A bilateral contact problem with adhesion and damage between two viscoelastic bodies

Naami maria* **Aissaoui A.(encadreur)**

Département de Mathématiques
Faculté des Mathématiques et Sciences de la matière
Université Kasdi Merbah Ouargla, Algérie
*marria43@gmail.com

Abstract

This paper deals with the study of a nonlinear problem of bilateral, frictionless adhesive contact between two viscoelastic deformable bodies with damage. The adhesion process on the common contact surface is modelled by a surface variable, the bonding field, the tangential shear due to the bonding field being included. We obtain an existence and uniqueness result by construction of an appropriate mapping which is shown to be a contraction on a Hilbert space.

Keywords: bilateral frictionless contact; adhesion; elastic materials; fixed point;
damage; weak solution.

1. Introduction

Les mathématiques et la mécanique ont été des partenaires complémentaires depuis le temps de Newton, et l'histoire des sciences montre beaucoup de preuves de l'influence bénéfique de ces domaines l'un sur l'autre.
Le contact entre corps déformables abondant dans l'industrie et la vie quotidienne.
En raison de l'importance industrielle des procédés physiques qui ont lieu lors d'un contact, un effort considérable a été fait dans leur modélisation, l'analyse, analyse numérique et simulations numériques, et par conséquent, la théorie mathématique de la mécanique de contact a fait des progrès impressionnants ces derniers temps.
En raison de leur complexité inhérente, les phénomènes de contact conduit à des modèles mathématiques exprimés en termes de problèmes d'évolution fortement non linéaires.

2. Préliminaries

On note par S_3 l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur R^3, Soient Ω^1 et Ω^2 deux domaines bornées de R^3. Dans la suite, nous employons un indice supérieur ℓ pour indiquer que la quantité est liée au domaine Ω^ℓ; $\ell = 1, 2$. Pour chaque domaine Ω^ℓ, nous supposons que sa frontière Γ^ℓ est lipschitzienne continue, et divisée en trois parties disjointes mesurables Γ^1, Γ^2 et Γ^3, avec $mes(\Gamma^1) > 0$.
La normale unitaire extérieur Γ^ℓ est noté par $\nu^\ell = (\nu_i^\ell)$
On utilise les notations

$$
\begin{aligned}
H^\ell &= \{\mathbf{u} = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega^\ell)\} = L^2(\Omega^\ell)^d,\\
H_1^\ell &= \{\mathbf{u} = (u_i) \mid u_i \in H^1(\Omega^\ell)\},\\
\mathcal{H}^\ell &= \{\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega^\ell)\},\\
V^\ell &= \{\mathbf{v} \in H_1^\ell \mid \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\ell\}.
\end{aligned}
$$

les espaces H^ℓ, H_1^ℓ et $\mathcal{H}^\ell$ sont des espaces de Hilbert rèels, munis des produits scalaires notè par $(\cdot,\cdot)_{H^\ell}$, $(\cdot,\cdot)_{H_1^\ell}$ et $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}^\ell}$ respectivement.

On définit le produit scalaire sur lespace V^ℓ par $(\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{V^\ell} = (\varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell}, \quad \forall \mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell \in V^\ell$,
Nous rappelons la formule de Green

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \nu^\ell . \mathbf{v}^\ell da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell.$$

On rappelle que, par le théorème de trace de Sobolev, il existe C_0^ℓ, qui dépend seulement de Ω^ℓ, Γ_1^ℓ et Γ_3^ℓ tel que

$$\|\mathbf{v}^\ell\|_{L^2(\Gamma_3^\ell)^3} \leq c_0^\ell \|\mathbf{v}^\ell\|_{V^\ell}, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell,$$

En outre, nous avons besoin de lespace fonctionnel

$$V = \{\mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \in V^1 \times V^2 \mid v_\nu^1 + v_\nu^2 = 0 \text{ on } \Gamma_3\},$$

3. Formulation du problème mécanique-Hypothèses

Ces deux corps sont encastrés dans $\Gamma_1^\ell \times (0;T)$, soumis une densité de forces volumiques f_0^ℓ qui agissent sur $\Gamma^\ell \times (0;T)$, et des forces surfaciques de densité f_2^ℓ qui agissent sur $\Gamma_2^\ell(0;T)$. Les deux corps sont en contact avec adhésion le long de la partie commune $\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2$ qui sera noté Γ_3 ci-dessous. On note par $\mathbf{u}^\ell$ les vecteurs des déplacements, et par σ^ℓ le tenseur des contraintes, et par $\varepsilon^\ell = \varepsilon(u^\ell)$ le tenseur de déformation linéarisé.
La formulation classique du problème mécanique de contact bilatéral sans frottement avec adhésion entre deux corps viscoélastiques correspondant est la suivante
Problème P Trouver le champ des dèplacements $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2)$ tel que $\mathbf{u}^\ell : \Omega^\ell \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$, et le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2)$ tel que $\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\ell}} : \Omega^\ell \times [0,T] \to \mathbb{S}^d$, et le champ endommagement $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2)$ tel que $\alpha^\ell : \Omega^\ell \times [0,T] \to \mathbb{R}$ et le champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0,T] \to \mathbb{R}$ telles que

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\sigma}^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell) + \mathcal{G}^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \alpha^\ell), && \text{dans } \Omega^\ell \times (0,T),\\
&\dot{\alpha}^\ell - k^\ell \Delta \alpha^\ell + \partial \varphi_{K^\ell}(\alpha^\ell) \ni S^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \alpha^\ell), && \text{dans } \Omega^\ell \times (0,T),\\
&\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell + f_0^\ell = \mathbf{0}, && \text{dans } \Omega^\ell \times (0,T),\\
&\mathbf{u}^\ell = \mathbf{0}, && \text{sur } \Gamma_1^\ell \times (0,T),\\
&\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell = f_2^\ell, && \text{sur } \Gamma_2^\ell \times (0,T),\\
&\boldsymbol{\sigma}_\nu^1 = \boldsymbol{\sigma}_\nu^2, \quad \mathbf{u}_\nu^1 + \mathbf{u}_\nu^2 = 0, && \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T),\\
&-\sigma_\tau^1 = \sigma_\tau^2 = p_\tau(\beta, u_\tau^1 - u_\tau^2), && \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T),\\
&\dot{\beta} = H_{ad}(\beta, R(|u_\tau^1 - u_\tau^2|)), && \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T),\\
&\frac{\partial \alpha^\ell}{\partial \nu^\ell} = 0, && \text{sur } \Gamma^\ell \times (0,T),\\
&\mathbf{u}^\ell(0) = \mathbf{u}_0^\ell \qquad \alpha^\ell(0) = \alpha_0^\ell, && \text{dans } \Omega^\ell,\\
&\beta(0) = \beta_0, && \text{sur } \Gamma_3.
\end{aligned}
$$

et on suppose que les forces volumiqes et la traction surfacique ont la régularitè suivante.

$$f_0^\ell \in L^\infty(0,T;H^\ell), \quad f_2^\ell \in L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_2^\ell)^d),$$

Finallement, les conditions initiales satisfait

$$\mathbf{u}_0^\ell \in V^\ell, \quad \alpha_0^\ell \in K^\ell \quad \beta_0 \in L^\infty(\Gamma_3), \quad 0 \leq \beta_0 \leq 1 \text{ a.e. } x \in \Gamma_3.$$

Par le théorème de représentation de Riesz, nous pouvons définir lélément $f(t) \in V$ tel que Nous définissons l'aplication $\mathbf{f} = (\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2) : [0,T] \to V$ par l'égalité

$$(\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V = \sum_{\ell=1}^{2} \Big((\mathbf{f}_0^\ell(t), \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} + \int_{\Gamma_2^\ell} \mathbf{f}_2^\ell(t).\mathbf{v}^\ell da \Big)$$

Soit $j : L^\infty(\Gamma_3) \times V \times V \to \mathbb{R}$ la fonctionnelle

$$j(\beta, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} \mathbf{p}_\tau(\beta, \mathbf{u}_\tau^1 - \mathbf{u}_\tau^2).(\mathbf{v}_\tau^1 - \mathbf{v}_\tau^2) da.$$

Alors, la formulation variationnelle du problème mécanique de contact bilatéral sans frottement, avec adhésion entre deux corps viscoélastiques est la suivante.
Probléme PV Trouver le champ des dèplacements $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) : [0,T] \to \mathbb{V}$, et le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2) : [0,T] \to \mathcal{H}$, et le champ endommagement $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2) : [0,T] \to H^1(\Omega)$ et le champ d'adhésion $\beta : [0,T] \to L^\infty(\Gamma_3)$ telles que

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{G}\varepsilon(\mathbf{u}(t), \alpha)\\
&\dot{\beta}(t) = H_{ad}(\beta(t), R(|\mathbf{u}_\tau^1(t) - \mathbf{u}_\tau^2(t)|)), \quad 0 \leq \beta(t) \leq 1,\\
&(\boldsymbol{\sigma}(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V, \quad \forall \mathbf{v} \in V,\\
&\alpha(t) \in K, \sum_{\ell=1}^{2} (\dot{\alpha}^\ell(t), \xi^\ell - \alpha^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\alpha(t), \xi - \alpha(t))\\
&\qquad \geq \sum_{\ell=1}^{2} (S^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \alpha^\ell(t)), \xi^\ell - \alpha^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)}, \ \xi \in K
\end{aligned}
$$

a.e $t \in [0,T]$,

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \beta(0) = \beta_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0.$$

L'étude du problème PV se fait dans la prochaine section, et cela dans plusieurs étapes, et elle est basée sur les résultats des équations diffrentielles, et largument du point fixe.

4. l' existence et résultat d'unicité

Notre resultat principal d'existence et d'unicité est le suivant.

Theorem 4.1 *Sous les hypothèses, le problème PV admet une solution unique* $\{u, \sigma, \alpha, \beta\}$ *ayant la régularité* $\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;V)$, $\sigma \in L^\infty(0,T;\mathcal{H})$, $\alpha \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$ $\beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^\infty(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z}$.

La démonstration du théorème (4.1) se fait en plusieurs étapes. Elle est basée sur les résultats des équations d'évolution avec les opérateurs monotones et les arguments du point fixe, mais avec un choix différent de l'espace V et de la fonctionnelle j.

References

[1] A. Aissaoui, N. Hemici, Bilateral contact problem with adhesion and damage, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations* No18, 1-16, (2014).

[2] M. Frémond; *Equilibre des structures qui adhèrent à leur support*, C. R. Acad. Sci. Paris, 295, Série II, 913-916 (1982).

[3] M. Frémond, *Adhérence des solides*; J. Mécanique Théorique et Appliquée, 6, 383-407 (1987).

[4] N. Hemici, B. Awbi, M. Sofonea; *A viscoelastic frictionless contact problem with normal compliance and adhesion*, Ann. Univ. Bucarest, Math., 51, 145-156 (2002).

[5] N. Hemici, A. Matei; *A frictionless contact problem with adhesion between two elastic bodies* , Ann. Univ. Craiova, Math. Comp.Sci. ser.Volume 30(2), 90-99 (2003).

[6] N. Hemici, B. Awbi,M. Sofonea; *Viscoelastic problem contact with compliance normal and adhesion*, Annals of University of Bucarest 51 (2002) 131-142.

[7] N. Hemici, M. Sofonea; *Analysis of dynamic bilateral contact problem with adhesion*, Proceedings of the Fourth International Conference on Applied Mathematics and Engineering Sciences, (CIMASI 2002), Casablanca (2002), CD-ROM.

[8] T. Hadj Ammar, B. Benyattou; *Variational analysis of a contact problem with friction between two deformable bodies* , Stud. Univ. Babeÿs-Bolyai Math. 57(2012), No. 3, 427Ũ444.

[9] M. Sofonea, W. Han, M. Shillor; *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 276, Chapman, Hall/CRC Press, New york, 2006.

[10] N. Strömberg, L. Johansson and A. Klarbring; *Derivation and analysis of a generalized standard model for contact friction and wear*, *Int. J. Solids Structures* **33** (1996), 1817–1836.