Problème d'un écoulement au-dessus d'un obstacle sans l'effet de gravité

Kherfi Salima* **Amara A.(encadreur)**

Département de Mathématiques
Faculté des Mathématiques et Sciences de la matière
Université Kasdi Merbah Ouargla, Algérie
*salima.kherfi2014@gmail.com

Abstract

Dans ce travail, on s'intéresse à un problème d'écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux, passant au dessus des obstacles . Le problème est caractérisé par la condition non linéaire donnée par l'équation de Bernoulli sur la surface libre qui est de forme inconnue. Nous adoptons une méthode des transformations conformes qui réduit le problème de discrétisation uniquement sur la surface libre.Nous utilisons d'abord la technique de transformation Schwarz-Christoffel pour obtenir la solution exacte

Mots-clés: Écoulement à surface libre, tension de surface, nombre de Froude.

1. Introduction

Notre objectif dans ce papier, on étudie un problème d'écoulement potentiel, bidimensionnel, d'un fluide incompressible et non visqueux, passant au dessus d'un obstacle de hauteur $2H$et de largeur H, en raison de la symétrie de l'écoulement par rapport à l'axe $y'oy$, on peut restreindre l'étude du problème au demi-plan. Le plan des variables (x, y) de l'écoulement peut être identifié au plan de la variable complexe $z = x+iy$,en négligeant les tensions de surface et les forces de gravité, on peut trouver la solution exacte en utilisant la transformation conforme d'holographe dû à Kirchhoff (1869) ou la transformation Schwarz-Christoffel

2. Formulation du problème

On considère un écoulement potentiel, bidimensionnel et irrotational sur le plan horizontal d'un fluide incompressible et non visqueux, passant au dessus d'un obstacle de La longueur est H et de largeur H. Nous choisissons comme repère de référence la ligne OB sur l'axe $x'ox$, la ligne AO sur l'axe $y'oy$, la surface libre sur la ligne de courant CD.(voir Figure 1(b)).

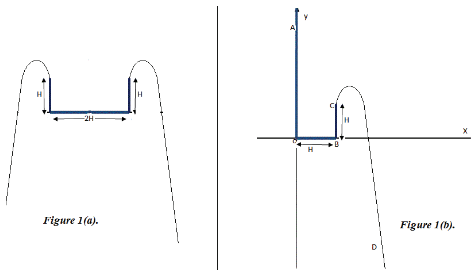

Figure 1: *Schéma de l'écoulement et des coordonnées. La longueur de l'obstacle est 2H et de largeur H figure 1(a), et La longueur de l'obstacle est H et de largeur H. La surface libre est CD figure 1(b)*

On suppose que l'écoulement est uniforme lorsque $|y| \to \infty$ de vitesse U.On transforme le plan de l'écoulement réel dans le plan complexe z au plan de l'écoulement f ou $f(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$ tels que les points $A, O, B, CetD$ dans plan complexe z.(figure 2.)

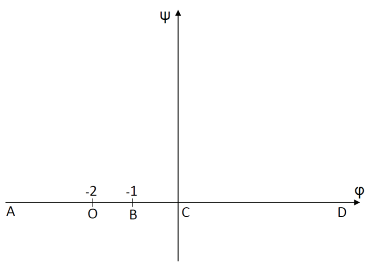

Figure 2: *Plan de la variable* $f(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$

Le problème mathématique consiste à déterminer la fonction de potentiel φ qui vérifie les conditions suivants:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \;\; dans\ le\ domaine\ de\ l'coulement \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \;\; sur\ OB \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \;\; sur\ OA \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \dfrac{p}{\rho} = const \;\; surCD \end{cases}$$

3. Résolution de problème

Dans cette section nous allons utiliser la transformation de Schwarz-Christoffel pour trouver la solution exacte du notre problème on trouve:

$$\frac{dz}{df} = M(f+2)^{\frac{-1}{2}}(f+1)^{\frac{-1}{2}} \qquad (3.1)$$

ceci implique

$$z = M\int \frac{1}{\sqrt{(f+1)(f+2)}}df + N \qquad (3.2)$$

Ce qui nous donne après intégraion :

$$z = M\left(ln\left(2f + 2\sqrt{(f+2)(f+1)} + 3\right)\right) + N \qquad (3.3)$$

Pour déterminer les constantes M et N on a:

- Lorsque $f = -1$ (au point B), $z = H$ alors : $N = H$.
- Lorsque $f = 0$ (au point C), $z = H + iH \Rightarrow$ M= $\dfrac{iH}{ln(2\sqrt{2}+3)}$

Donc

$$z = \frac{iH}{ln(2\sqrt{2}+3)}\left(ln\left(2f + 2\sqrt{(f+2)(f+1)} + 3\right)\right) + H \qquad (3.4)$$

Puisque $f = \varphi$ sur la ligne de courant libre CD avec $0 \le \varphi \le +\infty$ l'équation (2.3) devient alors :

$$z = \frac{iH}{ln(2\sqrt{2}+3)}\left(ln\left(2\varphi + 2\sqrt{(\varphi+2)(\varphi+1)} + 3\right)\right) + H \qquad (3.5)$$

L'équation paramétrique de la surface libre CD est donnée par :

$$\begin{cases} y = \dfrac{H}{ln(2\sqrt{2}+3)}\left(ln\left(2\varphi + 2\sqrt{(\varphi+2)(\varphi+1)} + 3\right)\right) \\ x = H \end{cases}$$

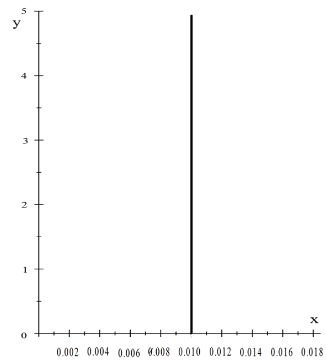

Figure 3: *forme de la surface libre*

References

[1] Bloor, *Large amplitude surface waves,J.Fluide Mech.*,$N^0$84(1978).

[2] G. Birkhoff et E. H. Zarantonello, *Jets, Wakes, And Cavities* , New-York (1957).

[3] E. Abdelkader Gasmi, H. Mekias, *A Jet from Container and Flow past a Vertical Flat Plate in a Channel With the Surface Tension Effects, Applied Math Sciences*,vol.1, 2007, no. 54, 2687 - 2698.

[4] B.Bouderah,A.Gasmi and H.serguine *Zero Gravity of Free-Surface Jet Flow*,International Mathematical Forum,2,2007,no.66,3273-3277.

[5] M. i. Gurevich , *The Theory of Jets in an ideal fluid, International Series of Monographs in Pure and Applied Math*,vol. 93, Oxford-London (1966).

[6] S. N. hanna, *Free surface flow over a polygonal and smooth topography, Acta Mechanica*,Springer-Verlag, 1993, 241 - 251

[7] A. Merzougui, H. Mekias et F. Guechi , *Surface tension effect on a two dimensional channel flow against an inclined wall, Applied Math Sciences* , vol.1, 2007, no. 47, 2313 - 2326.

[8] Jean-Marc Vanden-Broeck, *The infuence of surface tension on cavitating flow past a curved obstacle*,J. Fluid. Mech. (1983), vol.133, pp 255 - 264

[9] Y. f. Li, J. M. chuang et C. C. Hsiung, *Computation Nonlinear 2-D free surface flow using the Hilbert method, Univesity of Nova Scotia Halifax*, Canada