imanehachef7@gmail.com

Résumé

L'objectif de ce travail est l'étude de l'approximation numérique des solutions non-triviales des équations de Marguerre-von Kármán pour le flambage d'une coque peu-profonde encastré. On propose une méthode de Kikuchi. On généralise le résultat obtenu par Kesaven [1] pour les équations de von Kármán.

Mots clés: *Elasticité non linéaire, Théorie de coque peu-profonde, Méthode de Kikuchi, Équations de Marguerre-von Kármán.*

1. Introduction

Soit ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière γ est suffisamment réguliére. On suppose que la surface moyenne d'une coque peu-profonde occupe la région ω et que cette coque peu-profonde est encastrée le long du bord γ. Supposons en outre qu'une pression soit appliquée au bord et que cette force dépende linéairement d'un paramétre λ.

Soit ζ le déplacement dans la direction verticale et soit λf la fonction d'Airy de contraintes en l'absence de déformation. Soit ψ l'accroissement de la fonction d'Airy en cours de déformation (donc $\psi + \lambda f$ est la fonction d'Airy dont les dérivées secondes nous permettent de calculer les composantes du tenseur des contraintes de la coque peu-profonde déformée). Alors les équations de Marguerre-von Kármán s'écrivent:

$$\begin{cases} \Delta^2\zeta = [\phi, \zeta+\theta] + \lambda[f, \zeta+\theta] & \text{dans } \omega, \\ \Delta^2\phi = -[\zeta, \zeta+2\theta] & \text{dans } \omega, \\ \zeta = \partial_\nu\zeta = \phi = \partial_\nu\phi = 0 & \text{sur } \gamma, \end{cases} \tag{1}$$

où:

$\theta \in \mathrm{H}^2(\omega)$ définit la surface moyenne de la couque,
$[\eta, \zeta] = \frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1\partial x_2}$
Dans cet travail, on applique la méthode de Kikuchi [2] aux équations de Marguerre-von Kármán, il généralise le travail de Kesaven [1] pour les plaques au cas coques peu-profondes.

2. Problème non linéaire continu

On définit un opérateur bilinéaire $B : H_0^2(\omega) * H_0^2(\omega) \to H_0^2(\omega)$ par $\forall\xi \in H0^2(\omega)$,

$$((B(\zeta,\eta),\xi)) = \int_\omega [\zeta,\eta]\xi dx$$

. A partir de $B(.,.)$ on peut définir un opérateur non-linéaire$A : H_0^2(\omega) \to H_0^2(\omega)$ par

$$A\zeta = B(\zeta, B(\zeta,\zeta))$$

.

$$\varphi = \chi - B(\zeta,\zeta)$$

où $\chi \in H_0^2(\omega)$ tel que:

$$\begin{cases} \Delta^2\chi = [\theta,\theta] & \text{dans } \omega. \\ \chi = \partial_\nu\chi = 0 & \text{sur } \gamma. \end{cases} \tag{2}$$

On définit un opérateur L par

$$\begin{cases} \Delta^2 L\eta = -\Delta\eta & \text{dans } \omega. \\ L\eta \in H_0^2(\omega). \end{cases} \tag{3}$$

soit λ_0 une valeur propre simple du problème linéarise et soit ϕ_{0h} un vecteur propre associé à λ_0, normalisé par $((L\phi_0, \phi_0)) = 1$ On s'intéresse aux solution (ζ, λ) de l'équation non-linéaire

$$\zeta - \lambda L\zeta - B(\zeta, B(\theta,\theta)) + A\zeta = \theta.$$

$\Psi = -B(\zeta,\zeta)$ avec $\lambda \ll \ voisin \ \gg \ de \ \lambda_0$ et ζ de norme $\ll \ petite \ \gg$ *.Le principe de la méthode (cf.Kikuchi) est de cherche les solutions*ζ de la forme

$$\zeta = \varepsilon\phi_0 + \eta$$

où $\varepsilon > 0$ un paramètre qui vers zéro, η *un élément dans le sous-espace de* $H_0^2(\omega)$ orthogonal à ϕ_0, et de norme $\ll petite \gg$ *à préciser plus tard. Introduisons les opérateurs suivant:*$s\varepsilon : H_0^2(\omega) \to H_0^2$*défini par:*$S\varepsilon\xi = \frac{1}{\varepsilon}((A\xi,\phi_0))L\xi - A\xi etQ : H_0^2(\omega) \to \phi_0{}^\perp$, le sous-espace orthogonal à ϕ_0 ,défini par la solution unique du probléme $Q\xi \in \phi_0{}^\perp$,

$$(I - \lambda_0 L)Q\xi = P_0\xi$$

P_0 étant la projection orthogonal de $H_0^2(\Omega)$ sur $\phi_0^\perp$ pour le produit scalaire ((.,.)).

Théorème 2.1 *Soit* $\varepsilon > 0$ *et* $(\zeta,\lambda) \in H_0^2(\Omega) * R$*, avec*

$$\zeta = \varepsilon\phi_0 + \eta, \eta \in \phi_0{}^\perp$$

Alors (ζ,λ) *est solution de l'équation*

$$\zeta - \lambda L\zeta - B(\zeta, B(\theta,\theta) + A\zeta$$

si et seulement si $\eta = QS_\varepsilon(\varepsilon\phi_0 + \eta)$

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{1}{\varepsilon}((A(\varepsilon\phi_0 + \eta), \phi_0))$$

.

3. Problème non lineare discret

Dans ce travail on propose une méthode d'éléments finis conforme pour approcher le problème continu. On fait des hypothèses d'approximation sur les schémas choisis et ensuite on obtient les estimations d'erreur sur les problèmes linéarisés associés. Soit $\eta = H_0^2(\omega)$. On approche η par des sous-espaces de dimension finie η_h Où h est un paramètre qui tend vers zéro. On fait l'hypothèse d'approximation suivante sur les espaces η_h. Hypothése d'approximation On suppose qu'il existe un opérateur linéaire $r_h \in lH^3(\omega) \cap H_0^2(\omega), \eta_h)$ tel que:

$$\forall\eta \in H^{m+1}(\omega) \cap H_0^2(\omega), \|\eta - r_h\eta\| \le Ch^{m-1}\|\eta\|_{m+1}, \omega 2 \le m \le l$$

Où $C > 0$ est une constant indépendante de h. cette hypothése implique en particulier que

$$\forall\eta \in H_0^2(\omega), lim_{h\to 0 \eta\in\eta_h}(inf\|\eta - \eta_h\|) = 0$$

Ce travailler directement avec l'opérateur non linéaire A.Donc il est nécessaire que l'on approche cet opérateur convena-blement. pour une méthode conforeme, c'est aisé à réaliser: on définit d'abord un opérateur bilinéaire approché $B_h : H_0^2(\omega) * H_0^2(\omega) \to \eta_h$,. Etant donné $\zeta, \eta \in H_0^2(\omega)$, on définit $Bh(\zeta,\eta)$ par

$$\xi \in \eta_h, ((B_h(\zeta,\eta), \xi_h)) = \int_\omega [\zeta,\eta]\xi_h$$

Donc $B_h(\zeta,\eta)$ est la projection orthogonal de $B(\zeta,\eta)$ sur η_h. Maintenant pour $\zeta \in H_0^2(\Omega)$ on définit $A_h\zeta \in \eta_h$ par

$$A_h\zeta = B_h(\zeta, B_h(\zeta,\zeta))$$

Dans ce numéro on décrit l'algorithme de résolution du probléme discret. On s'intéresse aux solution non triviales $(\zeta_h, \lambda_h) \in \eta_h * R$ du probléme

$$\zeta_h - \lambda_h\rho_h L\zeta_h - B_h(\zeta, Bh(\theta,\theta)) + A_h\zeta_h = 0. \tag{4}$$

soit encore $\forall\omega_h \in \eta_h$

$$((\zeta_h, \xi h)) - \lambda_h((L\zeta_h, \xi h)) - B_h(\zeta, B_h(\theta,\theta)), \xi_h) + (A_h\zeta_h, \xi h) = 0 \tag{5}$$

Théorème 3.1 *Soit* $\varepsilon > 0$ *et* $(\zeta_h, \lambda_h) \in \eta_h * R$ *avec*

$$\zeta_h = \varepsilon\phi 0_h + \eta_h \eta_h \in \eta_h \cap \varphi_{0h}{}^\perp$$

Alors (ζ_h, λ_h) *est solution de l'équation (3.1) si et suelement si* $\eta_h = T_{H,\varepsilon}, \eta_h$ *et*

$$\lambda_h = \lambda_{0h} + \frac{1}{\varepsilon}((A_h(\varepsilon\phi_{0h} + \eta_h), \varphi_{0h} \tag{6}$$

4. Approximation de l'operateur non linéaire

lemme 4.1 Soit $\zeta, \eta \in H_0^2(\omega)$. Alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de$h$ telle que:

$$\|Bh(\zeta,\eta)\| \le C\|\zeta\|\|\eta\|. \tag{7}$$

$$\|A_h\zeta\| \le C\|\zeta\|^3. \tag{8}$$

lemme 4.2 Soit $\zeta \in H^3(\omega) \cap H_0^2(\omega)$ et $\eta \in H_0^2(\Omega)$. Alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que:

$$\|B(\zeta,\eta) - B_h(\zeta,\eta)\| \le Ch^{\frac{1}{2}}\|\zeta\|_{3,\omega}\|\eta\| \tag{9}$$

lemme 4.3 Soit $\zeta \in H^3(\omega) \cap H_0^2(\omega)$. Alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que:

$$\|A\zeta - A_h\zeta\| \le Ch^{\frac{1}{2}}\|\zeta\|^2\|\zeta\|_{3,\Omega}. \tag{10}$$

5. Estimation d'errer

Théorème 5.1 *Il existe un* $\varepsilon_0 > 0$ *et une contant* $C = C(\varepsilon_0) > 0$ *tel que, pour tout* h *assez petit et pour tout* ε *tel que* $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$*, on a*

$$\|\zeta - \zeta_h\| \le Ch\varepsilon + Ch^{1/2}\varepsilon^3. \tag{11}$$

$$\|\lambda - \lambda_h\| \le ch^2 + ch\varepsilon^2 + ch^{\frac{1}{2}}\varepsilon^4. \tag{12}$$

Références

[1] S. Kesavan, *La méthode de Kikuchi appliquée aux équations de von Kármán*, Numer. Math., 32, (1979), 209-232.
[2] F. Kikuchi, An iterative finite element scheme for bifurcation analysis of semi-linear elliptic equations, Report N^0 542, Institute of Space and Aeronautical Science, University of Tokyo, Japan, (1976).