N° d'ordre :
N° de série :

جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات و علوم المادة

قسم الرياضيات

ماستر أكاديمي

فرع: رياضيات

اختصاص: تحليل

من إعداد الطالب : عطوات محمد

الموضوع

استقرار طيف المؤثر الوحدوي المشوش

نوقشت يوم 2015/06/02 من طرف لجنة المناقشة :

أ. مزابية محمد الهادي	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	رئيسا
د. السعيد محمد السعيد	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مناقشا
د. عسيلة مصطفى	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مشرفا

إهداء

إلى من لا يمكن للكلمات أن توفي حقهما إلى من أوصى الله بطاعتهما وحسن برهما إلى والدي العزيزين أدامهما الله لي

إلى التي هي وردا في الدار وزهر الليل والنهار، إلى التي مهما عمري طال ،بدعائها يرتاح البال و أيامي خير شلال من رضاها

"أمِّي الحنونة "

إلى من قلبي يهواه، أولى كلماتي ناداه، ويومي يحلو حين أراه، إلى قدوتي في الحياة

"أبي العزيز "

إلى من هم زينة الحياة، حولي في كل الأوقات، وكنزي أغلى الأيقونات إخوتي وأخواتي الأعزاء

"نبيل، فاطمة، زينب، أمينة، و سهيلة "

إلى مكمن العطف والحنان "جدتاي، أعمامي وعماتي، أخوالي وخالاتي "

إلى الغاليين على القلب، الأعزاء في النفس، وسبب ثباتي في الحياة

"إلى جميع أقاربي وأصحابي وجيراني وزملائي وأساتذتي طيلة الحياة"

" إلى أحبتي في الله وجميع من عرفته في الحياة ومن كتب لي الله أن أتعرف إليهم فيما بعد "

"وإلى كل طلبة الجامعة عامة والرياضيات خاصة "

شكر وعرفان

الحمد لله رب العالمين، الحمد لله الذي هدانا لهذا وماكنا لنهتدي لولا أن هدانا الله، الحمد لله و الشكر لله والصلاة والسلام على الرحمة المهداة والنعمة المسداة سيدنا رسول الله.

بعد اسدال الستار على عام جامعي خامس وبمناسبة إتمام مذكرتي في الماستر أتقدم بجزيل الشكر إلى الأستاذ الفاضل "الدكتور مصطفى عسيلة" على ما قام به من مجهودات جبارة في سبيل إتمام عملي وإنه لمن عظيم الشرف لي أن كان هو من أشرف علي طيلة هذا العام.
ولا يفوتني توجيه الشكر والتقدير الى أساتذة اللجنة المناقشة : إلى الأستاذ " مزابية محمد الهادي " على قبوله ترؤس لجنةالمناقشة، و الأستاذ الدكتور "السعيد محمد السعيد " على قبوله مناقشة هذه المذكرة. كما أتقدم بالشكر كذلك إلى الأستاذين : " الدكتور عبد الله بن السايح " و "الدكتور إسماعيل مرابط " على مساعدتهما لي في عديد الأمور خاصة المتعلقة بالبرنامج والشكر موصول أيضا إلى جميع الأساتذة على النصائح التحفيزية التي تأتي منهم خاصة من قبل الأستاذ : " الهاشمي أوعيسى دادي "
أشكر كذلك الطالبة " عروة عائشة " والتي سهلت لي من عملية الكتابة في البرنامج والشكر الموصول مع الإمتنان للطالبة " حكوم نجاة " على مساعدتها الكبيرة لي في الترجمة.
كما لايفوتني أن أشكر جميع العاملين في الجامعة على مجهوداتهم المبذولة من أجل توفير راحة الطالب وتهيئة جو دراسي ملائم.
ولأن سير الصحابة كانت على نهج " من علمني حرفا صرت له عبدا " فإن كامل الشكر والعرفان مع الإمتنان لجميع الأساتذة الذين أشرفو على تدريسي من الطور الإبتدائي إلى الطور الجامعي و إلى جميع المشايخ الذين قاموا على تعليمي القرءان الكريم خاصة الشيخ " الحاج أحمد بيداري " .

الرموز المستعملة

الرمز	معناه	أول صفحة
X	مجموعة كيفية	02
$P(X)$	المجموعات الجزئية من X	02
τ	تبولوجي	02
(X,τ)	فراغ تبولوجي	02
Δ	مجموعة بوريل	03
$\|\|$	تطبيق النظيم	03
$\|x\|$	نظيم العنصر x	03
$(X,\|\|)$	الفراغ الشعاعي النظيمي	03
$\mathbb{K}$	الحقل $\mathbb{K}$ ،(إما $\mathbb{R}$ وإما $\mathbb{C}$)	03
$\mathbb{R}$	مجموعة الأعداد الحقيقية	03
$\mathbb{C}$	مجموعة الأعداد المركبة	03
$\langle,\rangle$	تطبيق الجداء السلمي	04
$(X,\langle,\rangle)$	فراغ شبه هيلبرتي	04
H	فراغ هيلبار	04
$x\perp y$	العنصر x عمودي على y	04
$x\perp A$	x عمودي على المجموعة A	05
$A^{\perp}$	مجموعة العناصر العمودية على A	05
$X_0^{\perp}$	المتمم التبولوجي للفراغ X_0 بانسبة للفراغ H	05
$P_{X_0}x$	المسقط العمودي للعنصر x على الفراغ X_0	05
$X^{\perp}$	المتمم العمودي للفراغ x بالنسبة للفراغ H	06
$f(z)$	الدالة المركبة	07
C_0	فراغ كل المتتاليات الحقيقية	05

08	مجموعة تعريف المؤثر F	$D(F)$
08	مجموعة قيم المؤثر F	$E(F)$
08	نواة المؤثر F	$\ker F$
08	F مؤثر من X في Y	$F : X \longrightarrow Y$
08	بيان المؤثر F	$\Gamma(F)$
09	فراغ الأشكال الخطية على X	X^*
09	فراغ المؤثرات الخطية من X في Y	$L(X, Y)$
09	فراغ المؤثرات الخطية من X في نفسه	$L(X)$
09	فراغ المؤثرات الخطية المحدودة من X في Y	$l(X, Y)$
10	فراغ المؤثرات الخطية المحدودة من X في نفسه	$l(X)$
11	المؤثر القرين للمؤثر F	F^*
12	المؤثر الحيادي	I
12	المؤثر العكسي للمؤثر F	F^{-1}
13	متتالية المؤثرات	$(F_n)_{n\geq1}$
13	F_n متقاربة بانتظام نحو المؤثر F	$F_n \xrightarrow{u} F$
13	F_n متقاربة بقوة نحو المؤثر F	$F_n \xrightarrow{s} F$
14	F_n متقاربة بضعف نحو المؤثر F	$F_n \xrightarrow{w} F$
14	الفراغ الذاتي	V_λ
15	الفراغ الجذري	M_λ
16	مجموعة النقط النظامية للمؤثر F	$\rho(F)$
16	طيف المؤثر F	$\sigma(F)$
16	الطيف النقطي للمؤثر F	$P_\sigma(F)$
16	الطيف المستمر للمؤثر F	$C_\sigma(F)$
16	الطيف الباقي للمؤثر F	$R_\sigma(F)$
17	مؤثر الحالة للمؤثر F	$R_\lambda(F)$
18	دالة المؤثر F	$f(F)$
18	مجموعة الدوال التحليلية في جوار ما لـ $\sigma(F)$	$A(F)$
19	الدالة الطيفية للمؤثر F	E_φ
20	المسقط الطيفي	P_σ

$\{E_\varphi\}$	تحليل الوحدة لـ F	23
$E(.)$	القياس الطيفي	24
$l_0(X,Y)$	مجموعة المؤثرات المنتهية من X في Y	24
$l_\infty(X,Y)$	مجموعة المؤثرات المتراصة من X في Y	24
$l_1(X)$	صنف المؤثرات النووية من X في نفسه	25
$l_1(X)$	صنف مؤثرات شميد من X في نفسه	25
$\tilde{l}_0$	تتميم الفراغ l_0	25
$\tilde{\rho}(A)$	مجموعة النقط الناظيمية للمؤثر A	32
$\sigma_e(A)$	الطيف الأساس للمؤثر A	32

المحتويات

مقدمة عامة

يعتبر التحليل الدالي هو أحد فروع الرياضيات المهتمة بدراسة فضاءات الدوال. ومن أهم المفاهيم التي تشغل مركز الصدارة في التحليل الدالي مفهوم المؤثر.

ومن أهم الدراسات على المؤثر دراسته الطيفية، ذلك لأن معرفة الحالة والطيف للمؤثر تمكننا من دراسة قابلية الحل للمعادلات الدالية التي معاملاتها مؤثرات.

نظرا لوجود عدة أنواع من المؤثرات نقتصر في هذه المذكرة على نوع من أنواع هده المؤثرات ألا وهو المؤثر الوحدوي، وذلك لبعض المميزات التي يمتاز بها طيف هذا المؤثر.

في المذكرة نركز على الجزء من الطيف الذي يكون أكثر استقرارا خلال التشويش على المؤثر ويسمى هذا الجزء بالطيف الأساس. والتشويش هو إضافة مؤثر للمؤثر المدروس بغية الحصول على مؤثر يمتاز بصفات أحسن وفي هذه المذكرة نعتمد ثلاث أنواع من التشويش :

التشويش الأول عند إضافة مؤثر منته للمؤثر.
التشويش الثاني عند إضافة مؤثر متراص للمؤثر.
التشويش الثالث عند إضافة مؤثر نووي للمؤثر.

لهذا خصصنا هذه المذكرة المعنونة بـ

" استقرار طيف المؤثر الوحدوي المشوش"

وتحوي هذه المذكرة ثلاثة فصول وهي كالتالي
الفصل الأول: " مفاهيم أساسية".
الفصل الثاني: "بعض المؤثرات الخطية ومفهوم التشويش".
الفصل الثالث: " حالات استقرار الطيف الأساس ".

في الفصل الأول عرضنا أهم المفاهيم الأساسية من التبولوجيا والقياس والتحليل المركب والتحليل الدالي وبالأخص المفاهيم الخاصة بالمؤثرات الخطية، وتعرضنا في الفصل الثاني إلى دراسة بعض المؤثرات الخطية خاصة المؤثر الوحدوي، إضافة إلى مفهوم التشويش على المؤثر وبعض القضايا والنظريات التي نحتاجها في الفصل الثالث الذي فصلنا فيه ذكر وبرهان أهم النظريات التي تبين حالان استقرار الطيف الأساس للمؤثر الوحدوي أثناء التشويش عليه.

الفصل 1

مفاهيم أساسية

مقدمة

يتناول هذا الفصل أهم المفاهيم الأساسية من التبولوجيا والتحليل الدالي والتحليل المركب وبالأخص المفاهيم الخاصة بالمؤثرات الخطية هذه المفاهيم وردت مختصرة بالقدر الكافي لإستعمالها في الفصل الثاني والثالث.

1.1 الفراغ التبولوجي

لتكن X مجموعة غير خالية، و $P(X)$ مجموعة كل المجموعات الجزئية من X.

تعريف 1 1

تعرف التبولوجيا على X ويرمز لها بالرمز τ على أنها أسرة جزئية من $P(X)$، تحقق:

1. $X \in \tau \, , \, \varnothing \in \tau$.
2. $\forall O_1, O_2 \in \tau; \;\; O_1 \bigcap O_2 \in \tau$.
3. $\bigcup_{i \in I} O_i \in \tau$;$(O_i \in \tau / i \in I)$، I مجموعة دلائل كيفية.

- الزوج (X, τ) يسمى فراغا تبولوجيا.
- عناصر الأسرة τ تسمى مفتوحات الفراغ التبولوجي (X, τ).

تعريف 1 2

تعرف المجموعة المغلقة في الفراغ التبولوجي على أنها متمم المجموعة المفتوحة فيه.

تعريف 1 3

العائلة غير الخالية T من $P(X)$ تكون عشيرة على X إذا تحقق مايلي:

1. $X \in T$
2. $\forall A \in T; \;\; A^c \in T$

3. $\forall (A_n)_{n\in N} \in T;\ \bigcup_{n\in N}(A_n) \in T$

تعريف 1 4 (مجموعة بوريل (*Borel*))
مجموعة بوريل هي أصغر عشيرة تحوي كل المجموعات المفتوحة و المغلقة ونرمز لها بالرمز Δ.

2.1 الفراغ الشعاعي النظيمي

تعريف 1 5
يسمى فراغا شعاعيا نظيميا، كل زوج $(X, \|.\|)$، حيث X فراغ شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$ حيث $\mathbb{K}$ أحد الحقلين $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$، و $\|.\|$ تطبيق من X في $\mathbb{R}_+$ ويحقق الشروط التالية:

$$X \mapsto \mathbb{R}_+$$

$$x \mapsto \|x\|$$

1. $\forall x \in X, \|x\|_X = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X, \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
3. $\forall x, y \in X, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

الرمز $\|.\|$ يسمى نظيما، والعدد $\|x\|$ يسمى نظيم العنصر x.

ملاحظه 1
الفراغ الشعاعي النظيمي ، إختصارا يكتب ف.ش.ن .

1.2.1 فراغ بناخ

ليكن $(X, \|.\|)$ ف.ش.ن .

تعريف 1 6
يقال إن X فراغ بناخ إذا كانت كل متتالية كوشي منه متقاربة فيه.

3.1 الفراغ الهيلبرتي

1.3.1 الجداء السلمي

ليكن X ف.ش على الحقل $\mathbb{K}$

تعريف 1 7
يعرف الجداء السلمي على X بأنه تطبيق من الجداء$X \times X$ نحو $\mathbb{K}$ أي

$$h : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$$

يحقق من أجل كل x, y, z من X ومن أجل كل α من $\mathbb{K}$ مايلي:

1. $h(x,x) \geq 0, \quad h(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2. $h(\alpha x, x) = \alpha h(x,x)$
3. $h(x,y) = \overline{h(y,x)}$
4. $h(x+y,z) = h(x,z) + h(y,z)$

يرمز للجداء السلمي بالرمز $\langle , \rangle$ عندها الزوج $(X, \langle , \rangle)$ يسمى فراغا شبه هيلبرتي.

نتيجة 1 1 كل فراغ شبه هيلبرتي يكون فراغا شعاعيا نظيميا مع :

$$\|x\| = \sqrt{h(x,x)}$$

2.3.1 الفراغ الهيلبرتي

الفراغ الهيلبرتي هو كل فراغ شبه هيلبرتي تام، ويرمز له بالرمز H.

3.3.1 التعامد

مفهوم التعامد

ليكن X فراغا شبه هيلبرتي ، A و B مجموعتان من X ،حيث $A \neq \varnothing \neq B$.

تعاريف

1. يقال إن العنصرين (الشعاعيين) x, y من X متعامدان (ونكتب $x \perp y$) إذاكان جداؤهما السلمي معدوما.
   أي:
   $$< x, y >= 0$$
2. يقال أن العنصر x من X عمودي على المجموعة A إذاكان عموديا على كل عنصر من A ، ونكتب:
   $$x \perp A \Longleftrightarrow \{\forall y \in A \longrightarrow < x, y >= 0\}$$
   يرمز لمجموعة العناصر العمودية على A بالرمز $A^{\perp}$.
3. يقال أن A وB متعامدان إذا تحقق:
   $$\forall x \in A, \forall y \in B \longrightarrow \langle x, y \rangle = 0$$
   ونكتب $A \perp B$.

قضيه 1 1 [4]
إذا كان X فراغا شبه هيلبرتي، فإن:

1. $\forall x,y \in X \longrightarrow |<x,y>| \leq \|x\|\|y\|$ (متراجحة كوشي شوارتز)
2. $\forall x,y \in X, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (قانون متوازي الأضلاع)
3. $\forall x,y \in X, \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 2(<x,y> + <y,x>)$
4. $\forall x,y \in X, 4<x,y>= \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)$

4.3.1 الإسقاط العمودي

ليكن H فراغا لهيلبار .

نظريه 1 1 [4]
إذا كانت A مجموعة مغلقة ومحدبة من H و x من H، حيث $x \notin A$ ، فإنه يوجد عنصر وحيد y_0 من A يكون أحسن تقريب للعنصر x في المجموعة A.
أي:

$$\forall x \in H, (x \notin A), \exists ! y_0 \in A / d(x,y) \equiv \|x-y\| = d_0(x,A)$$

نظريه 1 2 [4]
إذا كان X_0 فراغا جزئيا مغلقا من H، وx عنصرا من H، حيث $x \notin X_0$ ، فإنه يوجد عنصر وحيد y_0 من X_0 ، يمثل أحسن تقريب للعنصر x في X_0 يحقق :

$$x - y_0 \perp X_0$$

في هذه الحالة يسمى y_0 المسقط العمودي للعنصر x على الفراغ X_0 ، ويرمز له بالرمز $P_{X_0}x$.

5.3.1 التحليل العمودي

ليكن H فراغاً لهيلبار، و X_0 فراغاً جزئياً مغلقاً منه.

تعريف 1 8
يعرف المتمم العمودي للفراغ X_0 بالنسبة للفراغ H بأنه مجموعة كل العناصر من H العمودية على X_0 .
أي أنه المجموعة ${X_0}^{\perp}$.

نتيجة 1 2

1. ${X_0}^{\perp}$ فراغ جزئي مغلق من H.
2. كل عنصر x من H يكتب بشكل وحيد كالتالي:

$$x = y + z / \ \ y \in X_0, \ z \in {X_0}^{\perp}$$

3. $H = X_0 \oplus {X_0}^{\perp}$ ، عندها نقول أن ${X_0}^{\perp}$, X_0 ، هما التحليل العمودي للفراغ H , ونكتب:

$$y = P_{X_0}x \ , z = P_{X_0^{\perp}}x$$

حيث:
P_{X_0} تطبيق الإسقاط على الفراغ X_0 , و $P_{X_0^{\perp}}$ تطبيق الإسقاط على الفراغ $X_0^{\perp}$.

قضيه 1 2 [4]
تطبيق الإسقاط P_{X_0} هو تطبيق خطي ومحدود ويحقق:

1. $P_{X_0}^2 = P_{X_0}$
2. $\|P_{X_0}\| \leq 1$
3. $\forall x, y \in H \longrightarrow < P_{X_0}x, y >=< x, P_{X_0}y >$

4.1 الجمع المباشر التبولوجي و المستمر لفراغ هيلبار

تعريف 1 9 يعرف الجمع المباشر التبولوجي لفراغات هيلبار $H_1, ..., H_n$ بأنه الفراغ H حيث

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus H_n \tag{1.1}$$

(الصيغة (1.1) هي التحليل العمودي لـ H) حيث :

$$H \ni \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...) \ / \ \xi_n \in H_n, \quad n \geq 1$$

والسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\|_{H_n}^2$ متقاربة.
الفراغ H لهيلبار وفق الجداء السلمي :

$$\langle \xi, \eta \rangle_H = \sum_{n \geq 1} \langle \xi_n, \eta_n \rangle_{H_n}, \quad \xi, \eta \in H; \ \xi_n, \eta_n \in H_n$$

* يمكن تعميم الصيغة (1.1) في حالة الفراغات $H_1, ..., H_n$ تؤخد مع الأوزان الموجبة ... $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n,$ حيث $\mu_n \geq 1, \quad n \geq 1$
في هده الحالة الجداء السلمي على H هو كالتالي :

$$\langle \xi, \eta \rangle_H = \sum_{n \geq 1} \mu_n \langle \xi_n, \eta_n \rangle_{H_n}$$

الصيغة الأخيرة تكتب كالتالي :

$$\langle \xi, \eta \rangle_H = \int_X \langle f(x), g(x) \rangle_x d\mu(x)$$

حيث X مجموعة نقاط $x = 1, 2, ..., n, ...$ و $\mu(x)$ هي قياس على X حيث

$$\mu(n) = \mu_n, \quad n \geq 1$$

في هذه الحالة الصيغة (1.1) تكتب كالتالي :

$$H = \int_X \oplus H(x) d\mu(x)$$

نتيجة 1 3 ليكن X مجموعة معرفة عليها قياس موجب μ.
لكل x من X نرفق بها فراغ هيلبار قابل للفصل نرمز له بالرمز $H(x)$ بعده $n(x)$ يأخذ أحد القيم $1, 2, ..., n$ حيث الدالة $n(x)$ قابلة للقياس بالنسبة لـ μ.

*في حالة كل الفراغات $H(x)$ لها نفس البعد n. عندها نتطابق كل هذه الفراغات مع الفراغ H_0.
نشكل فراغ H مكون من كل العناصر ξ، حيث $\xi = h(x)$، و h دالة معرفة على المجموعة X وتأخذ قيمها في H_0 وتحقق :

1. من أجل كل عنصر α من H_0 الدالة العددية $\langle h(x), \alpha \rangle$ قابلة للقياس حسب μ.
2. الدالة العددية $\|h(x)\|$ تحقق
$$\int_X \|h(x)\|^2 d\mu(x) < \infty$$

نعرف على H العمليات : من أجل كل $\xi = h(x), \ \eta = g(x) \ \in H$ لدينا

$$\xi + \eta = h(x) + g(x)$$

$$a\xi = ah(x)$$

الجداء السلمي على H يعرف كالتالي :

$$\langle \xi, \eta \rangle_H = \int_X \langle f(x), g(x) \rangle_x d\mu(x)$$

عندها يكون H لهيلبار. عندها يقال أن فراغ هيلبار H هو جمع مباشر مستمر للفراغات $H(x)$ بالنسبة للقياس μ، ونكتب :

$$H = \int_X \oplus H(x) d\mu(x)$$

نتيجة 1 4 في حالة $n(x) = 1$ يكون $H = L_{2,\mu}$ بحيث

$$\forall f \in L_{2,\mu} \ \longrightarrow \ \int_X \|f(x)\|^2 d\mu(x) < \infty$$

5.1 النقطة الحدية الزاوية، نظرية فاتو، نظرية لوزينا، نظرية بريفالوف

1.5.1 النقطة الحدية الزاوية

لتكن f دلة تحليلية معرفة على D، حيث

$$D = \{z \in \mathbb{C}/ \ |z| < 1\}$$

و

$$\partial D = \{z \in \mathbb{C}/ \ |z| = 1\}$$

و لتكن $a, \xi \in \mathbb{C}$، حيث $\xi = e^{i\theta}$.

تعريف 1 10
نقول عن a أنها نقطة أعظمية زاوية للدالة f إذا كانت

$$\lim_{z \to \xi} f(z) = a, \quad z \in S(\xi, \varepsilon)$$

حيث

$$S(\xi, \varepsilon) = \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}/ \ \ |\arg(e^{i\theta})| < \pi/2 - \varepsilon, \ \ 0 < \varepsilon < \pi/2\}$$

2.5.1 نظرية فاتو

لتكن $f(z)$ دالة تحليلية ومحدودة على النطاق $\{z, \ |z| < 1\}$

نظريه 1 3 [6]
إذا تقاربت $f(z)$ تقريبا في كل مكان من الدائرة $\{z, \ |z| = 1\}$ نحو قيمة معينة $f(\xi)$ فإن z تتقارب نحو ξ وفق كل سبيل مماسي.

3.5.1 نظرية لوزينا

نظريه 1 4 [6]
إذا كانت الدالة $f(z)$ ميروموروفيا في النطاق $\{z, \ |z| < 1\}$ وفق كل السبل غير المماسية وتأخد القيمة صفر على مجموعة E_z، حيث $mes(E_z) > 0$ فإن $f(z)$ تطابق الصفر.
(f ميروموروفيا يعني تحليلية على $(\Omega/z_i, \ i \in I)$ وفي كل النقاط z_i تملك قطب)

4.5.1 نظرية بريفالوف

نظريه 1 5 [6]
إذا كان G حدوده Γ عبارة عن منحني جوردان قابل للتقويم أملس بالأجزاء ولا يملك نقطة رجوع، و f دالة تحليلية تحقق

$$|f(\xi_1) - f(\xi_2)| < k|\xi_1 - \xi_2|^{\alpha} \ / \ \ 0 < \alpha < 1$$

فإن القيمة الحدية لتكامل كوشي

$$F(z) = \frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$$

تحقق العلاقة

$$|F(\xi_1) - F(\xi_2)| < C_1|\xi_1 - \xi_2|^{\alpha} \ / \ \ \alpha < 1$$

أو العلاقة

$$|F(\xi_1) - F(\xi_2)| < C_2^{(\delta)}|\xi_1 - \xi_2| \ln\frac{1}{|\xi_1 - \xi_2|}$$

إذا كان $\alpha = 1$ و $|\xi_1 - \xi_2| \leq \delta < 1$.

قضيه 3 1 ليكن $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$، $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ متتاليتين من الأعداد المركبة، حيث $|\lambda_k| = |\mu_k| = 1, \ k \geq 1$، والسلسلتين كثيفتين في C. فإنه من أجل بعض التغيير(التقليب) في المتتالية الطبيعية $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ يكون

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k - \mu_{pk}| < \infty$$

6.1 الدالة المتناظرة النظيمية

ليكن C_0 فراغ كل المتتاليات الحقيقية $\xi = \{\xi_i\}_1^{\infty}$ المتقاربة نحو الصفر.
وليكن $\tilde{C}$ فراغ من C_0 لكل المتتاليات المكونة من عدد منته من العناصر غير المعدومة من C_0.

تعريف 1 11 الدالة الحقيقية $h(\xi) = h(\xi_1, \xi_{2,...})$ المعرفة على $\tilde{C}$ تسمى دالة نظيمية إذا تحقق :

1. $h(\xi) \geq 0 \ (\xi \in \tilde{C}, \ \xi \neq 0)$
2. $\forall\alpha \in \mathbb{K} \to h(\alpha\xi) = |\alpha| h(\xi), \ \xi \in \tilde{C}$
3. $h(\xi + \eta) \leq h(\xi) + h(\eta), \ \ \xi, \eta \in \tilde{C}$
4. $h(1, 0, 0, ...) = 1$

تعريف 1 12 الدالة النظيمية h تسمى متناظرة إذا كان

$$h(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, 0, 0, ...) = h(|\xi_{j_1}|, |\xi_{j_2}|, ..., |\xi_{j_n}|, 0, 0, ...)$$

حيث $\xi = \{\xi_j\}$ شعاع كيفي من $\tilde{C}$ و $j_1, j_2, ..., j_n$ ترتيب للحدود n الأولى.

7.1 المؤثرات ونظرية الأطياف

1.7.1 المؤثرات الخطية

ليكن $(X, \|.\|_X)$، $(Y, \|.\|_Y)$ فراغين شعاعيين نظيميين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ ولتكن D مجموعة غير خالية من X، (D قد تساوي X).

تعريف 1 13

إذا أرفق بكل عنصر x من D عنصرا معينا y من Y، يقال إنه قد عرف مؤثرا من X في Y، يرمز له بالرمز F ونكتب $y = F(x)$ أو $y = Fx$.

- المجموعة D تسمى مجموعة تعريف المؤثر F ويرمز لها بالرمز $D(F)$.
- مجموعة العناصر y من Y حيث $y = Fx$ و $x \in D(F)$ تسمى مجموعة قيم المؤثر F ويرمز لها بالرمز $E(F)$ ونكتب:
$$E(F) = \{y \in Y / \; y = Fx, \; x \in D(F)\}$$
- صيغة المؤثر F تكتب كالتالي:
$$X \supset D(F) \xrightarrow{F} E(F) \subset Y$$
إختصارا نكتب:
$$F : X \longrightarrow Y$$
- مجموعة الأزواج (x, Fx) من فراغ الجداء $X \times Y$ حيث $x \in D(F)$ تسمى بيان المؤثر F ويرمز لها بالرمز Γ_F ونكتب:
$$\Gamma_F = \{(x, Fx) / \; x \in D(F)\} \subset X \times Y$$
- مجموعة أصفار المؤثر F تسمى نواة المؤثر F ويرمز لها بالرمز $\ker F$ ونكتب:
$$\ker F = \{x \in D(F) / \;\; Fx = 0\}$$

تعريف 1 14

المؤثر F من X في Y يقال إنه خطي إذا تحقق مايلي:

1. المجموعة $D(F)$ فراغ شعاعي جزئي من الفراغ X.
2. $\forall x_1, x_2 \in D(F), \; \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \Bbbk \longrightarrow F(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 F(x_1) + \alpha_2 (F x_2)$

يرمز لمجموعة المؤثرات الخطية من X في Y بالرمز $L(X, Y)$.

- في حالة $X = Y$ إختصارا نكتب $L(X, X) = L(X)$.
- في حالة $Y = \mathbb{K}$ المجموعة $L(X, \mathbb{K})$ تسمى مجموعة الأشكال الخطية على X، وعناصرها تسمى شكل أو دالي خطي، ويرمز لها بالرمز X^* وتسمى الثنوي الجبري للفراغ X .

8.1 مجموع وجداء المؤثرات

تعريف 1 15
من أجل كل مؤثرين كيفيين F_1, F_2 من $L(X,Y)$ يعرف

1. جمع المؤثريين F_1, F_2 كالتالي:

$$(F_1+F_2)x = F_1x + F_2x,\ x \in D(F_1) \cap D(F_2)$$

2. جداء المؤثر F_1 بعدد α من $\mathbb{K}$ كالتالي:

$$(\alpha F_1)x = \alpha F_1 x / \ \ x \in D(F_1), \ \ \alpha \in \mathbb{K}$$

نتيجة 1 5 [5]
$L(X,Y)$ فراغ شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$.

9.1 المؤثرات الخطية المحدودة

ليكن F مؤثرا خطيا من X في Y.

تعريف 1 16
يقال إن F محدود على مجموعة تعريفه إذا تحقق:

$$\exists c > 0,\ \forall x \in D(F),\ \|F(x)\|_Y \leq c\|x\|_X$$

إذا تحققت الصيغة الأخيرة من أجل كل x من X يقال إن F محدود على X أو محدود.
نرمز لمجموعة المؤثرات المحدودة من X في Y حيث $D(F) \equiv X$ بالرمز $l(X,Y)$ وهو فراغ جزئي من الفراغ $L(X,Y)$.

تعريف 1 17
يعرف نظيم المؤثر F من $l(X,Y)$ بأحد الصيغ التالية:

1. $\|F\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Fx\|}{\|x\|}$
2. $\|F\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Fx\|$
3. $\|F\| = \min\{c / \|Fx\| \leq c\|x\|\}$

-الفراغ $l(X,Y)$ في حالة $Y \equiv \mathbb{K}$ يسمى الفراغ الثنوي التبولوجي ويرمز له بالرمز X' أي

$$X' = l(X,X) = l(X)$$

تعريف 1 18

1. يقال إن المؤثر F مستمر في النقطة x_0 من $D(F)$ إذا تحقق:

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 / \ (\forall x \in D(F) \cap X / \ \|x - x_0\| < \delta) \longrightarrow \|Fx - Fx_0\| < \varepsilon$.

2. يقال إن المؤثر F مستمر إذا كان مستمرا في كل نقطة من مجموعة تعريفه.

نتيجة 1 6
إذا كان المؤثر F من $L(X,Y)$ فإن F مستمر يكافئ F محدود.

نتيجة 1 7
إذا كان المؤثر F من $l(X,Y)$ فإن:

1. $\forall x \in X,\ \|Fx\| \leq \|F\|\|x\|$
2. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in X/\ \|Fx_\varepsilon\| > (\|F\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|$

10.1 نظرية ريس للأشكال الخطية

نظريه 1 6 [5]
ليكن H فراغاً لهيلبار.

1. إذا كان f شكلاً خطياً ومحدوداً على H (أي $f \in H'$) ، فإنه يوجد عنصر وحيد y_f من H، بحيث:

$$\forall x \in H \longrightarrow f(x) = \langle x, y_f \rangle,\ \|f\| = \|y_f\|$$

2. إذا كان y عنصراً كيفياً من H ، فإن الصيغة التالية:

$$f_y(x) = \langle x, y \rangle,\ x \in H$$

تعرف شكلا خطيا ومحدودا f_y ،عندها يكون:

$$\|f_y\| = \|y\|$$

1.10.1 المؤثر القرين

ليكن H_1، H_2 فراغين لهيلبار وF من $l(H_1, H_2)$.

تعريف 1 19
يسمى مؤثرا قرينا للمؤثر F، المؤثر F^* المعرف من H_2' في H_1'، بحيث من أجل كل (x,y) من $H_1{\times}H_2$ يكون

$$\forall (x,y) \in H_1{\times}H_2 \longrightarrow \langle Fx, y \rangle = \langle x, F^*y \rangle$$

نظريه 1 7 [5]
إذا كان $F \in l(H_1, H_2)$ فإن F^* موجود ووحيد من $l(H_2', H_1')$ ويحقق:

$$\|F\| = \|F^*\|$$

خواص المؤثر القرين

إذا كان $F, T \in l(H)$ و α من $\mathbb{K}$ فإن:

1. $(F+T)^* = F^* + T^*$
2. $(\alpha F)^* = \bar{\alpha}\, F^*$
3. $(F^*)^* = F$
4. $I^* = I$

2.10.1 المؤثر القرين لنفسه

تعريف 1 20

يقال إن المؤثر $F \in l(H)$ قرين لنفسه إذا انطبق مع قرينه أي $F = F^*$ ، عندها يكون:

$$\forall x, y \in H,\ \langle Fx, y\rangle = \langle x, Fy\rangle$$

خواص المؤثر القرين لنفسه

ليكن F و T مؤثرين قرينين لنفسهما من $l(H)$.
لدينا:

1. من أجل كل α و β من $\mathbb{R}$ يكون المؤثر $\alpha F + \beta T$ قرين لنفسه.
2. إذا كان $FT = TF$ فإن المؤثر FT قرين لنفسه.
3. العدد $\langle Fx, x\rangle$ من $\mathbb{R}$ مهما يكن x من H .
4. $\|F\| = \max(|M_F|, |m_F|)$ حيث:

$$M_F = \sup_{\|x\|=1} \langle Fx, x\rangle \quad , \quad m_F = \inf_{\|x\|=1} \langle Fx, x\rangle$$

3.10.1 المؤثرالعكسي

ليكن F مؤثرا من X في Y ، $D(F)$ مجموعة تعريفه و $E(F)$ مجموعة قيمه.

تعريف 1 21

يقال إن المؤثر F قابل للقلب إذا كانت المعادلة $y = Fx$ تقبل حلا وحيدا x من $D(F)$ وذلك من أجل كل y من $E(F)$.
يسمى المؤثر من $E(F)$ في $D(F)$ الذي يلحق بـ y العنصر x مقلوب F ونرمز له بالرمز F^{-1}.

4.10.1 قابلية القلب باستمرار

تعريف 1 22
المؤثر F من $L(X,Y)$ يقال إنه قابل للقلب باستمرار إذا وجد له مؤثر عكسي معرف ومحدود على كل الفراغ أي $\exists F^{-1} \in l(Y,X)$.

نتيجة 1 8 (نظرية بناخ للمؤثر العكسي)
إذا كان المؤثر F من $l(X,Y)$ تقابلا حيث X, Y لبناخ، فإنّ المؤثر F قابل للقلب باستمرار.

نتيجة 1 9
ليكن المؤثر F من $l(X,Y)$ حيث X, Y لبناخ. إذا وجد مؤثر T من $l(X,Y)$ يحقق:
$TF = I_Y$ و $FT = I_X$ فإن المؤثر F قابل للقلب باستمرار عندها يكون $F^{-1} = T$.

قضيه 1 3 [5]
إذا كان المؤثر F من $l(X)$ حيث X لبناخ و $\|F\| < 1$، فإن المؤثر $I - F$ قابل للقلب باستمرار، عندها يكون:

$$\|I-(I-F)^{-1}\| \leq \frac{\|F\|}{1-\|F\|}, \quad \|(I-F)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|F\|}$$

قضيه 1 4 [5]
يكون للمؤثر F ، $(F \in L(X,Y))$ مؤثرا عكسيا محدودا على $E(F)$ إذا وفقط إذا وجد عدد ثابت c $(c > 0)$ يحقق:

$$\forall x \in D(F) \longrightarrow \|Fx\| \geq c\|x\|.$$

5.10.1 المؤثرالمتقايس

تعريف 1 23
يسمى المؤثر F في فراغ هيلبار H مؤثر متقايس إذا كان $\|Fx\| = \|x\|$ ، وذلك من أجل كل $x \in H$.

6.10.1 مؤثرالإسقاط العمودي

ليكن M فراغ جزئي مغلق من فراغ هيلبار H. يعرف مؤثرالإسقاط العمودي على M على أنه تطبيق الإسقاط على الفراغ M المعرف في القضية (2.1) ، إختصارا يقال مؤثر إسقاط.

خصائص:

1. المؤثر P_M قرين لنفسه.
2. $\forall x \in H \longrightarrow \langle P_M x, x\rangle \geq 0$
3. $\forall x \in H \longrightarrow \langle P_M x, x\rangle \leq \|x\|^2$

قضيه 1 5
إذا كان المؤثر F قرينا لنفسه في H و $F = F^2$ فإن F يمثل مؤثر إسقاط على فراغ جزئي مغلق من H .

7.10.1 المؤثر غير سالب

تعريف 1 24
يسمى المؤثر F من $l(H)$ مؤثرا غير سالبا إذا كان قرينا لنفسه و يحقق $\langle Fx, x\rangle \geq 0$ من أجل كل $x \in H$.

نتيجة 1 10 كل مؤثر F من $l(X,Y)$ يمكن كتابته من الشكل

$$F = F_1 + iF_2$$

حيث :

$$F_1 = \frac{1}{2}(F + F^*)$$

و

$$F_2 = \frac{1}{2i}(F - F^*)$$

F_1, F_2 يسميان مركبات (أجزاء) المؤثر F.

تعريف 1 25 المؤثر F يملك :

1. مركبة تخيلية غير سالبة إذا كان $F_2 \geq 0$ أي F_2 مؤثر غير سالب.
2. مركبة حقيقية غير سالبة إذا كان $F_1 \geq 0$ أي F_1 مؤثر غير سالب.

11.1 تبولوجيا الفراغ $\mathbf{l(x,y)}$

نعتبر أن X, Y فراغان لبناخ (معلوم أن $l(X,Y)$ لبناخ أيضا).

التبولوجيا المنتظمة

تعريف 1 26
تعرف التبولوجيا المنتظمة بأنها التبولوجيا المعرفة على الفراغ $l(X,Y)$.

تعريف 1 27
متتالية المؤثرات $(F_n)_{n\geq 1}$ من $l(X,Y)$ يقال إنها متقاربة بانتظام (وفق نظيم الفراغ) نحو مؤثرا F من $l(X,Y)$ ، إذا كانت $\underset{n\to\infty}{lim}\|F_n - F\| = 0$ ، ونكتب:

$$F_n \xrightarrow{u} F \quad \text{أو} \quad F = u - \underset{n\to\infty}{lim} F_n$$

التبولوجيا القوية

تعريف 1 28
تعرف التبولوجيا القوية على الفراغ $l(X,Y)$ بأنها أضعف تبولوجيا على $l(X,Y)$ من أجلها يكون المؤثر Ψ_x المعرف كالتالي:

$$\Psi_x : l(X,Y) \longrightarrow Y / \, \Psi_x(F) = Fx$$

مستمرا من أجل كل x من X.

تعريف 1 29
متتالية المؤثرات $(F_n)_{n\geq 1}$ من $l(X,Y)$ يقال إنها متقاربة بالنسبة للتبولوجيا القوية نحو مؤثرا F ، إذا وفقط إذا كانت المتتالية $(F_nx)_{n\geq 1}$ متقاربة نحو Fx بالنسبة لنظيم الفراغ Y، وهذا من أجل كل x من X.
أي من أجل كل x من X يكون: $\lim\limits_{n\to\infty} \|F_nx - Fx\| = 0$ ونكتب:

$$F_n \xrightarrow{s} F \text{ أو } F = s - \lim\limits_{n\to\infty} F_n$$

التبولوجيا الضعيفة

تعريف 1 30
تعرف التبولوجيا الضعيفة على الفراغ $l(X,Y)$ بأنها أضعف تبولوجيا على $l(X,Y)$ من أجلها يكون المؤثر $\Psi_{x,f}$ المعرف كالتالي:

$$\Psi_{x,f} : l(X,Y) \longrightarrow \mathbb{C} / \, \Psi_{x,f} = f(Fx)$$

مستمرا من أجل كل x من X، ومن أجل كل f من Y'.

تعريف 1 31
متتالية المؤثرات $(F_n)_{n\geq 1}$ من $l(X,Y)$ يقال إنها متقاربة بالنسبة للتبولوجيا الضعيفة نحو مؤثرا F، إذا وفقط إذا كانت المتتالية $(F_nx)_{n\geq 1}$ متقاربة بضعف في الفراغ Y نحو Fx، وهذا من أجل كل x من X.
أي من أجل كل f من Y' يكون:

$$\lim\limits_{n\to\infty} \|f(F_nx) - f(Fx)\| = 0$$

ونكتب:

$$F_n \xrightarrow{w} F \text{ أو } F = w - \lim\limits_{n\to\infty} F_n$$

تعريف 1 32 الشكل الخطي المحدود f_λ على فراغ بناخ X المتعلق بالوسيط λ حيث $a \leq \lambda \leq b$ يقال إنه يملك تغيرات محدودة قوية إذا تحققت من أجل كل تقسيم للمجال $[a,b]$ من الشكل

$$a = \lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_n = b$$

المتراجحة

$$\sum \|f_{\lambda_{j+1}} - f_{\lambda_j}\| < c$$

(c ثابت)

1.11.1 نظرية ڤالفاندا

نظريه 1 8 [7]

إذا كان X فراغ بناخ قابل للفصل فإنه من أجل كل شكل خطي f_λ حيث $a \leq \lambda \leq b$ يملك تغيرات محدودة قوية بالنسبة لـ λ، f_λ يكون قابلا للتفاضل بضعف تقريبا في كل مكان وفق أي قياس غير سالب جمعي μ معرف على مجموعات بورلية من المجال $[a, b]$.

12.1 الفراغات الذاتي ، الجذري، الثابت

ليكن F مؤثرا من $L(X)$ حيث X ف.ش. على الحقل K.

تعريف 1 33 العدد λ من K يقال إنه قيمة ذاتية للمؤثر F إذا كان للمعادلة $y = Fx$ حلا غير معدوم. عندها الحل غير المعدوم يسمى الشعاع الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية λ للمؤثر F.

تعريف 1 34 يعرف الفراغ الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية λ للمؤثر F بأنه مجموعة كل الأشعة الذاتية λ مضافا إليها الشعاع الصفري ويرمز له بالرمز V_λ، أي:

$$V_\lambda = \ker(F - \lambda I)$$

بعد الفراغ V_λ يسمى التضعيف الذاتي أو الهندسي للقيمة الذاتية λ.

تعريف 1 35 العنصر x من X يسمى شعاعا جذريا للمؤثر F مرفقا بالقيمة الذاتية λ إذا وجد عدد طبيعي m، من أجله يكون:

$$(F - \lambda I)^m x = 0 \tag{2.1}$$

أصغر الأعداد m التي تحقق الصيغة (2.1) يسمى علو الشعاع الجذري x.

تعريف 1 36 يعرف الفراغ الجذري المرفق بالقيمة الذاتية λ للمؤثر F بأنه مجموعة كل الأشعة الجذرية المرفقة بالقيمة الذاتية λ مضافا إليها الشعاع الصفري ويرمز له بالرمز M_λ، أي:

$$M_\lambda = \cup_{m=1}^{\infty} \ker(F - \lambda I)^m$$

بعد الفراغ M_λ يسمى التضعيف الجبري للقيمة الذاتية λ.

نتيجة 1 11

1. الأشعة الذاتية المرفقة بالقيم الذاتية مثنى مثنى مختلفة تكون مستقلة خطيا.

2. الأشعة الذاتية التي علوها مثنى مثنى مختلف ومرفقة بنفس القيم الذاتية تكون مستقلة خطيا.

3. كل شعاع ذاتي للمؤثر F يكون شعاعا جذريا علوه واحد.

4. $V_\lambda \subset M_\lambda,\ \ dimV_\lambda \leq dimM_\lambda$

تعريف 1 37 الفراغ الجزئي M من X يقال أنه ثابت بالنسبة للمؤثر F إذا كان:

$$M \subset D(F),\ \ FM \subset M$$

نتيجة 1 12 الفراغ الذاتي و الفراغ الجذري للمؤثر F ثابتين بالنسبة للمؤثر $F-\mu I$ من أجل كل μ من K.
في الحالة الخاصة يكونا ثابتين بالنسبة للمؤثر F، أي:

$$FV_\lambda \subset V_\lambda,\ \ FM_\lambda \subset M_\lambda$$

قضيه 1 6 [5] إذا كان F,T مؤثرين من $L(X)$، حيث $FT=TF$، فإن كل فراغ ذاتي لأحدهما يكون ثابتا بالنسبة للآخر.

1.13 نظرية الأطياف

1.1.13 مفهوم الطيف والحالة للمؤثر الخطي

ليكن F مؤثرا من $L(X)$ ، حيث X فراغ بناخ مركب $(\mathbb{K}\equiv\mathbb{C})$.
مفهوم الطيف والحالة للمؤثر F له علاقة بقابلية الحل للمعادلة الدالية التالية:

$$Fx-\lambda Ix=y \tag{1.3}$$

أو إختصارا نكتب:

$$F_\lambda x=y/\ F_\lambda \equiv F-\lambda I$$

حيث I المؤثر الحيادي من X في نفسه و x مجهول من $D(F)$ و y معطى من X و λ وسيط مركب.
في حالة $y=0$ المعادلة (1.3) تسمى متجانسة .

تعريف 1 38

العدد المركب λ يقال إنه نقطة نظامية للمؤثر F إذا كان المؤثر F_λ قابلا للقلب باستمرار، أي $\exists(F_\lambda)^{-1}\in l(X)$
يرمز لمجموعة النقط النظامية للمؤثر F بالرمز $\rho(F)$ ، ونكتب:

$$\rho(F)=\{\lambda\in\mathbb{C}/\ \ (F_\lambda)^{-1}\in l(X)\}$$

تعريف 1 39

يعرف طيف المؤثر F ويرمز له بالرمز $\sigma(F)$ بأنه متمم مجموعة النقط النظامية للمؤثر F بالنسبة للمستوي المركب، أي :

$$\sigma(F)=\mathbb{C}\backslash\rho(F)$$

ينقسم الطيف إلى ثلاثة أقسام وهي:

1. مجموعة الأعداد المركبة λ التي من أجلها المؤثر F_λ لا يقبل مؤثرا عكسيا، (أي مجموعة القيم الذاتية للمؤثر F) تسمى بالطيف النقطي ويرمز له بالرمز $P_\sigma(F)$، ونكتب:

$$P_\sigma(F)=\{\lambda\in\mathbb{C}/\ \ker F_\lambda\neq 0\}$$

2. مجموعة الأعداد المركبة λ التي من أجلها المؤثر F_λ يقبل مؤثرا عكسيا مجموعة تعريفه أي المجموعة $E(F_\lambda)$ كثيفة في X، لكنه غير محدود . تسمى هذه المجموعة بالطيف المستمر ويرمز له بالرمز $C_\sigma(F)$، ونكتب $(F_\lambda)^{-1}$ غير محدود.

$$C_\sigma(F) = \{\lambda \in \mathbb{C}P_\sigma(F)/\ E(F_\lambda) \neq \overline{E(F_\lambda)} = X\}$$

3. مجموعة الأعداد المركبة λ التي من أجلها المؤثر F_λ يقبل مؤثرا عكسيا، (محدود أو غير محدود) مجموعة تعريفه أي المجموعة $E(F_\lambda)$ ليست كثيفة في X. تسمى هذه المجموعة بالطيف الباقي ونرمز له بالرمز $R_\sigma(F)$، ونكتب:

$$R_\sigma(F) = \{\lambda \in CP_\sigma(F)/\ \overline{E(F_\lambda)} \neq X\}$$

نتائج

1. $\sigma(F)$ مجموعة متراصة في $\mathbb{C}$.
2. $\{\forall\lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| > \|F\|\} \subset \rho(F)$
3. $\{\forall\lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| \leq \|F\|\} \supset \sigma(F)$

14.1 طيف المؤثر القرين

قضيه 1 7 [5]
ليكن $F \in l(H)$.

1. إذا كان المؤثر F قابلا للقلب باستمرار فإن المؤثر F^* أيضا يكون قابلا للقلب باستمرار. عندها يكون

$$(F^*)^{-1} = (F^{-1})^*$$

2. $\sigma(F^*) = \{\overline{\lambda}/\ \lambda \in \sigma(F)\}$

15.1 طيف المؤثر القرين لنفسه

إذا كان F قرينا لنفسه فإن:

1. كل القيم الذاتية للمؤثر F حقيقية.
2. $F = F^* \Longrightarrow \sigma(F) \subset [m_F, M_F]$ ، حيث

$$M_F = \sup_{\|x\|=1} \langle Fx, x\rangle \quad , \quad m_F = \inf_{\|x\|=1} \langle Fx, x\rangle$$

3. كل شعاعين ذاتيين مرفقين بقيمتين ذاتيتين مختلفتين يكونا متعامدين .
4. إذا كان الفراغ الجزئي M ثابت بالنسبة للمؤثر F، فإن متممه العمودي $M^\perp$ يكون كذلك .

قضيه 1 8 [5]
العدد λ يكون قيمة ذاتية للمؤثر F القرين لنفسه إذا وفقط إذا كان: $\overline{E(F_\lambda)} \neq H$.

نظريه 1 9 [5]
ليكن المؤثرين F, T من $l(X)$

1. إذا كانت λ, ξ من $\rho(F)$ فإن:

$$R_\lambda(F) - R_\xi(F) = (\lambda - \xi) R_\lambda(F) R_\xi(F) \tag{4.1}$$

الصيغة (4.1) تسمى المتطابقة الأولى للحالة أو متطابقة هيلبار للحالة.

16.1 تحليلية الحالة

تعريف 1 40
ليكن المؤثر F من $l(X)$. من أجل كل λ من $\rho(F)$ يرمز للمؤثر $(F_\lambda)^{-1}$ بالرمز $R_\lambda(F)$.
المؤثرات $\{R_\lambda(F)/\ \lambda \in \rho(F)\}$ تسمى حالة المؤثر F.

نظريه 1 10 [5]
حالة المؤثر F أي $R_\lambda(F)$ دالة تحليلية في كل مجال تعريفها بمافيها المالانهاية.
عندها يكون:

- من أجل λ_0 ثابتة من $\rho(F)$ يكون:

$$R_\lambda(F) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)\, R_{\lambda_0}^{n+1}$$

- من أجل $\lambda_0 = \infty$ يكون:

$$R_\lambda(F) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} F^n$$

17.1 دالة المؤثر

ليكن F مؤثرا من $l(B)$.
معلوم أنه إذا كانت f دالة كثير حدود، أي $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ فإن دالة المؤثر F تعرف كالتالي:

$$f(F) = \sum_{k=0}^{n} a_k F^k$$

يمكن تعميم التعريف السابق على الدوال الصحيحة (التحليلية على $\mathbb{C}$)، أي إذا كانت

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

فإن

$$f(F)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nF^n$$

عندها يكون $f(F)\in l(B)$.
يمكن تعميم التعريف إلى صنف الدوال التحليلية في جوار ما للطيف، هذا الصنف يرمز له بـ $A(F)$.

-تعرف دالة المؤثر F لدوال الصنف $A(F)$ بأحد الصيغ التالية:

$$f(F)=\frac{-1}{2\pi i}\oint_{\partial\Omega}f(\lambda)R_\lambda(F)d\lambda$$

أو

$$f(F)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}F^n\oint_{\Gamma}\frac{f(\lambda)}{\lambda^{n+1}}d\lambda$$

حيث Ω جوار مفتوح للطيف $\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$ واقع في نطاق تحليلية f.
Γ دائرة مركزها الصفر حاوية تماما للطيف $\sigma(F)$.

نتيجة 1 13
إذا كانت الدالة f من الصنف $A(F)$ فإن: $f(\sigma(F))=\sigma(f(F))$

18.1 التحليل الطيفي

نظريه 1 11 [5]
كل مؤثر F من $l(H)$ قرين لنفسه يمكن تمثيله بشكل وحيد في مجموعة مؤثرات إسقاط E_μ متعلقة بوسيط حقيقي μ وتحقق.

1. $E_\mu\leq E_\nu,\ \ \mu\leq\nu$.
2. $E_{\mu+0}=E_\mu$.
3. $\mu<m_F\longrightarrow E_\mu=0,\ \ \mu\geq M_F\longrightarrow E_\mu=I$.

عندها المؤثر F يكتب بالشكل:

$$F=\int_{m_F-0}^{M_F}\mu dE_\mu$$

نتيجة 1 14

1. $F^n=\int_{m_F-0}^{M_F}\lambda^n dE_\lambda,\ \ n\geq 1$

2. $\|Fx\|^2 = \langle Fx, Fx\rangle = \langle F^2x, x\rangle = \int\limits_{m_F-0}^{M_F} \lambda^2 d\langle E_\lambda x, x\rangle$

3. $\mu \in \rho(F) \longrightarrow R_\mu = \int\limits_{m_F-0}^{M_F} \frac{\lambda}{\lambda-\mu} dE_\lambda$

19.1 المسقط الطيفي (مسقط ريس)

ليكن F من $l(H)$ طيفه $\sigma(F)$ مكون من مجموعتين غير خاليتين منفصلتين ومغلقتين σ_1, σ_2.
تسمى كل من σ_1, σ_2 مجموعة معزولة من الطيف.
ليكن V_1, V_2 جوارين منفصلين مفتوحين لـ σ_1, σ_2 على التوالي حدودهما معرفة كما في السابق.
نعرف دالة h_1 كالتالي:

$$h_1(\lambda) = \begin{cases} 1\ ; & \lambda \in V_1 \\ 0\ ; & \lambda \in V_0 \end{cases} \tag{5.1}$$

لاحظ أن h_1 من الصنف $A(F)$ ومنه نكتب

$$h_1(F) = \frac{-1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial V_1} R_\lambda(A) d\lambda \tag{6.1}$$

تعريف 1 41 يعرف المسقط الطيفي أو مسقط ريس للمؤثر F بالنسبة للجزء المعزول σ_1 من الطيف $\sigma(F)$ بأنه المؤثر $h_1(F)$ المعرف في الصيغة (6.1) ويرمز له بالرمز P_{σ_1} ونكتب

$$P_{\sigma_1} = \frac{-1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial V_1} R_\lambda(A) d\lambda$$

الفصل 2

بعض المؤثرات الخطية ومفهوم التشويش

مقدمه

يتناول هذا الفصل بعض المؤثرات الخطية خاصة المؤثر الوحدوي ودراسته الطيفية إضافة إلى مفهوم التشويش على المؤثر وبعض النظريات والقضايا التي نحتاجها في الفصل الثالث.

1.2 المؤثر الوحدوي

تعريف 2 1
نقول عن المؤثر F من $l(H)$ أنه وحدوي إذا حقق مايلي:

1. $\forall x, y \in H, \quad \langle F(x), F(y)\rangle = \langle x, y\rangle$
2. F غامر .

نتيجة 2 1
إذا كان F من $l(H)$ فإن الإثباتات التالية

1. F وحدوي.
2. $FF^* = I = F^*F$ أي $F^* = F^{-1}$
3. $E(F) = H$ و $\|Fx\| = \|x\|$ أي متقايس وغامر.

متكافئة.

نتيجة 2 2
المؤثر الوحدوي قابل للقب باستمرار.

مبرهنة 2 1 [5]
ليكن $H \longrightarrow H : F$ و $H \longrightarrow H : T$ مؤثرين وحدويين، فإنه يتحقق مايلي:

1. المؤثر F إيزومتري، وبالتالي يكون

$$\|Fx\| = \|x\|, \quad \forall x \in H$$

2. $\|F\| = 1$ ، شرط أن يكون $H \neq \{0\}$.
3. المؤثر F^{-1} وحدوي.
4. المؤثر FT وحدوي .

2.2 طيف المؤثر الوحدوي

نظريه 2 1 [5]
طيف المؤثرالوحدوي F يقع على دائرة الوحدة C، $C = \{z; \ |z|= 1\}$.

البرهان

[5] يكفي برهان أن

$$\|(F-\lambda I)^{-1}\| \leq |1 - |\lambda||^{-1}, \quad |\lambda| \neq 1 \tag{1.2}$$

بما أنَّ F وحدوي ($\|F\| = 1$) فإن:

$$\forall \lambda, \ |\lambda| > 1 \longrightarrow \lambda \in \rho(F)$$

بما أن F قابل للقلب باستمرار فإنه حتما $0 \in \rho(F)$.
حالة $0 < |\lambda| < 1$ نكتب:

$$F - \lambda I = F(I - \lambda F^{-1}) = -\lambda F(F^* - \frac{1}{\lambda} I)$$

ومنه

$$(F-\lambda I)^{-1} = \frac{-1}{\lambda}(F^* - \frac{1}{\lambda} I)^{-1} F^*$$

بما أن F^* وحدوي و $\frac{1}{|\lambda|} > 1$. فإن $\frac{1}{\lambda} \in \rho(F)$.
هذا يعني أن المؤثر $(F^* - \frac{1}{\lambda})^{-1}$ موجود ومعرف على كل الفراغ أي أن $(F - \lambda I)^{-1}$ كذلك.
وبالتالي يكون $\lambda \in \rho(F)$ وعليه يكون حتما

$$\sigma(F) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} / \ |\lambda| = 1\}$$

بوضع $\lambda = re^{i\varphi}$ ، $r > 1$ يكون

$$\begin{aligned}\|(F-\lambda I)x\|^2 &= \langle (F-\lambda I)x, (F-\lambda I)x\rangle \\ &= \langle (\overline{F^* - \lambda} I)(F - \lambda I)x, x\rangle\end{aligned}$$

$$= (r^2+1)\|x\|^2 - \langle(\overline{\lambda}F + \lambda F^*)x, x\rangle$$
$$\geq (r^2+1)\|x\|^2 - \|(\overline{\lambda}F + \lambda F^*)\|\|x\|^2$$
$$\geq (r^2+1)\|x\|^2 - 2r\|x\|^2$$
$$\geq (r^2+1)\|x\|^2 - 2r\|x\|^2$$
$$= (r-1)^2\|x\|^2$$

هذا يثبت (1.2) من أجل $|\lambda| > 1$.
حالة $\lambda = 0$: المعادلة (1.2) واضحة.
نأخذ $0 < |\lambda| < 1$ أي $|\lambda^{-1}| > 1$ وبما أن $F^* = F^{-1}$ فإن

$$\|(F-\lambda I)^{-1}\| = \|\lambda^{-1}(F^* - \lambda^{-1})^{-1}F^*\|$$
$$\leq |\lambda^{-1}|(|\lambda^{-1}|-1)^{-1} = (1-|\lambda|)^{-1}$$

□

3.2 التحليل الطيفي للمؤثر الوحدوي

نظريه 2 2 [5]
كل مؤثر وحدوي F من $l(H)$ يمكن تمثيله بشكل وحيد في مجموعة مؤثرات إسقاط E_φ متعلقة بوسيط حقيقي φ ، حيث $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ وتحقق:

1. $E_{\varphi_1} \leq E_{\varphi_2}, \quad \varphi_1 \leq \varphi_2$
2. $E_{\varphi+0} = E_\varphi$
3. $E_0 = 0, \quad E_{2\pi} = I$

عن طريق E_φ المؤثر F يكتب كالتالي:

$$F = \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} dE_\varphi \tag{2.2}$$

$\{E_\varphi\}$ تسمى تحليل الوحدة لـ F و E_φ دالة طيفية أو قياس طيفي .

تعريف 2 2
المؤثران F_1, F_2 من $l(H_1), l(H_2)$ على التوالي يقال أنهما متكافئان وحدويا إذا وجد مؤثر وحدوي U من $l(H_2, H_1)$
يحقق:
$$F_1 = U^{-1}F_2U$$

نظريه 2 3 المؤثر الوحدوي U لا يملك جزء مكافئ وحدويا لمؤثر الجداء في المتغير المستقل S إذا وفقط إذا كان أي فضاء جزئي ثابت لـ U يقلص U. (الفرضية كاملة معطاة في [16]).

نظريه 2 4 2 [16] ليكن U مؤثر وحدوي في فراغ هيلبار H. يوجد فضاءان جزئيان H_0 و H_1 يقلصان U ،

$$H = H_0 + H_1$$

بحيث يكون:

1. و U/H_0 يكافئ وحدويا الجمع المباشر لعدد نسخ من مؤثر الجداء في المتغير المستقل S.
2. أي فضاء جزئي ثابت للمؤثر U/H_1 يقلصه.
3. المؤثر U/H_1 يكافئ وحدويا مؤثر الجداء في المتغير المستقل في الفراغ $\int_C \oplus L_\mu(\xi) d\mu(\xi)$ حيث $\mu(\Delta) = 0$ من أجل بعض مجموعة بوريل Δ، $\Delta \subset C$ حيث $mes\Delta > 0$ (أنظر (4.1)).

نتيجة 2 3 (ورمر) [9]
الفضاء الجزئي الثابت A يقلص المؤثر U إذا وفقط إذا كان $E(\Delta) = 0$ من أجل بعض مجموعة بوريل Δ، $mes\ \Delta > 0, \Delta \in \mathbb{C}$ (هذا يعني إذا وفقط إذا كان $H_0 = 0$). هنا $E(.)$ هو القياس الطيفي المتعلق بالمؤثر الوحدوي U.

4.2 المؤثرات الخطية الشهيرة

ليكن Y, X ف.ش.ن على نفس الحقل IK.

تعريف 2 3
المؤثر F من $L(X, Y)$ يقال إنه ذو رتبة منتهية (أو منته) إذا كان $dimE(F) = n_0 < \infty$.
نرمز لمجموعة المؤثرات المنتهية من X في Y بالرمز $l_0(X, Y)$.

نتيجة 2 4
إذا كان $F \in l(X, Y)$، حيث Y, X لهيلبار فإن

$$F \in l_0(X, Y) \Leftrightarrow F^* \in l_0(Y, X) \text{ و } dimE(F) = dimE(F^*)$$

تعريف 2 4
المؤثر F من $l(X, Y)$ يقال إنه

1. متراص إذا حول كل متتالية منتهية ومحدودة في X إلى متتالية يمكن استخراج منها متتالية أساسية أي لكوشي.
2. مستمر تام إذا كان متراصا ومستمرا.

نتيجة 2 5
في الفراغ $L(X, Y)$ مفهوم المؤثر المتراص ومفهوم المؤثر المستمر تام منطبقان.

يرمز لمجموعة المؤثرات المتراصة من X في Y بالرمز $l_\infty(X, Y)$.

نتيجة 2 6

1. إذا كان F من $l(X,Y)$ و T من $l(Y,Z)$ و أحد المؤثرين F أو T متراص فإن TF كذلك.
2. الفراغ $l_\infty(X)$ مغلق بالنسبة لعملية ضرب المؤثرات.
3. الفراغ $l_\infty(X)$ يمثل مثال ثنائي الجانب في الجبر $l(X)$ أي

$$\forall F \in l_\infty(X),\ \forall T \in l(X) \rightarrow FT,\ TF \in l_\infty(X)$$

تعريف 2 5 من أجل كل p، $(0 < p < \infty)$ يسمى صنف كارلامان للمؤثرات المتراصة بأنه المجموعة l_p المعرفة كالتالي:

$$l_p = \{F \in l_\infty / \ \sum_{n=1}^{\infty} s_n^p < \infty\}$$

حيث s_n هي الأعداد المميزة (القيم الشادة) للمؤثر F. أي من أجلها يوجد حل غير معدوم للجملة

$$\begin{cases} Fx = sy \\ F^*y = sx \end{cases} \tag{3.2}$$

حالة $p = 1$ الصنف يسمى المؤثرات النووية

$$l_1 = \{F \in l_\infty / \ \sum_{n=1}^{\infty} s_n < \infty\}$$

حالة $p = 2$ الصنف يسمى صنف شميد

$$l_2 = \{F \in l_\infty / \ \sum_{n=1}^{\infty} s_n^2 < \infty\}$$

نتيجة 2 7

$$l_0(X) \subset l_1(X) \subset l_2(X) \subset l_\infty(X) \subset l(X)$$

* أيضا على هذا الصنف يمكن تعريف نظيم عن طريق دالة في s العدد المميز للدالة F تكون متناظرة نرمز لها بالرمز h وللنظيم بالرمز $\|.\|_*$ ونكتب

$$\|F\|_* = h(s(F))$$

تعريف 2 6 النظيم $\|.\|_*$ معرف على l_0 يسمى نظيم العبور الثابت وحدويا إذا حقق

$\|F\|_* = \|U_1FU_2\|_*,\ \forall F \in l_0$ من أجل كل مؤثرين U_1، U_2 وحدويين.

$\|F\|_* = 1,\ \forall F \in l_0 / \ dimE(F) = 1$

نتيجة 2 8

$(l_0, \|.\|_*)$ غير تام.

$\|.\|_*$ لا يكافئ النظيم $\|.\|_1$ على l_0

* نرمز لتتميم الفراغ l_0 وفق النظيم $\|.\|_*$ بالرمز $\bar{l}_0$

نظريه 2 5 (التعلق المستمر)[9]
إذا كان $F \in l_2(H)$ و M مجموعة مغلقة ومحدبة من $\mathbb{C}$ فإن:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ (\forall T \in l_2(H)/\ \|F - T\| < \delta) \Rightarrow \max_{\lambda \in M} |det(I - \lambda F) - det(I - \lambda T)| < \varepsilon$$

الصيغة الاخيرة تسمى صيغة التعلق المستمر لـ $det(I - \lambda F)$ بالمؤثر F.

قضيه 2 1 [13]
ليكن W هو أحد الفراغين $l_1(X)$ أو $l_2(X)$ و $(F_n)_{n\geq 1}$ متتالية مؤثرات من X متقاربة بضعف نحو F_0 من $l(X)$ حيث $\alpha = \sup \|F_n\| < \infty$ فإن $F_0 \in W$ ومن أجل كل مؤثرين T، S من $l_\infty(X)$ يكون

$$\|T(F_n - F_0)S\|_W \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0 \tag{4.2}$$

البرهان

[13] نعرف مؤثر خطي A_n من $l_\infty(X)$ في $l(X)$ كالتالي:

$$A_n S = T(F_n - F_0)S.$$

العلاقة (4.2) تكافئ التقارب القوي للمتتالية $(A_n)_{n\geq 1}$ نحو المؤثر المعدوم.
بما أن

$$\|A_n\| \leq \|T\| \|F_n - F_0\| \leq 2\alpha \|T\|$$

فإنه يكفي التأكد من (4.2) في حالة المؤثرات S أحادية البعد أي تكتب من الشكل $S = (., f)g$ والغلاف الخطي لها كثيف في $l_\infty(X)$.
لاحظ من أجل $n \longrightarrow \infty$:

$$\|TF_n g - TF_0 g\| \longrightarrow 0$$

وعليه

$$\|A_n S\| = \|(., f)TF_n - F_0 g\| = \|f\| \|TF_n - F_0 g\| \longrightarrow 0$$

نظريه 2 6 نظرية توشي كودا[17]
من أجل كل مؤثر F قرين لنفسه على H ومن أجل كل ε $(\varepsilon > 0)$ يوجد مؤثر T قرين لنفسه من $\bar{l}_0(H)$ يحقق :

1. $\|T\|_* \leq \varepsilon$
2. المؤثر القرين لنفسه $F + T$ يملك فقط الطيف النقطي.

□

* في كل من مايلي نعتبر F مؤثرا قرينا لنفسه في H، $\{E_\lambda\}$ تحليل الوحدة له، Γ_z حالته، و D، D_1، D_2 مؤثرات من $\bar{l}_2(H)$.

قضيه 2 2 [13]
من أجل تقريبا كل λ يوجد المشتق

$$K_\lambda = \frac{d(D_1 E_\lambda D_2)}{d\lambda}$$

يعرف بالمشتق بالنسبة للتقارب في $l_1(H)$.

البرهان

[13] نتأكد قبل كل شيء أن المؤثر $\theta_\lambda = D_1 E_\lambda D_2$ يملك تغيرات محدودة قوية في $l_1(H)$.
نفرض أن المستقيم العددي مقسم بأعداد منتهية بأنصاف المجالات $\Delta_k = [\lambda_k, \lambda_{k+1}[$.
عندنا :

$$\sum_k \|\theta_{\lambda_{k+1}} - \theta_{\lambda_k}\|_1 = \sum_k \|D_1 E(\Delta_k) D_2\|_1$$

$$\leq (\sum_k \|D_1 E(\Delta_k)\|_2 \|E(\Delta_k) D_2\|_2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq (\sum_k \|D_1 E(\Delta_k)\|_2^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_k \|E(\Delta_k) D_2\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

بما أن

$$\sum_k \|DE(\Delta_k)\|_2^2 = \sum_k \|E(\Delta_k) D\|_2^2 = \|D\|_2^2 \ , \ \ \sum_k \|\theta_{\lambda_{k+1}} - \theta_{\lambda_k}\|_1 \leq \|D_1\|_2 \|D_2\|_2 \quad (5.2)$$

فإن المؤثر θ_λ يعرف شكل خطي في $l_\infty(H)$.
حسب نظرية ڤالفاندا (1.11.1) من (5.2) نستنتج أن هذا الشكل الخطي تقريبا من أجل كل λ قابل للتفاضل بضعف. بمعنى آخر تقريبا من أجل كل λ المؤثر $K_\lambda \in l_1(H)$ حيث من أجل كل $B \in l_\infty(H)$

$$\frac{d(trB^* \theta_\lambda)}{d\lambda} = trB^* K_\lambda \quad (6.2)$$

نلاحظ من أجل هاته λ أن العبارة

$$S^{-1}(\theta_{\lambda+s} - \theta_\lambda)$$

محدودة في $l_1(H)$ لما $s \longrightarrow 0$.
بوضع في (6.2) $B = \langle ., f \rangle g$ نجد تقريبا من أجل كل $f, g \in H$

$$\frac{d\langle \theta_\lambda f, g \rangle}{d\lambda} = \langle K_\lambda f, g \rangle$$

وعليه تكون

$$S^{-1}(\theta_{\lambda+s}-\theta_\lambda)$$

متقاربة بضعف نحو K_λ.
نلاحظ الآن أن D_1 يمكن كتابته من الشكل

$$D_1 = D_1^1 \tilde{D}_1$$

حيث $D_1^1 \in l_\infty(H),\ \tilde{D}_1 \in l_2(H)$
أيضا

$$D_2 = D_2^1 \tilde{D}_2$$

حيث $D_2^1 \in l_\infty(H),\ \tilde{D}_2 \in l_2(H)$.
كل المعلومات السابقة الخاصة بـ θ_λ نوظفها للمؤثر

$$\tilde{\theta}_\lambda = \tilde{D}_1 F_\lambda \tilde{D}_2$$

بما أن

$$\theta_\lambda = D_1^1 \tilde{\theta}_\lambda D_2^1$$

فإن المطلوب يستنتج مباشرة من القضية (1.2).

قضيه 2 3 [13]
تقريبا من أجل كل λ، في الفراغ $l_2(H)$ توجد نهاية قوية $M_\lambda^\pm$ للمؤثر $D_1\Gamma_z D_2$ لما $z \longrightarrow \lambda \pm i0$
عندها يكون

$$M_\lambda^+ - M_\lambda^- = 2\pi i K_\lambda \in l_1(H) \tag{7.2}$$

البرهان

[13] العبارة ثنائيةالخطية

$$\langle D_1\Gamma_z D_2 f, g\rangle$$

تعطى بشكل تكامل كوشي ستيلجاص كالتالي:

$$\langle D_1\Gamma_z D_2 f, g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\langle F_\mu D_2 f, D_1^* g\rangle}{\mu - z}$$

ومنه تقريبا من أجل كل λ تملك نهاية ثابتة من أجل $z \longrightarrow \lambda + i0$.
مجموعة النقط λ التي من أجلها النهاية موجودة تكون في الحالة العامة متعلقة ب g, f. هذا التعلق يمكن إلغاؤه إذا أخذنا في مكان g, f فقط عبارة خطية في عناصر أساس ثابت. هذه العبارة الخطية تكون كثيفة في H.
وعليه من أجل وجود النهاية الضعيفة للمؤثر

$$D_1\Gamma_z D_2$$

يكفي برهان محدودية القيمة

$$\|D_1\Gamma_z D_2\|_2$$

لما $z \longrightarrow \lambda + i0$ ذلك تقريبا من أجل كل λ.
لاحظ كما في برهان القضية (2.2) من كون D_2, D_1 من $l_\infty(H)$ وباعتبار القضية (1.2) نستنتج تقارب $D_1\Gamma_z D_2$ نحو $M_\lambda^{(\pm)}$ حسب نظيم الفراغ l_2. وعليه الصيغة (7.2) تستنتج من العلاقة العامة بين القيم القصوى لتكامل كوشي ستيلجاص والكثافة المرفقة بها.
نبرهن الآن أنه تقريبا من أجل كل λ القيمة

$$\|D_1\Gamma_z D_2\|_2$$

محدودة لما $z \longrightarrow \lambda + i0$. من أجل هذا نعتبر أن $z \longrightarrow \lambda + i0,\ Imz > 0$.
نلاحظ أن :

$$\begin{aligned} 4D_1\Gamma_z D_2 &= (D_1 + D_2)^*\Gamma_z(D_1 + D_2) - (D_1 - D_2)^*\Gamma_z(D_1^* - D_2) \\ &-i(D_1^* + iD_2)^*\Gamma_z(D_1^* + iD_2) + i(D_1^* - iD_2)^*\Gamma_z(D_1^* - iD_2) \end{aligned}$$

وعليه يكفي دراسة المحدودية في الحالة D_1D^*، $D_2 = D$ فقط.
المؤثر

$$M_z = D^*\Gamma_z D$$

من أجل $Imz > 0$ يملك مركبة تخيلية غير سالبة. وعليه

$$\begin{aligned} \|M_z\|_2^2 &= trM_z^*M_z \\ &\leq det(I + M_z^*M_z) \\ &\leq det(I + iM_z^* - iM_z + M_z^*M_z) \\ &= det(I + iM_z^*)(I - iM_z) \end{aligned}$$

بما أن

$$det(I + iM_z^*) = \overline{det(I - iM_z)}$$

فإننا نلاحظ أيضا

$$1 \leq det(I + M_z^*M_z) \leq |det(I - iM_z)|^2 \tag{8.2}$$

ومنه حسب نظرية فاتو [7] نستنتج أن الدالة

$$det(I - iM_z)$$

في النصف الأعلى من المستوي تملك لما $z \longrightarrow \lambda + i0$ قيمة قصوى ثابتة هذا تقريبا من أجل كل λ.
وعليه محدودية القيمة $\|M_z\|_2^2$ لما $z \longrightarrow \lambda + i0$ ذلك تقريبا من أجل كل λ تستنتج من العلاقة (8.2).
نفس الشيء في حالة لما $z \longrightarrow \lambda - i0$ أي $Imz > 0$.

5.2 التشويش المنته، المتراص، و النووي

تعريف 2 7

1. يعرف التشويش المنته للمؤثر A بأنه المؤثر A_1 المعرف كالتالي:
$A_1 = A + T_1$
حيث T_1 مؤثر منته $(dimE(T_1) < \infty)$.

2. يعرف التشويش المتراص للمؤثر A بأنه المؤثر A_2 المعرف كالتالي:
$A_2 = A + T_2$
حيث T_2 مؤثر متراص $(T_2 \in l_\infty(H))$.

3. يعرف التشويش النووي للمؤثر A بأنه المؤثر A_3 المعرف كالتالي:
$A_3 = A + T_3$
حيث T_3 مؤثر نووي $(T_3 \in l_1(H))$.

6.2 النقط الناظيمية للمؤثر المحدود

ليكن $A \in l(H)$

تعريف 2 8 القيمة الذاتية λ_0 للمؤثر A تسمى قيمة ذاتية ناظيمية (عدد ذاتي ناظيمي) للمؤثر A إذا تحقق:

1. التضعيف الجبري للعدد λ_0 منته،

2. الفراغ H يحلل بشكل وحيد كالتالي:

$$H = X_{\lambda_0} \oplus Y_{\lambda_0}$$

حيث X_{λ_0} الفراغ الجذري للمؤثر A المرفق بالقيمة الذاتية λ_0، و Y_{λ_0} فراغ ثابت بالنسبة للمؤثر A، وعليه المؤثر $A - \lambda_0 I$ يكون قابلا للقلب باستمرار.

نظريه 2 7 [8]
النقطة λ_0 من طيف المؤثر A تكون قيمة ذاتية ناظيمية إذا وفقط إذا كانت تمثل نقطة معزولة من الطيف ومسقط ريس بالنسبة لها أي المؤثر

$$P_{\lambda_0} = \frac{-1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda-\lambda_0|=\delta} R_\lambda(A) d\lambda \tag{9.2}$$

منته، حيث δ هو نصف قطر دائرة مركزها λ_0 واقعة في $\rho(F)$.

البرهان

[8] (الاستلزام الأول): نفرض أن λ_0 قيمة ذاتية ناظيمية للمؤثر A.
نرمز بالرمز A_1، A_2 إلى إقتصار المؤثر A على X_{λ_0}، Y_{λ_0} على التوالي.
إذا كان $dimX_{\lambda_0} = k$ فإن

$$(A_1 - \lambda_0 I)^k = 0$$

ليكن n_0 أصغر عدد صحيح من أجله يكون

$$(A_1 - \lambda_0 I)^{n_0} = 0$$

ومنه بوضع

$$B_1 = A_1 - \lambda_0 I$$

يكون

$$-(\lambda - \lambda_0)^{n_0} I = B_1^{n_0} - (\lambda - \lambda_0)^{n_0} I =$$

$$= (A_1 - \lambda I)[-(\lambda - \lambda_0)^{n_0-1} I + -(\lambda - \lambda_0)^{n_0-2} B_1 + ... + B_{n_0-11}].$$

ومنه

$$-(A_1 - \lambda I)^{-1} = (\lambda - \lambda_0)^{-1} I + \sum_{j=1}^{n_0-1} (\lambda - \lambda_0)^{-j-1} B_1^j$$

من ناحية ثانية، المؤثر $A_2 - \lambda_0 I$ قابل للقلب باستمرار على الفراغ Y_{λ_0} ، و بالتالي من أجل كل λ حيث

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{|(A_2 - \lambda_0 I)^{-1}|}$$

يوجد مؤثر الحالة

$$(A_2 - \lambda I)^{-1} = R_{\lambda_0}(A_2) + (\lambda - \lambda_0)(R_{\lambda_0}(A_2))^2 + ... + (\lambda - \lambda_0)^{n_0}(R_{\lambda_0}(A_2))^{n_0} + ...$$

ومنه نستنتج أن كل النقاط λ حيث

$$1 < |\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}(A_2)\|^{-1}$$

تكون من $\rho(A)$. عندها مؤثر الحالة في هذه النقاط تحدده العبارة

(10.2)

$$R_\lambda(A) = [(\lambda-\lambda_0)^{-n_0} B_1^{n_0-1} + ... + (\lambda-\lambda_0)^{-2} B_1 + (\lambda-\lambda_0)^{-1} I] P + \sum_{s=0}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^s (R_{\lambda_0}(A_2))^{s-1}(I-P)$$

حيث P الإسقاط على X_{λ_0} الموازي لـ Y_{λ_0}، أي

$$PH = X_{\lambda_0} \ , \ PY_{\lambda_0} = 0$$

نكامل (10.2) نجد

$$P = P_{\lambda_0} = \frac{-1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda-\lambda_0|=\delta} R_\lambda(A)d\lambda$$

(الاستلزام العكسي): نفرض أن λ_0 نقطة معزولة من الطيف للمؤثر A حيث المؤثر P_{λ_0} المرفق بها منته.
لاحظ أن الفراغ H يمكن كتابته على شكل جمع مباشر

$$H = P_{\lambda_0}H \oplus (I - P_{\lambda_0})H / \ \ A(I - P_{\lambda_0})H \subset (I - P_{\lambda_0})H$$

إقتصار A على الفراغ $P_{\lambda_0}H$ هو مؤثر طيفه فيه نقطة واحدة $\lambda = \lambda_0$.
ومنه يكون

$$(A - \lambda I)^k(P_{\lambda_0}H) = 0, \ \ k = dim(P_{\lambda_0}H) \tag{11.2}$$

λ_0 تعتبر نقطة نظامية لإقتصار المؤثر A على الفراغ $(I - P_{\lambda_0})H$.
ومنه وباعتبار (11.2) نستنتج أن $P_{\lambda_0}H$ يكون هو الفراغ الجذري للمؤثر A المرفق بالقيمة λ_0.
بما أن

$$H = P_{\lambda_0}H \oplus (I - P_{\lambda_0})H$$

فإن λ_0 تكون قيمة ذاتية ناظيمية.

تعريف 2 9 النقطة λ_0 من المستوي المركب $\mathbb{C}$ يقال أنها نقطة ناظيمية للمؤثر A إذا كانت إما نقطة نظامية أو قيمة ذاتية ناظيمية لـ A. نرمز لمجموعة النقط الناظيمية بالرمز $\tilde{\rho}(A)$ (نلاحظ أن $\tilde{\rho}(A) \subset \rho(A)$)

تعريف 2 10 الطيف الأساس للمؤثر A يعرف بأنه متمم مجموعة النقط الناظيمية للمؤثر A بالنسبة للمستوي المركب، ويرمز له بالرمز $\sigma_e(A)$.

نتيجة 2 9 بما أن $\rho(A)$ مجموعة مفتوحة وكل النقاط الذاتية الناظيمية هي نقط معزولة من الطيف فإن $\tilde{\rho}(A)$ أيضا مفتوحة.

نظريه 2 8 [8]
ليكن G_Γ نطاق من $\mathbb{C}$ حدوده Γ قابلة للتقويم ومتكونة من النقط النظامية للمؤثر A($A \in l(H)$).
النطاق G_Γ يتكون من النقط الناظيمية للمؤثر A إذا وفقط إذا كان مؤثر الإسقاط

$$P_{G_\Gamma} = \frac{-1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma (A - \lambda I)^{-1}d\lambda$$

منته.
عندها يكون G_Γ إما لا يحوي نقط طيف لـ A و إما نقط طيف A في G_Γ تكون عدد منتهي من القيم الذاتية الناظيمية.
في الحالة الأخيرة الفراغ $(P_\Gamma H)$ يكتب بشكل جمع مباشر لكل الفراغات الجذرية للمؤثر A المرفقة بالقيم الذاتية من G_Γ.

البرهان

[8] (الاستلزام الأول): نفرض أن كل الطيف الموجود في G_Γ مكون من عدد منته من النقط الناظيمية $\lambda_1, ..., \lambda_n$.
لاحظ أن

$$P_\Gamma = P_{\lambda_1} + ... + P_{\lambda_n} \quad (P_{\lambda_j} P_{\lambda_k} = 0, i \neq k) \tag{12.2}$$

حيث $P_{\lambda_j}, j = 1, ..., n$ هو الإسقاط على الفراغ الجذري X_{λ_j} للمؤثر A المرفق بالقيمة الذاتية λ_j. ومنه P_Γ يكون منته و

$$X_\Gamma = P_\Gamma H = \sum_{j=1}^{n} P_{\lambda_j} H = X_{\lambda_1} + ... + X_{\lambda_n}$$

(الاستلزام العكسي): نفرض أن P_Γ منته.
الفراغ H تحليل في جمع مباشر لـ X_Γ و Z_Γ $(AZ_\Gamma \subset Z_\Gamma), (Z_\Gamma = (I - P_\Gamma)H)$.
نرمز بالرمز A_1, A_2 إلى اقتصار A على X_Γ و Z_Γ على التوالي.
الفراغ X_Γ منته، ومنه طيف المؤثر A_1 يتكون من عدد منته من القيم الذاتية λ_j $(\lambda_j \in G_\Gamma)$ ومنه حسب نظرية المصفوفات الفراغ X_Γ يحلل في جمع مباشر للفراغات X_{λ_j} $(A_j X_{\lambda_j} \subset X_{\lambda_j})$ بحيث يكون المؤثر $A_1 - \lambda_j I$ معدوما في الفراغ X_{λ_j}.
واضح أن المؤثر $A_1 - \lambda_j I$ قابل للقلب باستمرار على كل الفراغات X_{λ_k} حيث $k \neq j$.
المؤثر $A_2 - \lambda_j I$ قابل للقلب باستمرار من أجل كل λ من G_Γ. ومنه طيف المؤثر A في النطاق G_Γ ينطبق مع طيف المؤثر A_1. وعليه داخل G_Γ المؤثر A يملك عدد منته من القيم الذاتية $\lambda_j (j = 1, ..., n)$ فراغاتها الجذرية هي $X_{\lambda j} (j = 1, ..., n)$ منتهية.
النقط $\lambda_j (j = 1, ..., n)$ تعتبر نقط ناظيمية لأن الفراغ H يمكن تحليله بشكل جمع مباشر لفراغات ثابتة بالنسبة لـ A:

$$H = X_j + Z_j, j = 1, ..., n$$

عندها يكون المؤثر $A - \lambda_j I$ قابل للقلب باستمرار على الفراغ

$$Z_j = Z_\Gamma + \sum_{k \neq j} X_k, j = 1, ..., n$$

الفصل 3

استقرار الطيف الأساس

مقدمة

يتناول هذا الفصل دراسة استقرار الطيف الأساس للمؤثرات الوحدوية المشوشة

1.3 استقرار الطيف الأساس في حالة $\rho(F)$ مترابطة

في كل ما يلي نعني بالدالة المؤثر هي كل دالة مركبة تأخذ قيمها في فراغ المؤثرات.

قضيه 3 2 [8] إذا كانت الدالة المؤثر $A(\lambda)$ تحليلية في جوار V_{λ_0} للنقطة λ_0 حيث $A(\lambda)$ من $l_\infty(H)$، فإنه يوجد ε $(\varepsilon > 0)$ بحيث

$$\forall\lambda \in \mathbb{C}/\ 0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$$

المعادلات

$$(I - A(F)(\lambda))\varphi = 0$$

تملك نفس العدد من الحلول المستقلة خطيا.

البرهان

[8] ليكن $\{e_1, ..., e_n\}$ الأساس المتعامد و المتجانس لفراغ حلول المعادلة

$$(I - A(\lambda_0))\varphi = 0 \tag{1.3}$$

و $\{g_1, ..., g_n\}$ الأساس المتعامد و المتجانس للفراغ $[E(I - A(\lambda_0))]^\perp$
نعرف مؤثر $B(\lambda)$ كالتالي:

$$B(\lambda) = I - A(\lambda) + \textstyle\sum_{j=0}^{n}(., e_j)g_j,\ \ \lambda \in V_{\lambda_0}$$

واضح أن $B(\lambda_0)$ لا ينعدم ومجموعة قيمه هي H كله. هذا يعني أن المؤثر $B(\lambda)$ قابل للقلب باستمرار عندما $\lambda = \lambda_0$، عندها يوجد عدد صغير s $(s > 0)$ بحيث من أجل كل λ $(|\lambda - \lambda_0| < s)$ يكزن المؤثر $B(\lambda)$ أيضا قابل للقلب باستمرار و

$$\begin{aligned}(B(\lambda))^{-1} &= (B(\lambda_0) + (B(\lambda) - B(\lambda_0)))^{-1}\\ &= (B(\lambda_0))^{-1}[I + (B(\lambda) - B(\lambda_0))(B(\lambda_0))^{-1}]^{-1}\\ &= (B(\lambda_0))^{-1}(I + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty}[(B(\lambda) - B(\lambda_0))(B(\lambda_0))^{-1}]^k)\end{aligned}$$

المعادلة

$$(I - A(F)(\lambda))\varphi = 0$$

واضح أنها تكافئ المعدلة

$$B(\lambda)\varphi = \textstyle\sum_{j=1}^{n}\langle\varphi, e_j\rangle g_j$$

أو تكافئ الجملة

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n}\xi_j(B(\lambda))^{-1}g_j, \quad |\lambda - \lambda_0| < s \tag{2.3}$$

$$\xi_k = \langle\varphi, e_k\rangle, \quad k = 1, 2, ..., n \tag{3.3}$$

بتعويض φ من (2.3) في (3.3) نحصل من أجل كل ξ_k على n معادلة خطية جبرية:

$$\sum_{j=1}^{n}[s_{j,k} - \langle(B(\lambda))^{-1}g_j, e_k\rangle]\xi_j = 0, \; k = 1, ..., n \tag{4.3}$$

من أجل $|\lambda - \lambda_0| < s$ عدد الحلول المستقلة خطيا للمعادلة (1.3) ينطبق مع عدد الحلول المستقلة خطيا للجملة (4.3).

كل عناصر المحدد $\Delta(\lambda)$ للجملة (4.3) هي دوال تحليلية في الوسيط λ حيث $|\lambda - \lambda_0| < s$. إذا كانت كلها معدومة فإن الجملة (4.3) من أجل كل λ حيث $|\lambda - \lambda_0| < s$ تملك n حلول مستقلة خطيا.

نفرض الآن أنه على الأقل أحد عناصر المحدد $\Delta(\lambda)$ يختلف عن الصفر في نقطة λ من نقاط $|\lambda - \lambda_0| < s$.

من بين مصغرات المحدد $\Delta(\lambda)$ نرمز بالرمز $\Delta_p(\lambda)$ للمصغر الأكبر رتبة و يختلف عن الصفر على الأقل في نقطة λ حيث $|\lambda - \lambda_0| < s$ (pهي رتبة هذا المصغر).

من خلال تحليلية $\Delta_p(\lambda)$ على القرص $\{\lambda, \; |\lambda - \lambda_0| < s\}$ بإستثناء محتمل لبعض النقط المعزولة فإن $\Delta_p(\lambda) \neq 0$.

في كل النقط λ حيث $\Delta_p(\lambda) \neq 0$ الجملة (4.3) تملك $n - p$ حلول مستقلة خطيا.

نظريه 3 1 (قوخبير) [8]

إذا كانت $A(\lambda)$ دالة تحليلية على مجموعة مفتوحة و مترابطة G حيث

$A(\lambda) \in l_\infty(H)$، فإنه من أجل كل λ من G باستثناء محتمل لبعض النقاط المعزولة، العدد $\alpha(\lambda)$ والذي هو عدد الحلول المستقلة خطيا للمعادلة

$$\varphi - A(\lambda)\varphi = 0$$

يملك قيمة ثابتة $\alpha(\lambda) = n$.
في النقط المعزولة يكون $\alpha(\lambda) > n$.
في الحالة الخاصة إذا كان على الأقل في نقطة $\alpha(\lambda) = 0$ فإنه من أجل كل λ من G باستثناء محتمل لبعض النقاط المعزولة المؤثر $I - A(\lambda)$ يكون قابلا للقلب باستمرار.

البرهان

[8] ليكن

$$n = \min \alpha(\lambda), \ \lambda \in G$$

نفرض أن $\min \alpha(\lambda)$ موجود من أجل $\lambda = \lambda_0$ أي $\alpha(\lambda_0) = n$.
نرمز بالرمز λ_1 لأي نقطة من G حيث $\alpha(\lambda_1) > n$.
نبرهن أن λ_1 تكون نقطة معزولة، أي نجد ε_1 $(\varepsilon_1 > 0)$ بحيث من أجل كل λ حيث $0 < |\lambda - \lambda_1| < \varepsilon_1$ يكون $\alpha(\lambda) = n$.
نربط النقطتين λ_0، λ_1 بالسبيل Γ الذي نفرض أنه موجود كليا في G. بتطبيق القضية (1.3) على المؤثر $A(\lambda)$ نتحصل على :
من أجل كل λ من السبيل Γ يوجد ε_λ $(\varepsilon_\lambda > 0)$ بحيث من أجل كل $\bar{\lambda}$ تحقق $0 < |\bar{\lambda} - \lambda| < \varepsilon_\lambda$ الدالة $\alpha(\bar{\lambda})$ تكون ثابتة القيمة.
ليكن U_λ جوار مفتوح لـ λ من Γ، نلاحظ أن $\Gamma \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Gamma} U_\lambda$.
بما أن Γ متراص فإن $\Gamma \subset \cup_{j=1}^{k} U_j$.
نفرض أن $\lambda_0 \subset U_1$، $\lambda_1 \subset U_k$. نلاحظ أن كل جوارين متجاورين متقاطعين، وعليه في كل نقط الجوار U_j $(j = 1, 2, ..., k)$ باستثناء محتمل لمراكزهم الدالة $\alpha(\lambda)$ تحتفظ بنفس القيمة الثابتة.
بما أنه في الجوار U_1 الحاوي للنقطة λ_0 تكون $\alpha(\lambda) = n$ فإنه في الجوار U_k لـ λ_1 باستثناء محتمل للنقطة λ_1 يكون $\alpha(\lambda) = n$. .
الشق الثاني من النظرية يستنتج من الأول ذلك لأنه في كل النقاط λ من Γ، حيث $\alpha(\lambda) = 0$ المؤثر $I - A(\lambda)$ قابل للقلب باستمرار.

قضيه 3 3 [8]
ليكن $A \in l(H)$ و G مركبة مترابطة للمجموعة $\tilde{\rho}(A)$ ($\tilde{\rho}(A)$ مجموعة النقط الناظيمية للمؤثر A).
إذا كان $B \in l_\infty(H)$ والمؤثر $A + B$ يملك في G على الأقل نقطة ناظيمية فإن G تكون مركبة مترابطة للمجموعة $\tilde{\rho}(A + B)$.
في الحالة الخاصة من أجل كل $A \in l(H)$، $B \in l_\infty(H)$ للمؤثرين A، $A + B$ تتطابق المركبة غير المحدودة للمجموعتين $\tilde{\rho}(A)$ و $\tilde{\rho}(A + B)$.

البرهان

[8] من أجل كل $\lambda \in \rho(A) \cap G$ لدينا:

$$A+B-\lambda I=(I+B(A-\lambda I)^{-1})(A-\lambda I)$$

الدالة المؤثر $B(A-\lambda I)^{-1}$ تحليلية في النطاق $\rho(A)\cap G$ وتأخد قيمها في $l_\infty(H)$.
بما أن المؤثر $A+B-\lambda I$ قابل للقلب باستمرار في كل نقطة من G فإنه في هذه النقطة يكون المؤثر $I+B(A-\lambda I)^{-1}$ كذلك.
حسب نظرية قوخبير 1.3 المؤثر $I+B(A-\lambda I)^{-1}$ قابل للقلب باستمرار على $\rho(A)\cap G$ باستثناء محتمل لمجموعة على الأكثر قابلة للعد من النقط المعزولة.
بما أن طيف المؤثر A في G مكون من نقط معزولة فإن طيف المؤثر $A+B$ كذلك.
ليكن Γ منحني مغلق قابل للتقويم في G محيط بـ $\rho(A)$ و $\rho(A+B)$.
لاحظ أن

$$(A+B-\lambda I)^{-1}=(A-\lambda I)^{-1}-(A+B-\lambda I)^{-1}B(A-\lambda I)^{-1}, \lambda\in G$$

ومنه

$$\frac{-1}{2\pi i}\int_\Gamma(A+B-\lambda I)^{-1}d\lambda=\frac{-1}{2\pi i}\int_\Gamma(A-\lambda I)^{-1}d\lambda+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(A+B-\lambda I)^{-1}B(A-\lambda I)^{-1}d\lambda \quad (5.3)$$

الحد الأول من الطرف الأيمن للمعادلة هو مؤثر إسقاط حسب النظرية (7.2) وهو مؤثر منته، والحد الثاني هو مؤثر من $l_\infty(H)$ لأن $B\in l_\infty(H)$. ومنه نستنتج أن مؤثر الإسقاط في الطرف الأيسر من $l_\infty(H)$. هذا الأخير ممكن فقط في الحالة عندما يكون منته، ومنه حسب النظرية (7.2) كل نقط طيف المؤثر $A+B$ المحاطة بـ Γ تكون قيم ذاتية ناظيمية لهذا المؤثر.

من أجل إتمام البرهان نلاحظ أن المؤثرين A و $A+B$ يغيران الدور بينهما وأن تقاطع $\tilde\rho(A)$ و $\tilde\rho(A+B)$ دوما يحوي النطاق غير محدود التالي :

$$\{\lambda,\ |\lambda|>max(|A|,|A+B|)\}$$

قضيه 3 4 [8]
ليكن $F\in Al(H)$ و B كيفي من $l_\infty(H)$.
مجموعة النقط الناظيمية للمؤثرين F و $F+B$ متساوية. عندها يكون العدد غير الحقيقي λ للمؤثر $F+B$ إما نقطة من $\rho(A+B)$ وإما قيمة ذاتية ناظيمية.

البرهان

[8] معلوم أن $\rho(F)$ تحوي كل النقط غير الحقيقية والأعداد الحقيقية λ حيث $|F|<|\lambda|$، ومنه تكون مترابطة. وبالتالي البرهان يستنتج من القضية (3.3).

نتيجة 3 1 إذا كانت مجموعة الحالة $\rho(F)$ للمؤثر F مترابطة و K مؤثر متراص، فإن :

$$\sigma_e(A)=\sigma_e(A+K).$$

2.3 استقرار الطيف الأساس في الحالة العامة

النتيجة (1.3) في الحالة العامة غير صحيحة.

مثال

أبسط مؤثر وحدوي الذي طيفه الأساس غير مستقر هو مؤثر الجداء في المتغير المستقل S في الفضاء $L^2(C)$، حيث

$$C = \{z;\ |z|= 1\}$$

و

$$(Sf)(z) = zf(z), \quad z \in \mathbb{C},\ f \in L_2$$

بالفعل، نضع :

$$K = \langle ., e_{-1}\rangle e_0, \quad e_0(z) = 1,\ z \in \mathbb{C};\ e_{-1} = S^{-1}e_0$$

ونلاحظ أن

$$S + K = S_+ \oplus (S + K)\ |_{(Q)^\perp}$$

حيث $S_+ = S/Q^2$ هو مؤثر الجداء في المتغير المستقل على الفضاء الجزئي Q^2 لكل الدوال من L_2 والتي معاملاتها الفورية ذات الحدود السالبة تساوي الصفر.
ومنه يكون :

$$\sigma_e(S + K) = \sigma_e(S_+) = \bar{D} = \{z;\ |z|\leq 1\}$$

نتيجة 3 2 إذا كان $U = S$ أو إذا كان المؤثر الوحدوي U يملك جزء (يملك اقتصار على فراغ ثابت) يكون مكافئ وحدويا لمؤثر الجداء في المتغير المستقل S فإننا نستطيع التشويش عليه بمؤثر K أحادي البعد بحيث يكون

$$\sigma_e(U + K) = \sigma_e(S_+) = \bar{D}$$

قضيه 3 5 [16] لتكن Ω نطاق محدود أحادي الترابط في المستوي المركب حدودها Γ قابلة للتقويم (قابلة للقياس)، ولتكن F دالة منضبطة في Ω وتأخذ قيمها في l_1
إذا كان

$$F_R(z) = \frac{F(z) + F(z)^*}{2} \geq 0$$

أو

$$F_J(z) = \frac{F(z) - F(z)^*}{2i} \geq 0$$

حيث $z \in \Omega$ فإنه تقريبا من أجل كل ξ، $\xi \in \Gamma$، توجد في الفراغ l_1 قيمة حدية زاوية للدالة

$$F_1 = D_1FD_2$$

عندها يكون

$$F_1(\xi) = \lim_{z\to\xi} F_1(z)$$

ذلك من أجل كل المؤثرات المتراصة D_1 و D_2.

البرهان

[16] نبرهن أولا وجود القيم الحدية الزاوية الضعيفة للدالة F .
بما أن :

$$4\langle F(z)f, g\rangle = \langle F(z)(f+g), f+g\rangle - \langle F(z)(f-g), f-g\rangle$$
$$+i\langle F(z)(f+ig), f+ig\rangle - i\langle F(z)(f-ig), f-ig\rangle$$

فإنه نستطيع أن نقتصر مناقشتنا للدوال من الشكل

$$\langle F(.)f, f\rangle \ , \ f \in H$$

من أجل هذه الدوال يكون

$$Re\langle F(z)f, f\rangle \geq 0 \ , \ z \in \Omega$$

ومنه وباعتبار نظرية فاتو و نظرية بريفالوف $((2.5.1), (4.5.1))$ يكون المطلوب.
لتكملة برهان القضية يكفي برهان أن النظيم $\|F(z)\|_{l_2}$ محدود لما $z \to \xi$, $z \in \Omega$، من أجل كل ξ، $\xi \in \Gamma$، وبالرجوع إلى القضية (1.2) التي تبين التقارب القوي لمتتالية المؤثرات في l_2 نحصل على

$$\begin{aligned}
\|F(z)\|_{l_2}^2 &= trF(z)F(z)^* \\
&\leq det(I + F(z)F(z)^*) \\
&\leq det(I + F(z)F(z)^*) + F(z) + F(z)^* \\
&= det(I + F(z))(I + F(z)^*) \\
&= |det(I + F(z))|^2
\end{aligned}$$

من جهة أخرى

$$det(I + F(z)F(z)^*) \geq 1, \ \ z \in \Omega$$

حسب نظرية فاتو 2.5.1 الدالة $det(I + F(.))$ تملك قيمة حدية زاوية تقريبا في كل مكان في Γ. وعليه يكون النظيم $\|F(z)\|_{l_2}$ محدود .

قضيه 3 6 [16] ليكن U مؤثر وحدوي في H.
الدالة

$$G_1 = D_1 G D_2$$

حيث

$$G(z) = (U - z)^{-1} \ ; \ |z| < 1 \ \text{و} \ D_i \in l_2 \ ; \ i = 1, 2$$

تملك في الفراغ l_2 قيمة حدية زاوية تقريبا من أجل كل ξ; $|\xi| = 1$

البرهان

[16] بما أن :

$$G_1 = D_1GD_2 = D_1U^{-1}(UG)D_2 = \tilde{D}_1UGD_2$$
$$= \frac{1}{4}\{(\tilde{D}_1^* + D_2)^*UG(\tilde{D}_1^* + D_2) - (\tilde{D}_1^* - D_2)^*UG(\tilde{D}_1^* - D_2)$$
$$-i(\tilde{D}_1^* + iD_2)^*UG(\tilde{D}_1^* + iD_2) + i(\tilde{D}_1^* - iD_2)^*UG(\tilde{D}_1^* - iD_2)\}$$

فإنه نستطيع أن نقتصر دراستنا على الدوال من الشكل

$$F_1 = D^*UGD/\ D \in l_2$$

نحلل المؤثر D كالتالي:

$$D = A.B/\ \ A \in l_2,\ B \in l_\infty$$

و نضع

$$F = A^*UGA$$

نتحقق من أن الدالة F تحقق شروط القضية (5.3).
بالفعل:

$$2F_R(z) = A^*(U(U-z)^{-1} + (U^* - \bar{z})^{-1}U^*)A$$
$$= A^*(U^* - \bar{z})^{-1})((U^* - \bar{z})U + U^*(U-z))(U-z)^{-1}A$$
$$= A^*(U^* - \bar{z})^{-1}(2 - 2(zU^*)_R)(U-z)^{-1} \geq 0$$

بما أن

$$2 - 2(zU^*)_R \geq 2(1 - \|zU^*\|)I = 2(1 - |z|)I > 0$$

فإن القضية (6.3) تستنتج من القضية (5.3).

قضيه 3 7 [16] إذا كان U مؤثر وحدوي في H، $E(.)$ قياسه الطيفي، و Δ مجموعة جزئية بورلية مفتوحة من الدائرة C حيث $E(\Delta) = 0$،و $mes\Delta > 0$. فإنه من أجل كل ξ، $\xi \in \Delta$ لدينا (النهاية الزاوية في l_2)

$$\lim_{z\to\xi}(D_1G(z)D_2 - D_1G(\frac{1}{\bar{z}})D_2) = 0$$

حيث $G(z) = (U-z)^{-1},\ |z| = 1$، و $D_i \in l_2,\ i = 1,2$.

البرهان

[16] و يستنتج من القضية (6.3) وبتطبيق نظرية بريفالوف 4.5.1 على الدالة

$$\Phi(z) = \langle D_1G(z)D_2f, g\rangle = \int\limits_{|\xi|=1} \frac{\Psi(\xi)d\mu(\xi)}{z - \xi},\quad |z| \neq 1$$

حيث μ هو القياس في 3 من النظرية (4.2) ،

$$f, g \in \int_C \oplus L(\xi) d\mu(\xi)$$

و

$$\Psi(\xi) = \langle (D_2 f)(\xi), (D_1^* g)(\xi) \rangle, \quad \xi \in C$$

قضيه 3 8 [16]
إذا كان A و Bمن $l(H)$ حيث $A - B \in l(H)$ فإن $U_A - U_B \in l(H)$، حيث

$$U_A = (A + i)(A - i)^{-1}$$

هو تحويل كايلي للمؤثر A.

البرهان

[16] واضح ذلك لأن:

$$\begin{aligned} U_A - U_B &= (B - i)^{-1}((B - i)(A + i) \\ &\quad -(B + i)(A - i))(A - i)^{-1} \\ &= 2i(B - i)^{-1}(B - A)(A - i)^{-1} \in l(H) \end{aligned}$$

نظريه 3 2 ليكن U مؤثر وحدوي في فراغ هيلبار H قابل للفصل.

1. إذا كان المؤثر U يملك فراغ جزئي ثابت وممدد، فإن:

$$\sigma_e(U + K) = \bar{D} = \{z; \ |z| \leq 1\}$$

من أجل كل مؤثر K أحادي البعد.

2. إذا كان كل فراغ جزئي ثابت بالنسبة إلى U يقلص U، فإن:

$$\sigma_e(U + K) = \sigma_e(U)$$

من أجل أجل كل مؤثر K نووي($K \in l_1$).

البرهان

الفرضية الأولى من النظرية (2.3) برهنت سابقا.
لبرهان الفرضية الثانية من النظرية تمثل المؤثر $U + K - \lambda, \ K \in l_1$ في الشكل

$$U + K - \lambda = (I + K(U - \lambda)^{-1})(U - \lambda), \ \lambda \notin C$$

ونعتبر الدالة $d_{\pm}$:

$$d_+(\lambda) = det_2(I + K(U-\lambda)^{-1}), \quad |\lambda| < 1$$
$$d_-(\lambda) = det_2(I + K(U-\lambda)^{-1}), \quad |\lambda| > 1$$

حيث $det_2(I+A), \ A \in l_1$ معرف بـ :

$$det_2(I+A) = det(I+A)e^{(tr(A))}$$

لاحظ أن

$$det_2(I+AB) = det_2(I+BA); \ A, B \in l_2$$

ومنه نستنتج أن

$$d_\pm(\lambda) = det_2(I + D_1(U-\lambda)^{-1}D_2)$$

حيث $K = D_1D_2$ و $D_i \in l_2; \ i = 1, 2$

إذا استعملنا الآن التعلق المستمر لـ $det_2(I+A)$ بالمؤثر A بالنسبة لمسافة في l_2 واستعملنا القضية (7.3) فإننا نستطيع أن نلاحظ أن

$$\lim_{\lambda\to\xi}(d_+(\lambda) - d_-(\frac{1}{\lambda})) = 0 \qquad (6.3)$$

تقريبا من أجل كل ξ, $\xi \in \Delta$.

بما أن الدالة d_+ منضبطة في القرص

$$\{\lambda, \ |\lambda| < 1\}$$

فإنه إما

$$d_+(\lambda) = 0, \ |\lambda| < 1$$

وإما

$$d_+(\lambda) \neq 0.$$

ممكن تستثنى مجموعة نقطية من C.

الحالة الأخيرة تعني أن

$$\sigma_e(U+K) = \sigma_e(U)$$

والحالة الأولى مستحيلة.

بالفعل، إذا كانت

$$d_+(\lambda) = 0, \ |\lambda| < 1$$

فإنه من المساواة (6.3) ينتج بأن الدالة d_- تملك تقريبا في كل المجموعة Δ قيمة حدية زاوية تساوي الصفر ومنه حسب نظرية لوزينا 3.5.1 يكون

$$d_- \equiv 0$$

نظريه 3 3 ليكن U مؤثر وحدوي في H لا يملك فراغ جزئي ثابت ممدد.

1. إذا كان الطيف $\sigma(U)$ للمؤثر U مطابق للدائرة C و l فراغ المؤثرات الخطية المحدودة في H، فإنه يوجد مؤثر $K \in l_1$، بحيث يكون

$$\sigma_e(U+K) = \bar{D}$$

2. إذا كان $\sigma(U) \neq C$ فإن:

$$\sigma_e(U+K) = \sigma_e(U)$$

من أجل كل مؤثر K متراص ($K \in l_\infty$).

البرهان

ليكن U مؤثر وحدوي مع $\sigma(U) = C$.
من دون خسارة في العمومية يمكننا إفتراض أن $\lambda = 1$ ليست قيمة ذاتية لـ U.
ليكن A و M مؤثرين قرينين لنفسهما في H و تحويل كايلي لهما ينطبق مع U و $\tilde{S}$ على التوالي، حيث $\tilde{S}$ مؤثر في H مكافئ وحدويا لمؤثر الجداء في المتغير المستقل S في L_2.
بواسطة نظرية توشي كرودا يوجد مؤثرين قرينين لنفسهما B و N يملكان فقط الطيف النقطي حيث $B - A \in l$ و $M - N \in l$. طيف المؤثرين UB و UN هو طيف أيضا نقطي ومنه حسب القضية (8.3) يكون

$$U_B - U_A = U_B - U \in l / U_N - U_M = U_N - \tilde{S} \in l$$

بتطبيق القضية (3.1) على متتالية القيم الذاتية للمؤثرين U_B و U_N نجد مؤثر وحدوي V حيث

$$U_B - VU_N \in l.$$

ومنه يكون

$$U - V\tilde{S}V^{-1} = (U_A - U_B) + (U_B - VU_NV^{-1}) + (VU_NV^{-1} - V\tilde{S}V^{-1}) \in l.$$

من النقطة 1 من النظرية ينتج أن

$$\sigma_e(U + K) = \bar{D} = \{z; |z| \leq 1\}$$

من أجل إختيار K من $l(H)$.
الشق الثاني من النظرية مبرهن في النظرية (2.3) .

خاتمة عامة

يندرج محتوى هذه المذكرة في العمل على توضيح حالات استقرار الطيف الأساس للمؤثر الوحدوي المشوش، واعتمدنا ثلاث حالات من التشويش وهي : التشويش بمؤثر أحادي البعد، التشويش بمؤثر متراص، التشويش بمؤثر نووي.

لهذا الغرض جمعنا أهم المقالات التي تناولت هذا الموضوع وبعض المراجع من التحليل الدالي ونظرية المؤثرات.
تمكنا في هذا العمل من الحصول على مؤثر أبسط من المؤثر الوحدوي بعد التشويش عليه، ومن ثم معرفة الشروط التي من أجلها يكون الطيف الأساس مستقرا. كل هذا يكمن في تسهيل حلول المعادلات الدالية التي معاملاتها مؤثرات وحدوية مشوشة بأحد المؤثرات سالفة الذكر، والعمل يبقى مفتوحا من أجل مؤثرات غير وحدوية مشوشة.

المصادر

المصادر باللغة العربية

[1] د.أ.كولموغوروف، س. فومين، مبادئ في نظرية التوابع و في التحليل التابعي، - تعريب أبو بكرخالد سعد الله -د.م.ج.1987.

[2] إيروين كريزيك ، المدخل إلى التحليل الدالي وتطبيقاته-ترجمة د.خضر حامد الأحمد- ،الطبعة الرابعة -دمشق-2004-2005 م.

[3] محمد حازي، المختصر في الطبولوجيا، ديوان المطبوعات الجامعية، 02- 1992.

[4] مصطفى . عسيلة، دروس في التبولوجيا والتحليل الدالي، د.م.ج-الجزائر- 2009.

[5] مصطفى . عسيلة، دروس في المؤثرات ونظرية الأطياف، الجزء الأول ، ا لمؤثرات المحدودة ، UKMO , 2013.

المصادر باللغة الأجنبية

[6] I.I.Privalov ; Boundary Properties of Analytic Functions, Moscow-Leningrad, 1950.

[7] I.M.Gelfand and G.E.Shilov ; Generalized Functions Volume : Theory of Differntial Equations, Academic Press, New York, 1967.

[8] I.Ts.Gokhberg and M.Krein ; Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators in a Hilbert Space, 1965.

[9] J.von Neumann ; characterisierung des Spektrum eines Integrolaoperators, Paris, 1935.

[10] J.Wermer ; On invarient subspace of normal operators, Proc.Amer.Math.Soc., 1952.

[11] Kato T. ; Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, 1966.

[12] L.de Brange ; Perturbations of selfadjoint transformations, Amer.J.Math., 1962.

[13] M.Sh.Birman and S.B.Entina ; A stationary apprach in the abstract theory of scattering, Izv.Akad.Nauk SSSR.Ser.Matem., 1967.

[14] N.Dunford and J.T.Schartz ; Linear Operators, New York, 1958.

[15] N.I.Akhiezer and I.M.Glazman ; The Theory of Linear Operators in a Hilbert Space, Moscow, 1966.

[16] N.K.Nikol'skii ; On invarient subspace of unitary operators, Vestnik Leningr.Un-ta, Ser Matem., 1966.

[17] S.T.Kuroda ; On a theorem of Weyl-von Neumann, Proc.Japan Acad., 1958.

استقرار طيف المؤثر الوحدوي المشوش

الملخص

هذا العمل يهدف إلى توضيح الشروط الملائمة للحصول على جزء من طيف المؤثر الخطي أكثر استقرارا أثناء التشويش عليه.
اعتمدنا في دراستنا مؤثر وحدوي مشوش بمؤثر أحادي البعد، ثم بمؤثر متراص، ثم بمؤثر نووي.
أساس هذا العمل هو توضيح ماورد في المقالات الموجودة في قائمة المراجع و بالأخص المقال [16].

الكلمات المفتاحية: المؤثر الوحدوي، المؤثر المتراص، المؤثر الأحادي البعد، المؤثر النووي ، المؤثر المشوش، استقرار الطيف .

The stability of spectrum of the perturbat unitary operator

Abstract

Our aim in this work is clarify the apporiate conditions for obtaining a more stable part of the spectrum of linnear operator, when we perturbat it.
We have based our study on the cornerstone of unitary operator that parturbat by one-dimensional operator, compact operator, and by nuclear operator.
This study is to explaing the content of the articles listed in the bibliography, and especially the article [16].

key words : Unitary operator, cmopact operator, one-dimensional operator, nuclear operator, perturbat operators, the stability of spectrum .