Existence de solution pour un certain temps de l'inéquation variationnelle dépendante

Moulay Aicha* **Bensayah A.(encadreur)**

Département de Mathématiques
Faculté des Mathématiques et Sciences de la matière
Université Kasdi Merbah Ouargla, Algérie
*moulayaicha11@gmail.com

Abstract

Dans cet article, nous étudions l'existence d'une solution pour un example de l'inéquation variationnelle parabolique
***mot-clés**: l'inéquation variationnelle parabolique , la méthode de Roth.*

1. Introduction

L'exemple suivant est le déploiement d'un modèle de problème mécanique , On considère le problème pour trouver $u = u(x,t)$ tel que

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0,T) \\ u \geq 0\,; \partial_n u \geq 0\,; u\partial_n u = 0 \text{ sur } \Gamma \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0 \; \forall x \in \Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

- On doit preuves l'existence de la solution et pour le preuve On utilisent la méthode de Roth.

2. Problème classique

Trouver u telle que

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0,T) \\ u \geq 0\,; \partial_n u \geq 0\,; u\partial_n u = 0 \text{ sur } \Gamma \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0 \; \forall x \in \Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

ou $u : \Omega \times (0,T) \longmapsto \mathbb{R}$
$(x,t) \longmapsto u(x,t)$
$\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ $\partial\Omega$ assez régulière ,$u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$

3. Problème variationnel

$$\begin{cases} \left[u'(t), v-u\right] + [Au, v-u] \geq [f, v-u] \\ u(t); v(t) \in Kp.p \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

$[.,.]$ = produit scalaire dans $L^2(0,T,H)$ ou entre $L^2(0,T,V)$ et $L^2(0,T,V')$.
et $V = H^1_{\Gamma_0} = \left\{v \in H^1 / v = 0 \;\; sur \Gamma_0\right\}$; $H = L^2(\Omega)$; $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$
$K = \{v \in V / v \geq 0 \, on \, \Gamma\}$

4. L'existence de solution

4.1 Problème discret

Pour chaque $i = 1, 2, ...$ On considère le problème pour trouver la solution $u_i \in K$ de

$$\left\langle \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, v - u_i \right\rangle + a(u_i, v - u_i) \geq (f, v - u_i) \forall v \in \Omega \tag{4.1}$$

l'inéquation (4.1) $\Longleftrightarrow$ de

$$\frac{1}{h}\langle u_i - f, v - u_i\rangle + a(u_i, v - u_i) \geq \frac{1}{h}\langle u_{i-1}, v - u_i\rangle \tag{4.2}$$

Observe que u_{i-1} savoir à pour chaque étape,et construire la fonction de Roth

$$u_n(x,t) = u_{i-1}(x) + \frac{t - t_{i-1}}{h}(u_i(x) - u_{i-1}(x)) \;\; t \in \left[t_{i-1,t_i}\right] \tag{4.3}$$

- Pour montrer que $u_n(x,t)$ convergent à une solution $u(x,t)$ Quand $n \to \infty$ de

$$\left\langle u'(t) - f, v(t) - u(t) \right\rangle + a(u(t), v(t) - u(t)) \geq 0 \tag{4.4}$$

-Nous établissons quelque estimation nécessaire.

- Pour $i = j - 1$Nous prenons $v = u_j$ dans l'inéquation (4.1)et pour$i = j$ on prenons $v = u_{j-1}$ pour produire

$$\left\langle \frac{u_{j-1} - u_{j-2}}{h} - f, u_j - u_{j-1} \right\rangle + a(u_{j-1}, u_j - u_{j-1}) \geq 0 \tag{4.5}$$

$$-\left\langle \frac{u_j - u_{j-1}}{h} - f, u_{j-1} - u_j \right\rangle + a(u_j, u_{j-1} - u_j) \geq 0 \tag{4.6}$$

On additionne (4.5) et (4.6) on trouve

$$\frac{1}{h}\|u_j - u_{j-1}\|^2 + \|\nabla(u_j - u_{j-1})\|^2 \leq \frac{1}{h}\left\langle u_{j-1} - u_{j-2}, u_j - u_{j-1}\right\rangle \tag{4.7}$$

à partir de laquelle nous obtenons

$$\|u_j - u_{j-1}\|^2 + h\|\nabla(u_j - u_{j-1})\|^2 \leq \|u_{j-1} - u_{j-2}\|^2 \; j \geq 2 \tag{4.8}$$

On appliquant l'inégalité de Cauchy Schwartz et utilisent l'inégalité élémentaire $2ab \leq a^2 + b^2$ pour le cas $j = 1$,On choisissons $v = u_0$ dans (4.1) pour obtenir

$$\frac{1}{h}\|u_1 - u_0\|^2 + \|\nabla(u_1 - u_0)\|^2 \leq |\left\langle \nabla u_0, \nabla(u_1 - u_0)\right\rangle| \tag{4.9}$$

Si la donnée initiale u_0 à $H^2(\Omega) \cap H^1_0$ l'intégration par parties révèle que

$$|\left\langle \nabla u_0, \nabla(u_1 - u_0)\right\rangle| \leq |\left\langle \Delta u_0, u_1 - u_0\right\rangle| \leq \|\Delta_0\|\|u_1 - u_0\|.$$

afin que nous ayons la borne de base $\|\dfrac{u_1 - u_0}{h}\| \leq \|\Delta u_0\|$ combinant cette estimation à l'inégalité (4.8) montre que

$$\|\frac{u_i - u_{i-1}}{h}\| \leq c \;\; i = 1, 2, ..., n \tag{4.10}$$

4.1.1 L'estimation a priori

- Pour c une constant qui est indépendant de n, on choisissons $v = 0$ dans (4.1),une borne similaire impliquant la norme suivant:

$$\|u_i\|_V \leq c \;\; i = 1, 2, ..., n \tag{4.11}$$

- ces obligation de fournir une estimation uniforme sur la dérivée u'_n depuis $u'_n = \dfrac{u_i - u_{i-1}}{h}$
- donc (4.10) dit que

$$\|u'_n\| \leq C \; pour \;\; t \in [0,T] \tag{4.12}$$

- qui donne immédiatement le résultat de équicontinuité $u_n(t) - u_n(\tau) \leq c|t - \tau| \;\; pour \; t, \tau \in [0,T]$ - pour la famille u_n,$n \in \mathbb{N}$ le théorème de Arzela-Ascoli et l'intégration compact de H^1_0 vers $L^2(\omega)$ puis la garantie que u_n converge vers une fonction u dans l'espace $C([0,T], L^2(\omega))$,En fait u est lipschitzienne et donc différentiable presque partout dans $[0,T]$.
- Il reste à démontrer que la limite u résoudre le parabolique variationnelle (4.4),pour accomplir cette , On définie $\overline{u}_n(t)$ comme la fonction de l'étape

$$\overline{u}_n(t) = u_i \; pour t \in [t_{i-1}, t_i] \tag{4.13}$$

- ensuite de (4.11) que $\{\bar{u_n}\}$ à une suite qui converge faiblement dans H^1_0,que nous marquons que $\{\bar{u_n}\}$ on outre (4.10) donne la borne$|\bar{u_n}(t) - u_n(t)| \leq \dfrac{c}{n}$
- D'où il se ensuite que la limite faible de cette séquence est u en exploitant la borne (4.12) d'une manière similaire

4.1.2 Passage à la limite

On voir que u'_n converge faiblement vers u' dans $L^2(0,T,L^{2(\Omega)})$
-en fonction de u_n et $\bar{u_n}$,l'inéquation variationnelle elliptique (4.1) est:

$$\langle \bar{u_n}(t) - f, v(t) - \bar{u_n}(t)\rangle + a(\bar{u_n}(t), v(t) - \bar{u_n}(t)) \leq 0 \;\; \forall v \in K \tag{4.14}$$

- qui détient presque partout dans $[0,T]$,pour les points arbitraires τ_1 et τ_2 dans $[0,T]$,on intégré (4.14) à partir de τ_1 à τ_2 donne

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\langle u'_n(t) - f, v(t) - \bar{u_n}(t) \right\rangle e + a(\bar{u_n}(t), v(t) - \bar{u_n}(t))dt \geq 0 \;\; \forall v \in K \tag{4.15}$$

-On prend lim inf quand $n \to \infty$ dans cette inéquation on trouve

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\langle u'(t) - f, v(t) - u(t) \right\rangle + a(u(t), v(t) - u(t))dt \geq 0 \;\; \forall v \in K \tag{4.16}$$

Quand $\overline{u}_n \to u$ et $u'_n \rightharpoonup u'$ dans $L^2(0,T,L^2(\Omega))$ et la forme bilinéaire a(.,.) est faiblement semi-continue.
alors u est solution de le problème variationnelle

References

[1] H.Brézis. Analyse Fonctionnelle. Masson(1983).
[2] J.L.Lions. Numericale Analysis of variational inequalities ,Paris 1976.
[3] R.Glowinski. Lecturer on Numerical Methods for Non-linear variational problems.Berlin Heidelberg New york(1980).
[4] Jacques Louis Lions. Sur les problèmes unilatéraux(1968)
[5] Mathew Rudd and Klaus schmitt. Variational Inequalities of Elliptic and parabolic Type(2002).
[6] H.Brézis. Équation et inéquation non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité. Ann. Ins. Fourier,18(1968),pp.115-175.
[7] R.Glowinski. Numerical Methods for Non linear variational problems. Howston.TX77004-3008.USA,1984.