Discrétisations spectral des équation de Laplace avec conditions aux limites de Dirichlet

Messaoudi Abdel-djalil* **Bennour H.(encadreur)**

Département de Mathématiques
Faculté des Mathématiques et Sciences de la matière
Université Kasdi Merbah Ouargla, Algérie
*mess91mess@gmail.com

Abstract

Les discrétisations spectrales des équations aux dérivées partielles reposent sur le degré élevé des approximations polynomiales et sur l'utilisation des bases tensoriels des polynômes. D'abord, sur l'intervalle Λ ou sur le carré Λ^2, nous avons décrit les outils de base des méthodes spectrales, et nous avons prouvé certaines propriétés optimales des approximations et d'interpolations polynômiales. Enfin, nous les avons appliquées à l'analyse spectrale de la discrétisation des équations de Laplace.

1. Introduction

Les techniques spectral sont des méthodes d'ordre élevé qui permettent soit obtenir des résultats très précis ou de réduire le nombre de degrés de liberté pour une précision standard fixe. Nous mentionnons les prévisions de la météorologie et de la simulation directe de turbulence entre les applications les plus complexes. En tant que premier, ils s'appuient sur un degré élevé des approximations polynômiales par morceaux, et sur l'utilisation de bases tensorielles des polynômes. Pour ces raisons, les géométries de base de ces méthodes sont tensoriels, c'est à dire qu'ils sont carré ou cube. Nous nous referons à [31], [41] et [22] pour une présentation générale et une analyse des méthodes spectrales dans ces géométries, et aussi [37], [69] et [34] pour extensions loin à triangles.Les espaces discrets pour les méthodes spectrales sont simplement des espaces des polynômes, et le paramètre de discrétisation est le degré maximal de ces polynômes. La discrétisation est de type Galerkin, c'est-à-dire qu'elle s'appuie sur la formulation variationnelle du problème continu: le problème discret est construit en remplaçant l'espaces fonctionnels par des espaces discrets et les intégrales par des formules quadratures tensorielles appropriées. Son analyse numérique s'appuie principalement sur les résultats de la meilleure approximation polynômiale et aussi d'interpolation polynômiale aux nuds de la formule. Nous avons décrire et analyser la discrétisation d'équation de Laplace, et nous présente son implémentation. Nous nous referons à [22] Pour une analyse plus complète de ces techniques, et aussi pour [56], [67] et [40] pour plus de détails sur la mise en uvre. Nous présentons la méthode spectrale dans le carré $\Omega =]-1,1[^d$, $d = 2$. Même si cette technique peut évidemment être tendue à des domaines qui sont les images de Ω par fonctions lisses, par exemple quadratures convexes , l'idée principale dans ce cas est de revenir au domaine de référence Ω, de sorte que seuls certains autres arguments techniques apparaissent. Nous choisissons d'éviter eux.

Dans le premier chapitre, nous nous intéressons à donner quelque notions et préliminaires, qui décrivent les outils de base pour les techniques spectrales: on va définir l'espace discret correspondant, on introduit les bases sur les polynòmes orthogonaux; les polynòmes de Legendre, ensuite on décrit les formules de quadratures qui sont employées pour évaluer les intégrales intervenant dans la formule variationnelle.

Dans le deuxième chapitre, on introduit quelques résultats de l'approximation polynòmiale, et certains résultats de l'interpolation polynòmiale sur l'intervalle Λ puis sur le carré Λ^2.

Dans le dernier chapitre, nous appliquons l'analyse de la discrétisation spectrale à l'équation de Laplace sur le carré par la méthode de Galerkin. Finalement, on estime l'erreur entre la solution exacte et approchée à la meilleur approximation de la solution dans l'espace discrétisé et à l'erreur d'interpolation aux nuds de collocation sur le second membre de l'équation.

2. Preliminaries

Lemma 2.1 *Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit L_n un polynôme non nul de degré n qui soit orthogonal à $\mathbb{P}_{n-1}(\Lambda)$ pour le produit $L^2(\Lambda)$. Alors*
1) L_n à la parité de son degré: $L_n = (-1)^n L_n$
2)Les zéros de L_n sont réels strictement compris entre -1 et 1.

proof 2.2 *1) Le polynôme $\tilde{L_n}$ définie par $\tilde{L_n} = L_n(-x)$ est lui aussi orthogonal à $\mathbf{P}_{n-1}(\Lambda)$ et de degré n. Donc $\tilde{L_n}$ est proportionnel à L_n. Comme la symétrie est involution, $\tilde{L_n}$ est en fait égale à $+L_n$ ou à $-L_n$ et comme le degré de L_n égale n on obtient(1)*
2)Soit l la nombre de zéros du polynôme L_n qui sont distinct strictement compris entre -1 et 1 et d'ordre impair. Soit $x_1, ..., x_l$ les zéros du L_n si $l < n$ les polynômes L_n est orthogonal à tous les polynômes des degré $\leq n-1$ alors $\int_{-1}^{1} L_n(x)(x-x_1).....(x-x_n)dx = 0$ ceci impossible car la fonction intègre ne change pas de signe donc $l = n$ ceci montre que L_n ne s'annulent pas en -1 et 1 alors on peut définir les polynòmes de Legendre.

Proposition 2.3 *Soit N entier positif, il existe un unique ensemble de N points ε_j, $1 \leq j \leq N$ et il existe un unique ensemble de N réels ω_j , $1 \leq j \leq N$ tel que l'égalité suivante ait lieu pour tout polynôme $\Phi \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$*

$$\int_\Lambda \Phi(x)dx = \sum_{j=1}^{N} \Phi(\varepsilon_j)\omega_j \tag{2.1}$$

Les nuds sont les zéros ε_j, $1 \leq j \leq N$ de L_N et les poids ω_j , $1 \leq j \leq N$ sont positifs

proof 2.4 *Soit h_j les polynômes de Lagrange associés aux ε_j, $1 \leq j \leq N$ c'est à dire que h_k, est l'unique polynôme de degré $N-1$ qui vaut 1 en ε_k et 0 en les autres ε_j, $j \neq k$. Les h_k, $1 \leq k \leq N$, forment une base de $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$. On pose*

$$\omega_k = \int_\Lambda h_k(\varepsilon)d\varepsilon, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Il set alors évident que la formule d'intégration

$$\int_\Lambda \Phi(x)dx = \sum_{j=1}^{N} \Phi(\varepsilon_j)\omega_j$$

est vraie pour tout les h_k, $1 \leq k \leq N$ et donc par combinaison linéaire,pour tout $\Phi \in \mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$. soit maintenant $\Phi \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$. par division euclidienne par L_N, Φ s'écrit $\Phi = QL_N + R$, avec $Q, R \in \mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$ comme L_N est orthogonal à $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$

$$\int_\Lambda \Phi(x)dx = \int_\Lambda Q(x)L_N(x)dx + \int_\Lambda R(x)dx = \int_\Lambda R(x)dx$$

d'où, comme $R \in \mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$

$$\int_\Lambda \Phi(x)dx = \sum_{j=1}^{N} R(\varepsilon_j)\omega_j \tag{2.2}$$

or $\Phi(\varepsilon_j) = Q(\varepsilon_j)L_N(\varepsilon_j) + R(\varepsilon_j)$, et comme les $L_N(\varepsilon_j)$ sont tous nuls, $\Phi(\varepsilon_j) = R(\varepsilon_j)$, $1 \leq j \leq N$ ainsi on a obtenu(2.1)
pour montrer que les ω_j sont positifs,il suffit de remarquer que pour tout $1 \leq k \leq N$ $h_k^2 \in \mathbb{P}_{2N-2}(\Lambda)$ la formule (2.1)donne alors

$$\int_\Lambda h_k^2(x)dx = \sum_{j=1}^{N} h_k^2(\varepsilon_j)\omega_j = \omega_k > 0$$

References

[1] C. Bernardi, Y. Maday Approximations spectrales de probl'emes aux limites elliptiques, Math´ematiques et Applications 10, SMAI, Springer-Verlag, Paris (1992).

[2] C. Bernardi, Y. Maday Some spectral approximations of one-dimensional fourth-order problems, Progress in Approximation Theory, ´edit´e par P. Nevai, A. Pinkus, Academic Press, San Diego (1991), 43116.

[3] C. Bernardi, M. Dauge, Y. Maday Polynomials in Weighted Sobolev Spaces: Basics and Trace Liftings, Internal Report 92039, Laboratoire dAnalyse Num´erique, Universit´e Pierre et Marie Curie, Paris (1992).

[4] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, T.A. Zang Spectral Methods in Fluid Dynamics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1987).

[5] M. Dauge Elliptic Boundary Value Problems on Corner Domains, Lecture Notes in Mathematics 1341, Springer-Verlag (1988).

[6] P. Grisvard Elliptic Problems in Nonsmooth Domains, Pitman (1985).

[7] Y. Maday, A.T. Patera Spectral element methods for the incompressible Navier-Stokes equations, in State of the Art Surveys in Computational Mechanics, A. K. Noor ed. (1989), 71143.

[8] E. M. RønquistOptimal Spectral Element Methods for the unsteady three-dimens- ional incompressible Navier-Stokes equations, Ph.D. Thesis, M.I.T., Cambridge, MA. (1988)