INTERPOLE D'OSWALD

Zahaf Malika

Département des Mathématiques
Université Kasdi Merbah Ouargla 30000, Algerie
zahafmalika@gmail.com

Résumé

*Dans cette présentation on s'intéresse a la technique de moyennisation d'**Oswald** ([2]) pour construire des fonctions globalement de classe C^1 et polynomiale par morceaux à partir des fonctions qui seulement continues et à l'utilisation de l'opérateur d'interpolation qui résulte dans le context de la méthode des éléments finis. On considére le cas d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ borné régulier de classe $C^{1,1}$.*

Mots Clés : interpolation, espace de Sobolev, éléments finis.

1. Introduction

Il est bien connu que pour définir l'intérpolé d'Hermite d'une fonction, celle ci doit être au moins de classe C^1 (voir [2]). Dans le cas d'une dimension, le théoréme d'injection de Sobolev (voir [1]), qui affirme que les éléments de l'espace H^1 admettent des représentants continus,donc dans le cas unidimentionnel on peut définir l'intérpolé d'Hermite d'une fonctions de l'espace H^2, car cette fonction admet un représentant de classe C^1. Mais dans le cas bidimensionnel, il existe des éléments de H^1 qui ne sont pas continus. L'exemple suivant montre qu'il existe des éléments de H^2 qui ne sont pas de classe C^1.
Soit la fonction

$$v(x) = \begin{cases} |x| \ln\left(\ln \frac{1}{|x|}\right), & \text{avec } |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Alors $v \in H^2(B(0, \frac{1}{2}))$ mais $v \notin C^1(B(0, \frac{1}{2}))$

1. On montre que :$v \in H^2(B(0, \frac{1}{2}))$
   (a) comme $\int_B v^2\, dx < \infty$ alors $v \in L^2(B(0, \frac{1}{2}))$
   (b) $\frac{\partial v}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial v}{\partial x_2} \in L^2$
   (c) Il est facile de montrer que :$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \in L^2$ la même chose pour $\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \in L^2$ (utilisant les cordonnées polaires), alors :$v \in H^1(B(0, \frac{1}{2}))$
   Donc : $v \in H^2(B(0, \frac{1}{2}))$
2. On remarque :

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{v(x) - v(0)}{|x - 0|} = \lim_{x \longrightarrow 0} \ln|\ln \frac{1}{|x|}| \longrightarrow \infty$$

   Alors $v \notin C^1(B(0, \frac{1}{2}))$

Donc on ne peut pas définir l'intérpolé d'Hermite, qui est défini par :

$$\mathcal{H}_h^1 v := \sum_{i=1}^{K} N_i(v)\, \varphi_i.$$

avec : $N_i(v) = v(z_i)$ et $N_i \subset \mathcal{N} = \{N_1, N_2, ..., N_{10}\}$.
Soit Ω un domaine polygonale de $\mathbb{R}^2$ et $f \in L^2(\Omega)$.

2. Problème modèle d'order quatre

On considère le problème biharmonique sur un domaine polygonal avec des conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann homogènes

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f, \ x \in \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \ x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

Ce problème peut être résolut numériquement en utilisant des méthodes conformes de classe C^1. La méthode d'éléments finis basée sur ces éléments (par exemple l'élément Hermite ou l'élément Bogner - Fox - Schmit est compliquée, et encore plus dans la dimension trois.

2.1 Le problème variationnel

Le problème variationnel correspondant à (2.1) est le suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in (H^2 \cap H_0^1)(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u, v) = L(v). \end{cases}$$

Avec :

$$a(u, v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla^2 u : \nabla^2 v dx, \quad \text{où } \nabla^2 u : \nabla^2 v = \sum_{i,j=1}^{2} \partial_{ij}^2 u\, \partial_{ij}^2 v.$$

$$L(v) = \int_\Omega f v\, dx$$

2.2 Le problème discret

Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation régulière de Ω. On définit l'espace des éléments finis :

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_{h/T} \in \mathbb{P}^k(T), (k \geq 2), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, v_h = 0 \text{ on } \partial\Omega\} \subset H_0^1(\Omega)$$

Alors on définit le **saut** et la **moyenne** sur une arête intérieure e par :

$$[\![v]\!] = v_- \mathbf{n}^- + v_+ \mathbf{n}^+ \quad \text{et} \quad \{v\} = \frac{\nabla v_- + \nabla v_+}{2}.$$

Pour les problèmes d'ordre quatre on définit :

$$\left[\!\!\left[\frac{\partial v}{\partial n}\right]\!\!\right] = (\nabla v_+ + \nabla v_-) \cdot n \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} = n \cdot (\nabla^2 v) n.$$

On définit le problème discret suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a_h(u_h, v) = \int_\Omega f v\, dx \quad \forall v \in V_h. \end{cases} \tag{2.2}$$

avec

$$a_h(w, v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla^2 w : \nabla^2 v dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{\!\!\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}\right\}\!\!\right\} \left[\!\!\left[\frac{\partial v}{\partial n}\right]\!\!\right] ds$$
$$+ \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{\!\!\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial n^2}\right\}\!\!\right\} \left[\!\!\left[\frac{\partial w}{\partial n}\right]\!\!\right] ds + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \int_e \left[\!\!\left[\frac{\partial w}{\partial n}\right]\!\!\right] \left[\!\!\left[\frac{\partial v}{\partial n}\right]\!\!\right] ds$$

2.3 Estimation d'erreur concrète

Si la solution u du problème (2.1) a la régularité $H^4(\Omega)$ l'orthogonalité de Galerkin et le théorème d'interpolation (en utilisant l'interpolé d'Hermite par exemple) [3] qui affirme l'estimation suivante :

$$h_T^{-2\gamma} \|v - \Pi_h v\|_{L^2(T)}^2 + h_T^{2(1-\gamma)} |v - \Pi_h v|_{H^1(T)}^2 + h_T^{2(2-\gamma)} |v - \Pi_h v|_{H^2(T)}^2$$
$$\leq C\|v\|_{H^s(T)}^2 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\ \forall v \in Hs(\Omega),\ s > \frac{5}{2}$$

impliquent l'estimation d'erreur concrète suivante :

$$\|u - u_h\|_h \leq C h^{s-2} |u|_{H^s(\Omega)} \quad 2 < s \leq k + 1 \tag{2.3}$$

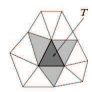
Remarque 2.1 *Mais le problème avec cette estimation est le fait qu'elle exige la régularité $H^4(\Omega)$ alors que, la régularité de la solutions faibles du problème (2.1) est seulement H^2 qui nécessite la création d'un interpolé pour les fonctions de classe H^2 avec des estimées analogues à celles de l'intérpolé d'Hermite.*

3. L'intérpolé d'OSWALD

Définition de l'opérateur E_h Soit $v \in V_h$ alors on définit $E_h(v) = w$ par

$$\begin{cases} w(x) = v(x) & \text{si } x \text{ un noeud intérieur} \\ (\nabla w)(x) = \frac{1}{|\mathcal{T}_x|} \sum_{T \in \mathcal{T}_x} \nabla v_{/T} & \text{si } x \in \mathcal{N}_h/\Gamma \\ \frac{\partial w}{\partial n}(m) = \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial n}(m) & \text{si } m \text{ est un point milieu sur e} \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\mathcal{T}_x = \{T \in \mathcal{T}_h$ tel que x une arrête sur $\partial T\}$.



Proposition 3.1 *L'opérateur E_h satisfait les propriétés suivantes :*

$$h_T^{-2} \|v - E_h(v)\|_{L^2(T)}^2 + h_T^2 |v - E_h(v)|_{H^1(T)}^2 + h_T^4 |v - E_h(v)|_{H^2(T)}^2$$
$$\leq C\|v\|_h^2 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\ \forall v \in V_h$$

Références

[1] H.Brezis, *Analyse Fonctionnelle*,Masson(1983).

[2] Brenner S., Scott R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods (3ed., Springer, 2007).

[3] J.Blowey and M.Jansen. *frontiers in numerical analysis*(durham 2010)

[4] P.Clément.Approximation by finite element functions using local regularization.