Méthode d'éléments finis mixte pour les équations de Marguerre-von Kármán

Laheg Naziha* **Ghezal A.(encadreur)**

Département de Mathématiques
Faculté des Mathématiques et Sciences de la matière
Université Kasdi Merbah Ouargla, Algérie
*naziha.laheg@gmail.com

Résumé

L'objectif de ce travail est l'étude de l'approximation numérique des solutions non-triviales des équations de Marguerre-von Kármán pour le flambage d'une coque peu-profonde encastré. On propose une méthode d'éléments finis mixte. On généralise le résultat obtenu par Kesaven [1] pour les équations de von Kármán.

Mots clés:
Elasticité non linéaire, Théorie de coque peu-profonde, Méthode d'éléments finis mixtes, Équations de Marguerre-von Kármán.

1. Introduction

Dans cet travail on s'intéresse au calcul des branches de bifurcation (à partir de la solution triviale $\zeta = 0$) des équations de Marguerre-von Kármán, ces équations, qui sont un modèle pour le flambage d'une coque peu-profonde encastré à de forces latérales, s'écrivent:

$$\begin{cases} \Delta^2\zeta = [\phi, \zeta + \theta] + \lambda[f, \zeta + \theta] & \text{dans } \omega, \\ \Delta^2\phi = -[\zeta, \zeta + 2\theta] & \text{dans } \omega, \\ \zeta = \partial_\nu\zeta = \phi = \partial_\nu\phi = 0 & \text{sur } \gamma. \end{cases} \quad (1)$$

où f fonction donnée et λ entier positive, $\omega \subset \mathbb{R}^2$ est un overt borné, ζ le déplacement, ζ, ϕ: $\omega \longmapsto \mathbb{R}^2$, $\theta \subset H^2(\omega)$ definit la surface moiyenne de la coque et γ sa frontière par ailleurs,
$[\eta, \zeta] = \dfrac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2}\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2}\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x_1^2} - 2\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x_1\partial x_2}\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x_1\partial x_2}$.
Les importents références dans ce travial est Kesavan [1], Brezzi [2], Miyoshi [3], Ciarlet [4].

Notation:
On utilise les espaces de lebsgue $L^p(\omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$ et les espaces de Sobolev $H^m(\omega)$. la norme dans L^p est désingnée par $|\ .\ |_{0,p,\omega}$ sauf si $p = 2$ quand nons écrivons $|\ .\ |_{0,\omega}$. la norme et semi-norme habituelles dans $H^m(\omega)$ respectivement désignées par $\|\ .\ \|_{m,\omega}$ et $|\ .\ |_{m,\omega}$. Tout espace produit est muni de la norme produit correspondante mais on continuera à la désigner comme dans le cas scalaire.

2. Les problèmes linéarisé

Théorème 2.1 *Soit $(\sigma, \zeta, \lambda) \in \tilde{\Sigma} \times \tilde{V} \times \mathbb{R}^2$ une solution du problème de valeur propres on a:*

$$(\tilde{PV}) \begin{cases} \text{Trouver } (\sigma, \zeta, \lambda) \in \tilde{\Sigma} \times \tilde{V} \times \mathbb{R}^2 \text{ tels que} \\ \forall\tau \in \tilde{\Sigma}, a(\sigma, \tau) + \tilde{b}(\tau, \zeta) = 0, \\ \forall\upsilon \in \tilde{V}, -\tilde{b}(\sigma, \upsilon) = \lambda \int_\omega [f, \sigma + \theta]\upsilon dx. \end{cases} \quad (2)$$

et le probblème discret s'ecrive:

$$(PV_h) \begin{cases} \text{Trouver } (\sigma_h, \zeta_h, \lambda_h) \in \Sigma_h \times V_h \times \mathbb{R}^2 \text{ tels que} \\ \forall\tau_h \in \Sigma_h, a(\sigma_h, \tau_h) + \tilde{b}(\tau_h, \zeta_h) = 0, \\ \forall\upsilon_h \in V_h, -\tilde{b}(\sigma_h, \upsilon_h) = \lambda_h \int_\omega [f, \sigma_h + \theta]\upsilon_h dx. \end{cases} \quad (3)$$

3. Le problème non lineaire continue

Théorème 3.1 *Le triple $\{(\phi, y), (\sigma, \zeta), \lambda\}$ est une solution du problème suivant:*

$$(\tilde{PN}) \begin{cases} \text{Trouver } ((\phi, y) \in \tilde{\Sigma} \times \tilde{V}, (\sigma, \zeta)) \in \tilde{\Sigma} \times \tilde{V} et \lambda \in \mathbb{R}^2) \text{ tels que} \\ \forall\tau \in \tilde{\Sigma}, a(\phi, \tau) + \tilde{b}(\tau, y) = 0, \\ \forall\upsilon \in \tilde{V}, -\tilde{b}(\phi, \upsilon) = -\int_\omega [\sigma, \sigma + 2\theta]\upsilon dx, \\ \forall\tau \in \tilde{\Sigma}, a(\sigma, \tau) + \tilde{b}(\tau, \zeta) = 0, \\ \forall\upsilon \in \tilde{V}, -\tilde{b}(\sigma, \upsilon) = \lambda \int_\omega [f, \sigma + \theta]\upsilon dx + \int_\omega [\phi, \sigma + \theta]\upsilon dx, \end{cases} \quad (4)$$

où les espaces $\tilde{\Sigma}, \tilde{V}$ sont définit: $\tilde{\Sigma} = (H^1(\omega))_s^4, \tilde{V} = H_0^1(\omega)$.

4. Le problème non linéaire discret

On utilisera par la suite les espaces Σ_h et V_h décrits ci-après. Pour simplifier l'exposé, supposons que ω est un polygone convexe. On se donne une famille régulière de triangulations $\{\mathsf{F}_h\}_h$ de ω et on définit:

$$W_h^K = \{\upsilon_h \in C^0(\overline{\omega}) \mid \forall K \in F_h, \upsilon_h\mid_h \in P_K(K)\}, \quad (5)$$

l' espace associé aux polynómes de degré $\leqq K$, par élément fini de Lagrange de type (K). On pose

$$\Sigma_h = (W_h^K)_s^4, V_h = W_h^K \cap H_0^1(\omega), K \geqq 2. \quad (6)$$

Théorème 4.1 *Donc l'analogue discret du problème non linéaire $(\tilde{PN})$ s'écrive:*

$$(PN_h) \begin{cases} \text{Trouver } ((\phi_h, y_h) \in \Sigma_h \times V_h, (\sigma_h, \zeta_h)) \in \Sigma_h \times V_h et \lambda \in \mathbb{R}^2) \text{ tels que} \\ \forall\tau_h \in \Sigma_h, a(\phi_h, \tau_h) + \tilde{b}(\tau_h, y_h) = 0, \\ \forall\upsilon_h \in V_h, -\tilde{b}(\phi_h, \upsilon_h) = -\int_\omega [\sigma_h, \sigma_h + 2\theta]\upsilon_h dx \\ \forall\tau_h \in \Sigma_h, a(\sigma_h, \tau_h) + \tilde{b}(\tau_h, \zeta_h) = 0, \\ \forall\upsilon_h \in V_h, -\tilde{b}(\sigma_h, \upsilon_h) = \lambda_h \int_\omega [f, \sigma_h + \theta]\upsilon_h dx + \int_\omega [\phi_h, \sigma_h + \theta]\upsilon_h dx. \end{cases} \quad (7)$$

5. Estimations d'erreur

Théorème 5.1 *On suppose que $\zeta_0 \in H^3(\omega) \cap H_0^2(\omega)$. Alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et de ε telle que, pour ε assez petit,*

$$|\ \sigma - \sigma_h\ |_{0,\omega} + |\ \zeta - \zeta_h\ |_{1,\omega} \leq Ch + Ch^2\varepsilon + s_h, \quad (8)$$

$$|\ \lambda - \lambda_h\ | \leq Ch^2 + Ch\varepsilon + s_h + Cr_h + C\varepsilon s_h, \quad (9)$$

où $r_h \longrightarrow 0$ lorseque $h \longrightarrow 0$ et $s_h \longrightarrow 0$ lorseque $h \longrightarrow 0$.

Références

[1] S. Kesavan, *Une méthode d'éléments finis mixte pour les équations de von Kármán*, RAIRO Anal. Numér., 14(2), (1980), 149-173.
[2] F. Brezzi et P.A. Raviart, *Mixed Finite Element Methods for Fourth Order Elliptic Equations*, Rapport Interne, n 9, École polytechnique, palaiseau, (1976).
[3] T.Miyoshi, *A Finite Element Method for the Solution of Fourth Order Partial Differential Equations*, Kumamoto J.Sc.(Math.), vol. 9, (1973), p. 87-116.
[4] P.G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic problems*, North-Holland, Amasterdam, (1978).