UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matiére

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE DE MASTER ACADEMIQUE

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par : Begui Noudjoud

Thème

Erreur d'approximation polynômiale en dimension finis quelconque

Version de :07 /06/2015

Devant le jury composé de :

Mr.Meflah Mabrouk	M. A. UKMO université- Ouargla	Président
Mr. Said Mohamed Said	M. A. UKMO université- Ouargla	Examinateur
Mr. Bennour Hacene	M. A.UKMO université - Ouargla	Rapporteur

Table des matières

Remerciements

Mes remerciement vont premièrement au Dieu le tout puissant pour la volonté, et la patience, Qu'il m'a donné tout au long de mes années d'étude.
Je tiens exprimer mes vifs remerciements au président de jury **Mr.Meflah Mabrouk** et l'examinateur **M.r Saïd Mohamed Saïd**
je tient exprimer mes remerciements à mon promoteur **M.r Bennour Hacene** pour ses judicieux conseils, sa persévérance toute la période de mon projet.
Je remercie tous ma famille (mes parents, mes frères et mes soeurs surtout Oumama), mes collègues et mes amis pour leurs assistance et soutiens, et tout ceux qui ont contribué de proche ou de loin à la réalisation de ce travail.

Notations et Conventions

- Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$

- $L^2 = H^0$

- $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\}$

- $H^m(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega) \quad |\alpha| \leq m\}$

- $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), u_{/\partial\Omega} = 0\}$

- $\nabla v = grad\, v = \begin{pmatrix} \partial_x v \\ \partial_y v \end{pmatrix}$

- $\Delta v \quad = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$

Introduction

Le mathématique est une science, non limité, qui a plusieurs branches d'entre elle l'analyse numérique qui se base sur les méthodes approximatives. celles-ci traitent les équations différentielles.
Dans notre travail, on a établi des majorations de la distance des fonctions de régularité donne à un espace de polynômes pour les normes d'espace de Sobolev.
Pour cela on a rappelé sur le premier chapitre les Notions Préliminaires qui contiennent les espaces discrets avec un rappel sur les polynômes orthogonaux on à réfère [4]et[2].
Enfin on a parlé sur les polynômes de Legendre qui forment famille des polynômes deux à deux orthogonaux et unitaire satisfait cette propriété peut être construire par la procédé de Gram-Schmidt applique à la base canonique, dans l'espace $L^2(\Lambda)$.
Le deuxième et le dernier chapitre est consacré aux
Erreur d'approximation en un dimension : Ce travaille a pour but de majorer la distance de fonctions de régularité donnèe à un espace de polynômes, pour les normes de sobolev dèfinies dans le chapitre I.comme les espaces de sobolev que l'on considère ici sont des espaces de Hilbert,cette distance est calculèe au mayen d'opèrateurs de projection orthogonale sur l'espace de polynômes et a ètè initialement estimèe .L'ètude s'effectue d'abord sur l'intervalle $\Lambda =]-1, 1[$, puis sur domaines du type $(]-1, 1[)^d$ est un entier quelconque≥ 2.
1)- On définit Π_N l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(\Lambda)$ sur $\mathbb{P}_N(\Lambda)$.
pour toute fonction φ de $L^2(\Lambda)$, $\pi_N\varphi$ appartient à $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ et vérifie : $\forall \psi_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda)$,
$\int_{-1}^{1}(\varphi - \pi_N\varphi)(\zeta)\psi_N(\zeta)d\zeta = 0$. alors $\pi_N\varphi$ dans l'espace de polynôme $\mathbb{P}_N(\Lambda)$. la fonction φ dans $L^2(\Lambda)$ s'écrit comme combinaison linéaire à la base de polynôme de Legendre.
alors : $\varphi = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi^n L_n$ *avec* $\pi_N\varphi = \sum_{n=0}^{N} \varphi^n L_n$
on montre la majoration de $\|\varphi - \pi_N\varphi\|_{L^2(\Lambda)}$ à partir de l'estimation à poriori (2.3) à l'aide de Lemme(6) est une conséquence de l'opérateur d'injection A continu de $H^{\ell+2}$ dans H^ℓ

et l'opérateur d'injection A^m de $H^{\ell+2m}$ le Théorème(17) fournit une majoration d'erreur d'ordre optimal entre une fonction quelconque de$L^2(\Lambda)$ et sa projection sur $\mathbb{P}_N(\Lambda)$.
aussi l'opérateur π_N posséde de propriété d'approximation dans les espace de Sobolev d'ordre négative.
alors :$\|\varphi - \pi_N\varphi\|_{H^{-k}(\Lambda)}$ si l'on essaie d'écrire une majoration d'erreur optimale de $\|\varphi - \pi_N\varphi\|_{H^1(\Lambda)}$
2)- On définit $\pi_N^{1,0}$ l'opérateur de projection orthogonale de $H_0^1(\Lambda)$ sur $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$.
pour toute fonction φ de $H_0^1(\Lambda)$, $\pi_N^{1,0}\varphi$ appartient à $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$ et vérifie : $\forall\psi_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda)$,
$\int_{-1}^{1}(\varphi' - (\pi_N^{1,0}\varphi)')(\zeta)\psi'(\zeta)d\zeta = 0$ alors $(\pi_N^{1,0}\varphi)$ dans l'espace $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$, φ dans $L^2(\Lambda)$.
on montre la majoration de $\|\varphi - \pi_N^{1,0}\varphi\|_{H^1(\Lambda)}$ a partir de l'estimation à poriori (2.6) pour la distance l'espace $H^1(\Lambda)$.
et on montre $\|\varphi - \pi_N^{1,0}\varphi\|_{L^2(\Lambda)}$ à partir de l'estimation à poriori (2.7) pour la distance l'espace $L^2(\Lambda)$. on applique l'identité : $(\pi_N^{1,0}\varphi)' = \pi_{N-1}\varphi'$
quad Comme $(\pi_N^{1,0}\varphi)'$ appartient bien à $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$, alors :$\|\varphi - \pi_N^{1,0}\varphi\|_{H^1(\Lambda)} = \|\varphi - \pi_N^{1,0}\varphi\|_{L^2(\Lambda)}$ et en utilisant le Théorème(17) on montre de ce Théorème.
La majoration de $\|\varphi - \pi_N^{1,0}\varphi\|_{L^2(\Lambda)}$ s'obtient grâce la méthode classique de dualité d'Aubin-Nitsche.
3)- On définit $\pi_N^{k,0}$ l'opérateur de projection orthogonale sur $\mathbb{P}_N(\Lambda) \cap H_0^k(\Lambda)$.
pour toute fonction φ de $H^m(\Lambda) \cap H_0^k(\Lambda)$. on montre la majoration de $\|\varphi - \pi_N^{1,0}\varphi\|_{H^\ell(\Lambda)}$ à partir l'estimation à poriori (2.15) pour la distance l'espace de $H^\ell(\Lambda)$. à l'aide en trois temps :
i)- en utilisant la définition $\pi_N^{k,0}$ et $\pi_{N-1}^{k-1,0}$ que $\|\varphi - \pi_N^{k,0}\|_{H^k(\Lambda)} = \|\varphi' - (\pi_N^{k,0}\varphi)'\|_{H^{k-1}(\Lambda)} = \|\varphi' - \pi_{N-1}^{k-1,0}\varphi'\|_{H^{k-1}(\Lambda)} alors \|\varphi - \pi_N^{k,0}\|_{H^k(\Lambda)} \leq c\|\varphi' - \pi_{N-1}^{k-1,0}\varphi'\|_{H^{k-1}(\Lambda)}$ on démontre par récurrence sur k la majoration pour $\ell = k$
ii)- à l'aide la méthode de d'Aubin-Nitshe.
iii)- pour tout entiers k et ℓ, $k \geq \ell$, toute fonction ψ de $H_0^k(\Lambda)$ vérifie :

$$\|\psi\|_{H^\ell(\Lambda)} \leq \|\psi\|_{L^2(\Lambda)}^{1-\frac{\ell}{k}} \|\psi\|_{H^k(\Lambda)}^{\frac{\ell}{k}}.$$

Erreur d'approximation polynômiale en dimension finis quelconque : Dans ce qui suit, on note Ω l'ouvert $]-1,1[^d$, où d est un entier quelconque ≥ 2. Le but de ce paragraphe est d'établir des majorations, de la distance dans un espace $H^k(\Omega)$ d'une fonction

de régularité connue à un certain espace de polynômes. on présente les démonstrations uniquement dans le cas $d = 2$. On désigne par $x = (x, y)$ le point générique de Ω dans ce cas. Les démonstrations reposent essentiellement sur les résultats de la Section (2.1), utilisés sur chaque variable avec un argument de "tensorisation". Ceci signifie que l'on va faire appel à la propriété suivante, en dimension $d = 2$ par exemple,
$L^2(\Omega) = L^2(\Lambda; L^2(\Lambda))$ et $H^1(\Omega) = H^1(\Lambda; L^2(\Lambda)) \cap L^2(\Lambda; H^1(\Lambda))$.
1)- On définit Π_N l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(\Omega)$ sur $\mathbb{P}_N(\Omega)$.
pour tout fonction υ de $L^2(\Omega)$.
- comme $\pi_N^{(x)} \circ \pi_N^{(y)}\upsilon$ appartient à $\mathbb{P}_N(\Omega)$ et que les $L_m(x)L_n(y)$, $0 \leq m, n \leq N$, forment une base de $\mathbb{P}_N(\Omega)$.
On montre la majoration de $\|\upsilon - \Pi_N\upsilon\|_{L^2(\Omega)}$ l'estimation à poriori (2.3) pour la distance dans $L^2(\Omega)$.
On applique l'identité : $\Pi_N = \pi_N^{(x)} \circ \pi_N^{(y)}$. et le Théorème(17).
2)- On définit $\pi_N^{1,0}$ l'opérateur de projection orthogonale de $H_0^1(\Omega)$ sur $\mathbb{P}_N^0(\Omega)$.
On montre la majoration de $\|\upsilon - \Pi_N^{1,0}\upsilon\|_{H^1(\Lambda)}$ l'estimation à poriori (2.4) pour la distance dans $H^1(\Omega)$ avec υ de $H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$
et On montre la majoration de $\|\upsilon - \Pi_N^{1,0}\upsilon\|_{L^2(\Omega)}$ l'estimation à poriori (2.4) pour la distance dans $L^2(\Omega)$. On applique la méthode de dualité d'Aubin-Nitsche.
3)- On définit $\Pi_N^{k,0}$ l'opérateur de projection orthogonale de $H_0^k(\Omega)$ sur $\mathbb{P}_N(\Omega) \cap H_0^k(\Omega)$.
pour tout υ dans $H^m(\Omega) \cap H_0^k(\Omega)$ s'écrit combinaison linéaire à la base de polynôme de Legendre .
On montre$\|\upsilon - \Pi_N^{k,0}\upsilon\|_{H^k(\Omega)}$ l'estimation à poriori (2.12) pour la distance dans $H^k(\Omega)$.
La démonstration du théorème pour les fonctions peu régulières qui relevé de la théorie générale de l'interpolation entre espace de Banach.

Chapitre 1

Notions Préliminaires

1.1 Les espaces discrets

On définit les espaces des polynômes, tout d'abord en dimension $d = 1$, puis dans le domaine de dimension $d \geq 2$. qui sont produit des intervalles

Notation 1 *Pour tout entier $n \geq 0$, on définit $\mathbb{P}_N$ comme les espaces des polynômes sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$, pour tout intervalle ouvert Λ on note $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ espace de restrictions à Λ des fonctions de l'ensemble $\mathbb{P}_N$.*

Notation 2 *Pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout intervalle ouvert borné Λ de $\mathbb{R}$ on note $\mathbb{P}_n^0(\Lambda)$ l'espace des polynômes de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ qui s'annule aux deux extrémités de Λ.*

1) un polynôme appartient à $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$, $n \geq 2$, $\Lambda =]a, b[$ si :

$$p(x) = (x - a)(x - b)q(x) \text{ tel que } q \in \mathbb{P}_N \tag{1.1}$$

2) Les bases de $\mathbb{P}_N$ sont formées par les ε^m, $0 \leq m \leq n$ alors on déduit le résultat suivant :

$$\mathbb{P}_N(\Lambda) = n + 1$$

,

$$\mathbb{P}_N^0(\Lambda) = n - 1$$

.

En dimension $d \geq 2$:on travaille dans des domaines Ω des tensorises c'est à dire du type $\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times ... \times \Lambda_d$ où les $\Lambda_i = \Lambda_1, ..., \Lambda_d$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$, on note $u = (u_1, ..., u_d)$ le variable de $\mathbb{R}^d$.

Définition 3 *Pour tout entier $n \geq 0$ et pour tout domaine Ω égale au produit*

$\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times ... \times \Lambda_d$. On note $\mathbb{P}_N(\Omega)$ l'espace des restrictions sur Ω à valeur dans $\mathbb{R}$ de degré $\leq n$ par rapport à chaque x_i ; $i = 1, ..., d$ alors tout polynôme $p \in \mathbb{P}_N(\Omega)$ s'écrit sous forme :

$$p(x_1, ..., x_d) = \sum_{m_1=0}^{n} \sum_{m_2=0}^{n} ... \sum_{m_d=0}^{n} \alpha_{m_1...m_d} x_1^{m_1} x_2^{m_2} ... x_d^{m_d} \tag{1.2}$$

où $\alpha_{m_1}, ..._{,m_d}$ sont réels.

Proposition 4 *Soit Ω_d le produit de $\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times ... \times \Lambda_d$ des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et Ω_{d-1} le produit $\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times ... \times \Lambda_{d-1}$. pour tout entier $n \geq 0$ et toute base*

$\{\Phi_m,\ 0 \leq m \leq n\}$ de $\mathbb{P}_N(\Omega_d)$, un polynôme $p \in \mathbb{P}_N$

$$p(x_1, ..., x_d) = \sum_{m_1=0}^{n} q_m(x_1, ..., x_{d-1}) \Phi_m(x_0) \tag{1.3}$$

où les q_m, $0 \leq m \leq n$ appartient à $\mathbb{P}_N(\Omega_{d-1})$

Preuve. considérons $\Omega = (] - 1, 1[)^d$ pour un intervalle Λ de $\mathbb{R}$.
la proposition (4) est alors équivalent au résultat suivant : Pour tout entier $n \geq 0$ et tout base $\{\Phi_m, 0 \leq m \leq n - 1\}$ de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ Les polynômes définie par : $\Phi_{m_1} \otimes ... \otimes \Phi_{m_d}$ est $\Phi_{m_1} \otimes ... \otimes \Phi_{m_d}(x_1 ... x_d) = \Phi_{m_1}(x_1) \otimes ... \otimes \Phi_{m_d}(x_d)$
forment pour chaque $m_i,\ i = 1, ..., d$ (décrit les entier entre 0 à n) une base de $\mathbb{P}_N(\Omega)$.
Ceci évident lorsque par exemple les Φ_m corncident avec Φ^m $0 \leq m \leq n$, pour les problèmes avec condition aux limite essententielle on introduit les espaces suivants. ∎

Notation 5 *Pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout ouvert égale un produit : $\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times ... \times \Lambda_d$ des intervalle ouverts bornées de $\mathbb{R}$. On note $\mathbb{P}_N^0(\Omega)$ espace de restrictions à Ω qui s'annulent sur $\partial\Omega$*

Proposition 6 *Soit Ω_d le produit de $\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times ... \times \Lambda_d$ des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et Ω_{d-1} le produit $\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times ... \times \Lambda_{d-1}$. pour tout entier $n \geq 1$ et toute base $\{\Phi_m, 0 \leq m \leq n-1\}$ de $\mathbb{P}_N^0(\Omega_d)$ un polynôme $p \in \mathbb{P}_N^0(\Omega_d)$ si est seulement s'il s'écrit sous la forme :*

$$p(x_1, ..., x_d) = \sum_{m_1=0}^{n-1} q_m(x_1, ..., x_{d-1})\Phi_m(x_d) \tag{1.4}$$

où les q_m, $0 \leq m \leq n-1$ appartient à $\mathbb{P}_N^0(\Omega_{d-1})$

Preuve. Pour tout entier $n \geq 1$ en définit $\Omega = (]-1,1[)^d$ et $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$, la proposition est équivalente au résultat suivant : les polynômes définit par $\Phi_{m_1} \otimes ... \otimes \Phi_{m_d}$ formés lorsque m_i décrit les entier de Λ à $n-1$, une base de $\mathbb{P}_N^0(\Omega)$.
On définit des proposition (6)et (4)
La dimension des espaces $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ et $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$ lorsque Ω et un ouvert tensorisées

$$dim \mathbb{P}_N(\Lambda) = (n+1)^d$$
$$dim \mathbb{P}_N^0(\Lambda) = (n-1)^d$$

■

1.2 Rappel sur les polynômes orthogonaux

1.2.1 Polynôme de Legendre

Dans cette section, on a démontré plusieurs propriétés importantes de polynômes de Legendre qui seront utiles par la suite. Les polynômes de Legendre forment famille des polynômes deux à deux orthogonaux et unitaire satisfait cette propriété peut être construire par la procède de Gram-Schmidt applique à la base canonique, dans l'espace $L^2(\Lambda)$.

Lemme 1 *Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit L_n un polynôme non nul de degré n qui soit orthogonal à $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$ pour le produit $L^2(\Lambda)$. Alors* *i) L_n a la parité de son degré : $L_n(-x) = (-1)^n L_n(x)$*

ii) Les zéros de L_n sont réels strictement compris entre -1 et 1.

Preuve.
1) Le polynôme $\tilde{L_n}$ définie par $\tilde{L_n}(x) = L_n(-x)$ est lui aussi orthogonal à $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$ et de degré n. Donc $\tilde{L_n}$ est proportionnel à L_n. Comme la symétrie est involution, $\tilde{L_n}$ est en fait égale à $+L_n$ ou à $-L_n$ et comme le degré de L_n égale n on obtient(i)
2) Soit ℓ la nombre de zéros du polynôme L_n qui sont distinct strictement compris entre -1 et 1 et d'ordre impair. Soit $x_1, ..., x_l$ les zéros du L_n si $l < n$ les polynômes L_n est orthogonal à tous les polynômes des degré $\leq n-1$ alors

$$\int_{-1}^{1} L_n(x)\,(x-x_1)...(x-x_\ell)\,dx = 0$$

ceci impossible car la fonction intègre ne change pas de signe donc $\ell = n$ ceci montre que L_n ne s'annulent pas en -1 et 1 alors on peut définir les polynômes de Legendre. ■

Définition 7 *On appelle famille $(L_n)_n$ de polynômes deux à deux orthogonaux dans l'espace $L^2(\Lambda)$ et tel que pour tout entier $n \geqslant 0$, le polynôme L_n est de degré n et vérifie $L_n(1) = 1$. pour $n \geqslant 1$, on note $\zeta_1, ..., \zeta_n$ ses zéros avec la convention $-1 < \zeta_1 < ... < \zeta_n < 1$ on l'appelle les points de collocation de Gauss.*

Définition 8 *Soit $n \geqslant 1$ les $(n-1)$ zéros de $L_n^{'}$ sont tout distincts et tous intérieurs à Λ on a ainsi $-1 = \xi_0 < \xi_1 < ... < \xi_{n-1} < \xi_n = 1$ tel que $\xi_0, ..., \xi_n$ sont les zéros du polynôme $(1-x^2)L_n^{'}(x)$ et sont appels les points de collocation de Gauss-Lobatto.*

Remarque 9 .

i) Les zéros des L_n et aussi ceux des $L_n^{'}$ sont très importants, car ils sont au fondement de toute la méthode spectrale de collocation.

ii) Comme L_n forment une base orthogonale de $L^2(\Lambda)$ on définie L_n^* par : $L_n^* = \dfrac{L_n}{\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}}$ forment une base orthonormale de $L^2(\Lambda)$ cette base aussi la base des vecteurs propres *d'opérateur de Sturm-Liouville (d'où le nom de méthodes spectrales pour les méthodes utilisant de telles bases de polynômes).*

Corollaire 10 *Pour tout entier $n \geq 0$ on note k_n le coefficient de x^n dans $L_n(x)$.*

Preuve.
$(1-x^2)^n = (-1)^n x^{2n} + \varphi_{2n-2}(x)$ où φ_{2n-2} est un polynôme de degré $2n-2$

$$\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n = (-1)^n \frac{(2n)!x^n}{n!} + R_{n-1}(x)$$

où $R_{n-1}(x)$ est un polynôme de degré $(n-2)$ on obtient L_n est de degré n, sa parité est telle de n son coefficient dominant est $k_n = \dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$ ∎

Proposition 11 *pour tout entier $n \geqslant 0$ le polynôme $L_n(x)$ vérifie l'équation différentielle suivant :*

$$\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)L_n^{'}(x)\right) + n(n+1)L_n(x) = 0 \tag{1.5}$$

Preuve.
On sait que $\dfrac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)L_n^{'}(x)\right)$ est un polynôme de degré $\leq n$ pour tout polynôme $\varphi(x)$ de degré $\leq n-1$

$$\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)L_n^{'}(x)\right)\varphi(x)dx =$$

on intégrer par partie

$$\left[\left(\left(1-x^2\right)L_n^{'}(x)\right)\varphi(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\left(\left(1-x^2\right)\varphi^{'}(x)\right)L_n^{'}(x)dx$$

$$= \left[-L_n(x)\left(\left(1-x^2\right)\varphi^{'}(x)\right)\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\varphi^{'}(x)\right)L_n(x)dx = 0$$

puisque $\dfrac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\varphi^{'}(x)\right)$ est un polynôme de degré $\leq (n-1)$. On en considère qu'il existe un nombre λ_n tel que $\dfrac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)L_n^{'}(x)\right) + \lambda_n L_n(x) = 0$ pour déterminant λ_n dans l'égalité suivante :

$$-2xL_n^{'}(x) + (1-x^2)L_n^{''}(x) + \lambda_n L_n(x) = 0 \tag{1.6}$$

$$-2nk_n - n(n-1)k_n + \lambda_n k_n = 0$$

$$-2nk_n - n^2 k_n + nk_n + \lambda_n k_n = 0$$

$$-n^2 k_n - nk_n + \lambda_n k_n = 0$$

$$-(n^2+n)k_n = -\lambda_n k_n$$

$\lambda_n = n(n+1)$ on multiple l'équation (1.5)par $L_m(x)$ et on intègre par partie on obtient l'équation suivant :

$$\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right) L_n^{'}(x)\right) L_m(x)dx + n(n+1)\int_{-1}^{1} L_n(x)L_m(x)dx = 0$$

$$\left(1-x^2\right) L_n^{'}(x)L_m(x) \mid_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right) L_n^{'}(x)L_m^{'}(x)dx + n(n+1)\int_{-1}^{1} L_n(x)L_m(x)dx = 0$$

alors

$$-\int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right) L_n^{'}(x)L_m^{'}(x)dx + n(n+1)\int_{-1}^{1} L_n(x)L_m(x)dx = 0$$

$$\int_{-1}^{1} L_n^{'}(x)L_m^{'}(x)\left(1-x^2\right) dx = n(n+1)\int_{-1}^{1} L_n(x)L_m(x)dx = 0$$

ceci veut dire que $(L_n^{'})_n$ est une famille de polynôme deux à deux orthogonaux pour la mesure $(1-x^2)\,dx$ sur $\Lambda =]-1,1[$ la dernière conséquence de l'équation (1.5) on prend $x=1$ dans l'équation (1.6) on obtient :

$-2L_n^{'}(1) + (1-(1)^2)L_n^{''}(1) + n(n+1)L_n(1) = 0$

$-\,2L_n^{'}(1) + n(n+1)L_n(1) = 0 \Rightarrow L_n^{'}(1) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ■

Lemme 2 ***(Formule de Rodrigues)***

Pour tout entier $n \geq 0$, le polynôme $L_n(x)$ est donné par :

$$L_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left((1-x^2)^n\right). \tag{1.7}$$

Preuve.

On voit que la fonction $(1-x^2)^n$ est un polynôme de degré $2n$ ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $\leq n-1$ et s'annulent en 1 et -1 en intégrant n fois par partie alors pour tout polynôme φ de degré $\leq n-1$

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{d^n}{dx^n}\left(1-x^2\right)^n\right)\varphi(x)dx=\left[\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(1-x^2)^n\right)\varphi(x)\right]_{-1}^{1}$$

$$-\int_{-1}^{1}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(1-x^2)^n\right)\varphi^{'}(x)dx=...=(-1)^n\int_{-1}^{1}(1-x^2)\frac{d^n\varphi}{dx^n}dx=0$$

Alors $\dfrac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n$ égale un constante que multiple par L_n pour déterminer la constante on calcule $(1-x^2)^n|_{x=1}=0$

$\dfrac{d}{dx}(1-x^2)^n|_{x=1}=\dfrac{d}{dx}(1-x)^n(1+x)^n=n(1-x)^{n-1}(-1)(1+x)^n|_{x=1}+n(1+x)^{n-1}(1-x)^n|_{x=1}=0$

$\dfrac{d}{dx}(1-x)^n(1+x)^n|_{x=1}=n!(-1)^n2^n+0$ puisque $\dfrac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n|_{x=1}=c.L_n|_{x=1}$

$\Longrightarrow n!(-1)^n2!=c\ \dfrac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n=n!(-1)^n2^nL_n$

$\Longrightarrow \dfrac{(-1)^n}{2^nn!}\dfrac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n=L_n(x)$ ■

Corollaire 12 *Pour tout entier $n\geq 0$, on a la formule*

$$\int_{-1}^{1}L_n^2(x)dx=\frac{1}{n+\frac{1}{2}} \tag{1.8}$$

Preuve. En effectuent l'intégration par partie :

$$\int_{-1}^{1}L_n^2(x)dx=\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{d^n}{dx^n}((1-x^2)^n)\frac{d^n}{dx^n}((1-x^2)^n)dx$$

$$=\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(1-x^2)^n\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n\right]_{-1}^{1}-\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}})(1-x^2)^n(\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}})(1-x^2)^ndx=...$$

$$=\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n(\frac{d^{2n}}{dx^{2n}})(1-x^2)^ndx=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^ndx$$

on calcule l'intégrale

$$=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^ndx=2\int_{0}^{1}(1-x^2)^nd\varepsilon$$

$$=-2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^{2n+1}\theta d\theta=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}\theta d\theta$$

on obtient l'intégrale de Walis :

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\theta d\theta = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

en remplaçant on obtient :

$$\int_{-1}^{1} L_n^2(x)dx = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1} = \frac{2}{2n+1} \tag{1.9}$$

alors $\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)} = \dfrac{1}{n+\frac{1}{2}}$ ■

Corollaire 13 *Pour tout entier $n \geq 0$, le coefficient k_n de x^n dans $L_n(x)$ est $k_n = \dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$*

Preuve. Écrivons

$$(1-x^2)^n = (-1)^n x^{2n} + \varphi_{2n-2}(x)$$

ou φ_{2n-2} est un polynôme de degré $2n-2$

$$(\frac{d^n}{dx^n})(1-x^2)^n = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} x^n + R_{n-2}(x)$$

on $R_{n-2}(x)$ est un polynôme de degré $n-2$. on obtient L_n est de degré n, sa partie est telle de n son coefficient domina est $k_n = \dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$ ■

Lemme 3 *[2]*

Pour tout entier $n \geq 0$, on a la formule

$$\int_{-1}^{x} L_n(t)dt = \frac{1}{2n+1}(L_{n+1}(x) - L_{n-1}(x)) \tag{1.10}$$

Preuve.
Soit

$$G_{n+1}(x) = \int_{-1}^{x} L_n(t)dt$$

qui est un polynôme de degré $(n+1)$ qui s'annule en 1 et -1

$$G_{n+1}(-1) = \int_{-1}^{-1} L_n(t)dt = 0$$

$$G_{n+1}(1) = \int_{-1}^{1} L_n(t)dt = \left[\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(1-x^2)\right]_{-1}^{1} = 0.$$

D'après la définition de $L_n(x)$ l'identité

$$\int_{-1}^{1} L_n(x)G_{m+1}(x)dx = \int_{-1}^{1} L_m(x)G_{n+1}(x)dx$$

est vrai

$$\forall m > 0 \Rightarrow \int_{-1}^{-1} L_n^2(x)dx = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}$$

et

$$\int_{-1}^{-1} L_{n-1}^2(x)dx = \frac{1}{n-\frac{1}{2}}$$

pour $n > m+1$ et $m > n+1$ l'identité est nulle alors on peut écrire $G_{n+1}(x)$ sous la forme :
$G_{n+1}(x) = \alpha_n L_n(x) + \alpha_{n-1}L_{n-1}(x) + \alpha_{n+1}L_{n+1}(x)$
les coefficient $\alpha_n = 0$ puisque les polynômes $G_{n+1}(x)$, $L_{n+1}(x)$ et $L_{n-1}(x)$, d'un part et les polynômes $L_n(x)$ d'autre part sont de parité différentes. Il reste de calcule α_{n-1} et α_{n+1}, en comparent le coefficient de x^{n+1}
$\frac{k_n}{n+1} = \alpha_{n+1}k_{n+1}$. En utilise corolaire(13)
$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2(n+1)} = \alpha_{n+1}\frac{(2n+2)!}{2^{n+1}((n+1)!)^2} \Rightarrow 1 = \alpha_{n+1}\frac{(2n+2)(2n+1)}{2(n+1)} \Rightarrow 1 = \alpha_{n+1}(2n+1) \Rightarrow$
$\alpha_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$ on a $G_{n+1}(1) = 0$
$\alpha_{n-1}L_{n-1}(1) + \alpha_{n+1}L_{n+1}(1) = 0$
$\alpha_{n-1} + \alpha_{n+1} = 0 \Rightarrow \alpha_{n+1} = -\alpha_{n-1} = \frac{1}{2n+1}$. ■

Lemme 4 *Pour tout entier $n \geq 0$, on a la formule de récurrence*

$$L_{n+1}^*(x) = \frac{k_{n+1}^*}{k_n^*}xL_n^*(x) - \frac{k_{n-1}^*k_{n+1}^*}{(k_n^*)^2}L_{n-1}^*(x) \tag{1.11}$$

Preuve. On sait que le polynôme $L_{n+1}^* - \frac{k_{n+1}^*}{k_n^*}xL_n^*$ est de degré $\leq n$ et orthogonal à tous polynôme de degré $\leq n-2$ lorsqu'il existe

$$L_{n+1}^*(x) - \frac{k_{n+1}^*}{k_n^*}xL_n^*(x) = u_nL_n^*(x) - v_nL_{n-1}^*(x)$$

le coefficient u_n est nul puisque le polynôme L_n^* d'une part et les polynôme L_{n+1}^*, xL_n^* et L_{n-1}^* d'autre part sont de parité différentes il reste à calcule le coefficient v_n en multiple la formule(1.2.1) par L_{n-1}^*

$$L_{n+1}^*(x).L_{n-1}^*(x) = \frac{k_{n+1}^*}{k_n^*} xL_n^*(x).L_{n-1}^*(x) = u_n L_n^*(x).L_{n-1}^*(x) - v_n(L_{n-1}^*(x))^2$$

on intégré :

$$\int_{-1}^{1} L_{n+1}^*(x).L_{n-1}^*(x)dx = \frac{k_{n+1}^*}{k_n^*} \int_{-1}^{1} xL_n^*(x).L_{n-1}^*(x)dx - v_n \int_{-1}^{1} (L_{n-1}^*(x))^2 dx$$

$$0 = \frac{k_{n+1}^*}{k_n^*} \int_{-1}^{1} xL_n^*(x).L_{n-1}^*(x)dx - v_n \int_{-1}^{1} (L_{n-1}^*(x))^2 dx$$

en notant $xL_{n-1}^* = \dfrac{k_{n-1}^*}{k_n^*} L_n^* + \varphi_{n-1}$ où φ_{n-1} est un polynôme de degré $\leq n-1$ et en remplaçant

$$0 = \frac{k_{n+1}^*}{(k_n^*)^2} \int_{-1}^{1} (L_n^*(x))^2 dx - v_n \int_{-1}^{1} (L_{n-1}^*(x))^2 dx$$

$\Rightarrow v_n = \dfrac{k_{n+1}^*.k_{n-1}^*}{(k_n^*)^2}$ ■

Corollaire 14 *La famille $(L_n)_n$ est donné par les relations :*

$$\begin{cases} L_0(x) = 1 \quad , \quad L_1(x) = x \\ (n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x) \end{cases} \tag{1.12}$$

Preuve. En remplaçant chaque $L_n^*(x) = \sqrt{n+\frac{1}{2}} L_n(x)$, et $k_n^* = \sqrt{n+\frac{1}{2}} k_n$ dans la relation de récurrence de lemme(4)on obtient le résultat $(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x)$; $n \geq 1$ ■

Proposition 15 *L'opérateur de Sturm-Liouville est définie par :*

$A : u \to -((1-x^2)u')'$ est autoadjoint positif sur $L^2(\Lambda)$ de domaine $D(A)$ où

$D(A) = \{u \in H^1(\Lambda)\ (1-x^2)u'' \in L^2(\Lambda)\}$ les L_n^* sont la base de ses vecteurs propres normalisés :

$\exists \lambda_n \geq 0$ tel que $AL_n^* = \lambda_n L_n^*$ et $AL_n = \lambda_n L_n$ de plus $\lambda_n = n(n+1)$.

En général on a :

$D(A^m) = \{u \in H^m(\Lambda)\ (1-x^2)^{j-m} d_x^j u \in L^2(\Lambda),\ j = m+1, ..., 2m\}$

Preuve. Voir [7] ■

Lemme 5 *Pour tout entier $n \geq 1$, le polynôme $L_n^{'}(x)$ est vérifie*

$$\int_{-1}^{1} L_n^{'}(x)dx = n(n+1) = \|L_n\|_{H^1(\Lambda)}^2 \tag{1.13}$$

Preuve. On a :

$$\int_{-1}^{1} \left(L_n^{'}(x)\right)^2 dx = L_n^{'}(x)L_n(x) - \int_{-1}^{1} L_n^{''}(x)L_n(x)dx$$

$$= L_n^{'}(1)L_n(1) - L_n^{'}(-1)L_n(-1) - \int_{-1}^{1} L_n^{''}(x)L_n(x)dx = L_n^{'}(1) - (-1)^n L_n^{'}(-1)$$

$\Rightarrow L_n^{'}(1) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $L_n^{'}(-1) = \dfrac{-n(n+1)}{2}$ lorsque n est pair et égale $L_n^{'}(-1) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ lorsque n est impair. ■

Chapitre 2

Erreur d'approximation polynômiale

Ce chapitre a pour but de majorer la distance de fonctions de régularité donnèe à un espace de polynômes, pour les normes de sobolev dèfinies dans le chapitre I.comme les espaces de sobolev que l'on considère ici sont des espaces de Hilbert,cette distance est calculèe au mayen d'opèrateurs de projection orthogonale sur l'espace de polynômes et a ètè initialement estimèe dans [4] .L'ètude s'effectue d'abord sur l'intervalle $\Lambda =]-1,1[$, puis sur domaines du type $(]-1,1[)^d$ est un entier quelconque$\geq$ 2. on conclut en presèntant un resultat de relevement de trace polynômiale. le paramètre de dixretisation est un entier positif notè N. Le symbole c dèsigne une constante positive indepondant de N.

2.1 d'approximation polynômiale en un dimension

On étudie tout d'abord la distance à l'espace $P_N(\Lambda)$, pour le norme de l'espace $L^2(\Lambda)$.

2.1.1 Le projection π_N

Notation 16 *On note π_N l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(\Lambda)$ sur $\mathbb{P}_N(\Lambda)$. Ceci signifie que, pour tout fonction φ de $L^2(\Lambda)$, $\pi_N\varphi$ appartient à $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ et vérifié*

$$\forall \psi_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda),\ \int_{-1}^{1} (\varphi - \pi_N\varphi)(\zeta)\psi_N(\zeta)d\zeta = 0. \tag{2.1}$$

Une autre façon de caractériser cet opérateur consiste à remarque que les polynômes sur Λ *forment un sous-espace dense dans l'espace des fonctions continues sur* Λ *et donc dans*$L^2(\Lambda)$*.Par conséquent,la famille* $(L_n)_n$ *des polynômes de Legendre est une famille totale de l'espace* $L^2(\Lambda)$*. Comme ces polynômes sont deux à deux orthogonaux dans* $L^2(\Lambda)$*, toute fonction* φ *de l'espace* $L^2(\Lambda)$ *admet le développement*

$$\varphi = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi^n L_n \text{ avec } \varphi^n = \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}} \int_{-1}^{1} \varphi(\zeta) L_n(\zeta) d\zeta \tag{2.2}$$

et l'on a

$$\pi_N \varphi = \sum_{n=0}^{N} \varphi^n L_n$$

Théorème 17 *pour tout entier* $m \geq 0$*, il existe une constante c positive ne dèpendent que de* m *telle que, pour toute fonction* φ *de* $H^m(\Lambda)$*, on ait*

$$\|\varphi - \pi_N \varphi\|_{L^2(\Lambda)} \leq cN^{-m} \|\varphi\|_{H^m(\Lambda)} \tag{2.3}$$

on commence par prouver un résultat de continuité de l'opérateur auto-adjoint positif A dans $L^2(\Lambda)$

$$A\varphi = -\frac{d}{d\zeta}((1-\zeta^2)\varphi')$$

Lemme 6 *pour tout entier* $\ell \geq 0$*, l'opérateur* A *est continue de* $H^{\ell+2}(\Lambda)$*dans* $H^\ell(\Lambda)$*et pour tout entier* $\ell \geq 0, m \geq 0$ *l'opérateur* A^m *est continue de* $H^{\ell+2m}$*dans* $H^\ell(\Lambda)$

Preuve. On vérifie par récurrence sur l'entier $k \geq 0$,

$$\frac{d^k(A\varphi)}{d\zeta^k} = -(1-\zeta^2)\frac{d^{k+2}\varphi}{d\zeta^{k+2}} + 2(1-k)\zeta\frac{d^{k+1}\varphi}{d\zeta^{k+1}} + k(k+1)\frac{d^k\varphi}{d\zeta^k}.$$

lorsque $k = 0$

$$A\varphi = -\frac{d}{d\zeta}((1-\zeta^2)\varphi\prime) = -(1-\zeta^2)\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2} + 2\zeta\frac{d\varphi}{d\zeta}.$$

lorsque $k = 1$

$$\frac{d(A\varphi)}{d\zeta} = -(1-\zeta^2)\frac{d^3\varphi}{d\zeta^3} + 2\zeta\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2} + 2\frac{d\varphi}{d\zeta} + 2\zeta\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2} = -(1-\zeta^2)\frac{d^3\varphi}{d\zeta^3} + 4\zeta\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2} + 2\frac{d\varphi}{d\zeta}$$

si $\dfrac{d^{k-1}(A\varphi)}{d\zeta^{k-1}} = -(1-\zeta^2)\dfrac{d^{k+1}\varphi}{d\zeta^{k+1}} + 2k\zeta\dfrac{d^k\varphi}{d\zeta^k} + k(k-1)\dfrac{d^{k-1}\varphi}{d\zeta^{k-1}}$. est vraie

$$\frac{d^k(A\varphi)}{d\zeta^k} = -(1-\zeta^2)\frac{d^{k+2}\varphi}{d\zeta^{k+2}} + 2\zeta\frac{d^{k+1}\varphi}{d\zeta^{k+1}} + 2k\frac{d^k\varphi}{d\zeta^k} + 2k\zeta\frac{d^{k+1}\varphi}{d\zeta^{k+1}} + k(k+1)\frac{d^k\varphi}{d\zeta^k}$$

$$= -(1-\zeta^2)\frac{d^{k+2}\varphi}{d\zeta^{k+2}} + 2(k+1)\zeta\frac{d^{k+1}\varphi}{d\zeta^{k+1}} + k(k+1)\frac{d^k\varphi}{d\zeta^k}.$$

En appliquant l'identité $\forall k, 0 \leq k \leq l$,

$$\|\frac{d^k(A\varphi)}{d\zeta^k}\|_{L^2(\Lambda)} \leq c(\|\frac{d^{k+2}\varphi}{d\zeta^{k+2}}\|_{L^2(\Lambda)} + \|\frac{d^{k+1}\varphi}{d\zeta^{k+1}}\|_{L^2(\Lambda)} + \|\frac{d^k\varphi}{d\zeta^k}\|_{L^2(\Lambda)})$$

alors $A : H^{\ell+2}(\Lambda) \to H^\ell(\Lambda)$ est continue d'où la première affirmation du lemme. On déduit alors la seconde en itérant m fois ce résultat.

$$A^m : H^{\ell+2m}(\Lambda) \to H^\ell(\Lambda) \text{ est continue}$$

■

Démonstration du théorème (17) :

Étant donnée une fonction φ de $H^m(\varphi)$ pour laquelle on écrit la décomposition (2.2),il faut estimer

$$\varphi^n = \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}} \int_{-1}^{1} \varphi(\zeta)L_n(\zeta)d\zeta$$

On va distinguer deux cas, suivant que$m$ est pair ou impair.
1)Lorsque m est pair $m = 2k$ et $\varphi^n = \dfrac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}} \int_{-1}^{1} \varphi(\zeta)L_n(\zeta)d\zeta$, d'après l'équation différentielle

$$\varphi^n = \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}}\frac{1}{n(n+1)} \int_{-1}^{1} \varphi(\zeta)AL_n(\zeta)d\zeta$$

comme l'opérateur A est auto-adjoint dans $L^2(\Lambda)$, on obtient

$$\varphi^n = \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}}\frac{1}{n(n+1)} \int_{-1}^{1} (A\varphi)(\zeta)L_n(\zeta)d\zeta$$

En itérant k fois ce résultat, on en déduit

$$\varphi^n = \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}} \frac{1}{(n(n+1))^k} \int_{-1}^{1} (A^k\varphi)(\zeta) L_n(\zeta) d\zeta$$

On constate donc que

$$\|\varphi - \pi_N\varphi\|^2_{L^2(\Lambda)} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{(n(n+1))^{2k}} \left(\frac{\int_{-1}^{1}(A^k\varphi)(\zeta)L_n(\zeta)d\zeta}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}}\right)^2 \|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}$$

On minore alors les $n(n+1)$par N^2 ,ce qui donne

$$\|\varphi - \pi_N\varphi\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq N^{-4k} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{\int_{-1}^{1}(A^k\varphi)(\zeta)L_n(\zeta)d\zeta}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}}\right)^2 \|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}$$

Comme les $\frac{\int_{-1}^{1}(A^k\varphi)(\zeta)L_n(\zeta)d\zeta}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}}$ sont les coefficients de $A^k\varphi$ dans la base des polynômes de Legendre , on a

$$\|\varphi - \pi_N\varphi\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq N^{-4k} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{\int_{-1}^{1}(A^k\varphi)(\zeta)L_n(\zeta)d\zeta}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}}\right)^2 \|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)} = N^{-4k}\|A^k\varphi\|^2_{L^2(\Lambda)}$$

En utilisant le Lemme(6) on obtient

$$A^k : H^{2k}(\Lambda) \longmapsto H^0(\Lambda) = L^2(\Lambda)$$

alors

$$\|\varphi - \pi_N\varphi\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq N^{-4k}\|A^k\varphi\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq cN^{-4k}\|\varphi\|^2_{H^{2k}}$$
$$\Longrightarrow \|\varphi - \pi_N\varphi\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq cN^{-2m}\|\varphi\|^2_{H^m}$$

Lorsque m est impair :$m = 2k+1$ on obtient comme précédent

$$\varphi^n = \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}} \frac{1}{(n(n+1))^k} \int_{-1}^{1} (A^k\varphi)(\zeta) L_n(\zeta) d\zeta$$

On utilise l'équation différentielle et On intègre par partie :

$$\varphi^n = \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}} \frac{1}{(n(n+1))^{2k+1}} \int_{-1}^{1} (A^k\varphi)'(\zeta) L_n'(1-\zeta^2) d\zeta$$

On voit alors que

$$\|\varphi-\pi_N\varphi\|^2_{L^2(\Lambda)}=\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{(n(n+1))^{2(k+1)}}\frac{(\int_{-1}^{1}(A^k\varphi)^{'}(\zeta)L_n^{'}(1-\zeta^2)d\zeta)^2}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}}$$

On note que, comme $(L_n^{'})_n$, $n\geq 1$,sont deux à deux orthogonaux pour la mesure $(1-\zeta^2)d\zeta$ pour toute fonction ψ de$H^1(\Lambda)$ admet le développement

$$\psi=\sum_{n=0}^{+\infty}\psi^nL_n,\ \ avec\ \ \psi^n=\frac{\int_{-1}^{1}\psi^{'}(\zeta)L_n^{'}(\zeta)(1-\zeta^2)d\zeta}{\int_{-1}^{1}L_n^{'2}(\zeta)(1-\zeta^2)d\zeta}\ \ pour\ \ n\geq 1;$$

$$\|\psi\|^2_{H^1(\Lambda)}=\int_{-1}^{1}\psi^{'2}(\zeta)(1-\zeta^2)d\zeta=\sum_{n=0}^{+\infty}(\psi^n)^2\|L_n\|^2_{H^1(\Lambda)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\int_{-1}^{1}\psi^{'}(\zeta)L_n^{'}(\zeta)(1-\zeta^2)d\zeta)^2}{(\int_{-1}^{1}L_n^{'2}(\zeta)(1-\zeta^2)d\zeta)^2}\int_{-1}^{1}L_n^{'2}(\zeta)(1-\zeta^2)$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}\frac{(\int_{-1}^{1}\psi^{'}(\zeta)L_n^{'}(\zeta)(1-\zeta^2)d\zeta)^2}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}}$$

En appliquant cette formule pour la fonction $\psi=A^k\varphi$ et en minorant $(n(n+1))^{2k+1}$ par $N^{2(2k+1)}$, on voit que

$$\|\varphi-\pi_N\varphi\|^2_{L^2(\Lambda)}\leq cN^{-2(2k+1)}\int_{-1}^{1}(A^k\varphi)^{'2}(\zeta)(1-\zeta^2)d\zeta.$$

Et on conclut

$$\|\varphi-\pi_N\varphi\|^2_{L^2(\Lambda)}\leq cN^{-2m}\|(A^k\varphi)^{'}\|^2_{L^2(\Lambda)}\leq cN^{-2m}\|A^k\varphi\|^2_{H^1(\Lambda)},$$

d'où, d'après le Lemme(6),

$$\|\varphi-\pi_N\varphi\|^2_{L^2(\Lambda)}\leq cN^{-2m}\|\varphi\|^2_{H^m(\Lambda)}$$

Remarque 18 *Le Théorème(17) fournit une majoration d'erreur d'ordre optimal entre une fonction quelconque de*$L^2(\Lambda)$ *et sa projection sur* $\mathbb{P}_N(\Lambda)$*, c'est-à-dire que la puissance de*$\frac{1}{N}$ *est égale à la différence des ordres des espace de sobolev entre les membres de droite* *et de gauche de l'équation. On constat en effet que ce résultat ne peut être amélioré si une fonction φ s'écrit*

$$\varphi = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n (L_{n+1} - L_{n-1})$$

$$\pi_N \varphi = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n (L_{n+1} - L_{n-1})$$

$$\varphi - \pi_N \varphi = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \alpha_n (L_{n+1} - L_{n-1})$$

$$\|\varphi - \pi_N \varphi\|^2_{L^2(\Lambda)} = 2 \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(\alpha_{n+1} - \alpha_{n-1})^2}{2n+1}$$

$$\varphi^{'} = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n (L^{'}_{n+1} - L^{'}_{n-1}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n (2n+1) L_n$$

$$\|\varphi\|^2_{H^1(\Lambda)} = \|\varphi^{'}\|^2_{L^2(\Lambda)} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2 (2n+1)$$

on choisi

$$\alpha_n = \begin{cases} (2n+1)^{-\gamma} & \textit{si ne pas divisible par } \psi \\ \\ 0 & \textit{autrement} \end{cases}$$

$\varphi \in H^1(\Lambda)$ *si* $2\gamma - 1 > 1 \Rightarrow 2\gamma > 2 \Rightarrow \gamma > 1$ *et* $\|\varphi - \pi_N \varphi\|^2_{L^2(\Lambda)}$ *est de l'ordre de* $N^{-\gamma}$*. Cependant ce résultat ne peut être amélioré pour de fonction représentant des singularité aux extrémités de l'intervalle. L'opérateur* π_N *possède également des propriété d'approximation optimales dans les espaces de Sobolev d'ordre négatif. Elle sont énoncées dans le corollaire suivant.*

Corollaire 19 *Pour tout entier* $n \geq 0$, $k \geq 0$ *existe une constante* C *positive ne dépendant de* m *et* k *tels que pour tout fonction* $\varphi \in H^m(\Lambda)$ *on ait*

$$\|\varphi - \pi_N \varphi\|_{H^{-k}(\Lambda)} \leq c N^{-k-m} \|\varphi\|_{H^m(\Lambda)} \tag{2.4}$$

Preuve. [4] par définition de l'espace $H^{-k}(\Lambda)$

$$\|\varphi - \pi_N\varphi\|_{H^{-k}(\Lambda)} = \sup_{\psi \in H_0^k(\Lambda)} \frac{\int_{-1}^{1}(\varphi - \pi_N\varphi)(\zeta)\psi(\zeta)d\zeta}{\|\psi\|_{H^k(\Lambda)}}$$

En utilisant (2.1)on voit que

$$\int_{-1}^{1}(\varphi - \pi_N\varphi)(\zeta)\psi(\zeta)d\zeta = \int_{-1}^{1}(\varphi - \pi_N\varphi)(\zeta)(\psi - \pi_N\psi)(\zeta)d\zeta \leq \|\varphi - \pi_N\varphi\|_{L^2(\Lambda)}\|\psi - \pi_N\psi\|_{L^2(\Lambda)}$$

il suffit alors d'applique la majoration (2.3)du théorème (17)

$$\int_{-1}^{1}(\varphi - \pi_N\varphi)(\zeta)\psi(\zeta)d\zeta \leq cN^{-m}\|\varphi\|_{H^m(\Lambda)}N^{-k}\|\psi\|_{H^k(\Lambda)}$$

$$\frac{\int_{-1}^{1}(\varphi - \pi_N\varphi)(\zeta)\psi(\zeta)d\zeta}{\|\psi\|_{H^k(\Lambda)}} \leq cN^{-k-m}\|\varphi\|_{H^m(\Lambda)}$$

$$\Rightarrow \|\varphi - \pi_N\varphi\|_{H^{-k}(\Lambda)} \leq CN^{-k-m}\|\varphi\|_{H^m(\Lambda)}$$

si l'on essaie d'écrire une majoration d'erreur optimale de $\|\varphi - \pi_N\varphi\|_{H^1(\Lambda)}$ On s'aperçoit qu'elle ne peut pas être amélioré on démontre dans le cas particulier

$$\Rightarrow \|\varphi - \pi_N\varphi\|_{H^1(\Lambda)} \leq CN^{1/2}\|\varphi\|_{H^1(\Lambda)}$$

on choisie $\varphi = L_{N+1} - L_{N-1}$

$$\varphi' = L'_{N+1} - L'_{N-1} = (2N+1)L_N$$

$$\|\varphi\|^2_{H^1(\Lambda)} = \|\varphi'\|^2_{L^2(\Lambda)} = 2(2N+1)$$

$$\|\varphi\|_{H^1(\Lambda)} = \sqrt{2(2N+1)}$$

$$\pi_N\varphi = -L_{N-1} \ \ et \ \ \varphi - \pi_N\varphi = L_{N+1}$$

$$\|\varphi - \pi_N\varphi\|^2_{H^1(\Lambda)} = (N+1)(N+2)$$

$$\|\varphi - \pi_N\varphi\|_{H^1(\Lambda)} = \sqrt{(N+1)(N+2)}$$

il s'agit de construire un autre opérateur pour lequel une majoration d'erreur soient vérifier dans la norme $\|.\|_{H^1(\Lambda)}$. on s'intéresse dans un premier temps à l'approximation de fonction de $H_0^1(\Lambda)$ sur l'espace $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$. ■

2.1.2 Le projection $\pi_N^{1,0}$

Notation 20 *on note $\pi_N^{1,0}$ l'opérateur de projection orthogonale de $H_0^1(\Lambda)$ sur $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$ pour le produit scalaire associé à la norme $\|.\|_{H^1(\Lambda)}$ ceci équivaut à dire que pour toute $\varphi \in H_0^1(\Lambda), \pi_N^{1,0}\varphi \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda)$ et vérifie :*

$$\forall \psi_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda), \int_{-1}^{1} (\varphi' - (\pi_N^{1,0}\varphi)')(\zeta)\psi'(\zeta)d\zeta = 0 \tag{2.5}$$

Théorème 21 *pour tout entier $m \geq 1$, il existe une constante c positive ne dépendante que de m telle que, pour tout fonction φ de $H^m(\Lambda) \cap H_0^1(\Lambda)$, on ait*

$$\|\varphi - \pi_N^{1,0}\varphi\|_{H^1(\Lambda)} \leq cN^{1-m}\|\varphi\|_{H^m(\Lambda)} \tag{2.6}$$

$$\|\varphi - \pi_N^{1,0}\varphi\|_{L^2(\Lambda)} \leq cN^{-m}\|\varphi\|_{H^m(\Lambda)} \tag{2.7}$$

Démonstration :[4] On commençons par établir la première majoration (2.6), elle est vérifie pour N=1, on suppose $N \geq 2$ on va établir l'identité :

$$(\pi_N^{1,0}\varphi)' = \pi_{N-1}\varphi' \tag{2.8}$$

pour cela on considère un polynôme quelque χ_{N-1} de $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$ et en posant que

$$\psi_N(\zeta) = \int_{-1}^{\zeta} (\chi_{N-1}(\zeta) - \int_{-1}^{1} \chi_{N-1}(\mu)d\mu)d\zeta$$

on s'aperçoit comme la somme d'une constante λ et de la dérivée ψ_N' d'un polynôme dans $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$. On a alors

$$\int_{-1}^{1} (\varphi' - (\pi_N^{1,0}\varphi)')(\zeta)\chi_{N-1}(\zeta)d\zeta = \int_{-1}^{1} (\varphi' - (\pi_N^{1,0}\varphi)')(\zeta)\psi'(\zeta)d\zeta + \lambda \int_{-1}^{1} (\varphi' - (\pi_N^{1,0}\varphi)')(\zeta)d\zeta$$

. en utilisant d'une part la définition (2.5) de l'opérateur $\pi_N^{1,0}$ et d'autre part le fait que $\varphi - \pi_N^{1,0}\varphi$ s'annule en ± 1, on obtient

$$\int_{-1}^{1} (\varphi' - (\pi_N^{1,0}\varphi)')(\zeta)\chi_{N-1}(\zeta)d\zeta = 0$$

Comme $(\pi_N^{1,0}\varphi)'$ appartient bien à $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$, on en déduit l'identité (2.8). On a alors

$$\|\varphi - \pi_N^{1,0}\varphi\|_{H^1(\Lambda)} = \|\varphi' - \pi_{N-1}(\varphi)'\|_{L^2(\Lambda)}$$

et, en utilisant le (2.3) le Théorème (17)

$$\|\varphi' - (\pi_N^{1,0}\varphi\|_{H^1(\Lambda)} \leq c(N-1)^{-(m-1)}\|\varphi'\|_{H^{m-1}}$$

$$\leq cN^{1-m}\|\varphi\|_{H^m(\Lambda)}$$

la majoration de $\|\varphi - \pi_N^{1,0}\varphi\|_{L^2(\Lambda)}$ s'abstient grâce à la méthode classique de dualité d'Aubin-Nitsche, qui consiste à remarque que

$$\|\varphi - \pi_N^{1,0}\varphi\|_{L^2(\Lambda)} = \sup_{g \in L^2(\Lambda)} \frac{\int_{-1}^{1}(\varphi - \pi_N^{1,0}\varphi)(\zeta)g(\zeta)d\zeta}{\|g\|_{L^2(\Lambda)}} \tag{2.9}$$

$\forall g \in L^2(\Lambda)$, on note χ l'unique solution dans $H_0^1(\Lambda)$ du problème

$$\forall \psi \in H_0^1(\Lambda), \int_{-1}^{1} \chi'(\zeta)\psi'(\zeta)d\zeta = \int_{-1}^{1} g(\zeta)\psi(\zeta)d\zeta.$$

on utilise l'intégralité de poincaré-Freidrichs, en prenant $\psi(\zeta) = \chi(\zeta)$

$$1/c\int_{-1}^{1} \chi^2(\zeta)d\zeta \leq \int_{-1}^{1} \chi'^2 d\zeta = \int_{-1}^{1} g(\zeta)\chi(\zeta)d\zeta \leq \|g\|_{L^2}\|\chi\|_{L^2}$$

alors

$$\Rightarrow \|\chi\|_{L^2} \leq c\|g\|_{L^2}$$

puis ce prenant $\psi \in D(\Lambda)$, on voit que $-\chi'' = g$ en prenant $\psi = \chi''$.

$$\int_{-1}^{1} \chi''^2(\zeta) = -\int_{-1}^{1} g(\zeta)\chi''(\zeta)d\zeta$$

$$\|\chi\|_{H^2(\Lambda)}^2 \leq \|g\|_{L^2(\Lambda)}\|\chi''\|_{L^2(\Lambda)} \leq \|g\|_{L^2(\Lambda)}\|\chi\|_{H^2(\Lambda)}$$

alors :

$$\|\chi\|_{H^2(\Lambda)} \leq c\|g\|_{L^2(\Lambda)} \tag{2.10}$$

L'argument clé de méthode est le calcul de

$$\int_{-1}^{1}(\varphi - \pi_N^{1,0}(\varphi))(\zeta)g(\zeta)d\zeta = \int_{-1}^{1}(\varphi' - (\pi_N^{1,0}\varphi))(\zeta)\chi(\zeta)d\zeta$$

D'après la définition de l'opérateur $\pi_N^{1,0}$ ceci implique que pour tout χ_N de $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$:

$$\int_{-1}^{1}(\varphi-\pi_N^{1,0}\varphi)(\zeta)g(\zeta)d\zeta = \int_{-1}^{1}(\varphi^{'}-(\pi_N^{1,0}\varphi)^{'})(\zeta)(\chi^{'}-\chi_N^{'})(\zeta)d\zeta$$
$$\leq \|\varphi-\pi_N^{1,0}\varphi\|_{H^1(\Lambda)}\|\chi^{'}-\chi_N^{'}\|_{H^1(\Lambda)}$$

on choisit $\chi_N=\pi^{1,0}\chi$ et on applique l' inégalité (2.6) avec $m=2$

$$\leq cN^{-1}\|\varphi-\pi_N^{1,0}\varphi\|_{H^1(\Lambda)}\|\chi\|_{H^2(\Lambda)} \leq cN^{-1}\|\varphi-\pi_N^{1,0}\varphi\|_{H^1(\Lambda)}\|g\|_{L^2(\Lambda)}$$

on utilise la méthode classique de dualité d'Aubin-Nische

$$\|\varphi-\pi_N^{1,0}\varphi\|_{L^2(\Lambda)} \leq cN^{-1}\|\varphi-\pi_N^{1,0}\varphi\|_{H^1(\Lambda)} \leq cN^{-1}N^{1-m}\|\varphi\|_{H^m(\Lambda)}$$

alors

$$\|\varphi-\pi_N^{1,0}\varphi\|_{L^2(\Lambda)} \leq cN^{-m}\|\varphi\|_{H^m(\Lambda)}$$

on peut bien entendu être intéresse par l'approximation de fonction qui ne s'annule par en± 1 soit φ une telle fonction. L'espace $H^1(\Lambda)$ étant continu l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Lambda}$ on a en particulier

$$|\varphi(-1)|+|\varphi(1)| \leq \sup|\varphi(1)| \leq c\|\varphi\|_{H^1(\Lambda)}$$

on pose

$$\tilde{\varphi}(\zeta)=\varphi(\zeta)-\varphi(1)\frac{1-\zeta}{2}-\varphi(1)\frac{1+\zeta}{2} \tag{2.11}$$

de sorte que, d'après l'inégalité précédente, on a pour tout entier $m \geq 1$

$$\|\tilde{\varphi}\|_{H^m(\Lambda)} \leq c\|\varphi\|_{H^m(\Lambda)}. \tag{2.12}$$

De plus, la fonction $\tilde{\varphi}$ appartient à $H^m(\Lambda)$, ce qui permet de donne la définition ci-dessous.

2.1.3 Le projection $\tilde{\pi}_N$

Définition 22 *on définit l'opérateur $\tilde{\pi}_N$ dans $H^1(\Lambda)$ de la façon suivant pour tout fonction φ de $H^1(\Lambda)$*

$$(\tilde{\pi}_N^1\varphi)(\zeta)=(\pi_N^{1,0}\tilde{\varphi})(\zeta)+\varphi(-1)\frac{1-\zeta}{2}+\varphi(1)\frac{1+\zeta}{2}$$

ou la fonction $\tilde{\varphi}$ défini en (2.11).

Théorème 23 *pour tout entier $m \geq 1$, il existe une constante c positive ne dépendante que de m telle que, pour tout fonction φ de $H^m(\Lambda)$ on ait*

$$\|\varphi - \tilde{\pi}_N^1\varphi\|_{H^1(\Lambda)} + N\|\varphi - \tilde{\pi}_N^1\varphi\|_{L^2(\Lambda)} \leq cN^{1-m}\|\varphi\|_{H^m(\Lambda)} \tag{2.13}$$

Preuve. on constate que :
d'après le définition (22)

$$\varphi - \tilde{\pi}_N^1\varphi = \tilde{\varphi} - \pi_N^{1,0}\tilde{\varphi}$$

$$\|\varphi-\tilde{\pi}_N^1\varphi\|_{H^1(\Lambda)}+N\|\varphi-\tilde{\pi}_N^1\varphi\|_{L^2(\Lambda)} \leq cN^{1-m}\|\tilde{\varphi}\|_{H^m(\Lambda)}+cN^{1-m}\|\tilde{\varphi}\|_{H^m(\Lambda)} = cN^{1-m}\|\tilde{\varphi}\|_{H^m(\Lambda)}$$

alors d'après (2.12)

$$\|\varphi - \tilde{\pi}_N^1\varphi\|_{H^1(\Lambda)} + N\|\varphi - \tilde{\pi}_N^1\varphi\|_{L^2(\Lambda)} \leq cN^{1-m}\|\varphi\|_{H^m(\Lambda)}$$

■

Remarque 24 *Il faut note que l'opérateur $\tilde{\pi}_N^1$ n'est pas l'opérateur de projection orthogonale dans $H^1(\Lambda)$. Toutefois s'avère important la suit, car il possédé la propriété de conserver les valeurs aux extrémité de l'intervalle.*

Les résultats du Théorème (21) se généralisent à la projection orthogonale dans $H_0^k(\Lambda)$,ou k est un entier positif quelconque.

2.1.4 Le projection $\pi_N^{k,0}$

Notation 25 *pour tout entier positif k, on note $\pi_N^{k,0}$ l'opérateur de projection orthogonale de $H_0^k(\Lambda)$ sur $\mathbb{P}_N(\Lambda) \cap H_0^k(\Lambda)$ pour le produit scalaire associé à le norme $\|.\|_{H_0^k(\Lambda)}$.*

Théorème 26 *pour tout entier positif k et pour tout entier $m \geq k$, il existe une constante c positive ne dépendant que de k et de m telle que, pour tout fonction φ de $H^m(\Lambda) \cap H_0^k(\Lambda)$, on ait*

$$\|\varphi - \pi_N^{k,0}\|_{H^\ell(\Lambda)} \leq cN^{\ell-m}\|\varphi\|_{H^m(\Lambda)}, \quad 0 \leq \ell \leq k \tag{2.14}$$

Preuve. On va démontrer la majoration (2.13) en trois temps, suivant que $\ell = k$, $\ell = 0$, ou est $0 < \ell < k$

1) On vérifie, en utilisant la définition de $\pi_N^{k,0}$ et $\pi_{N-1}^{k-1,0}$, que

$$\|\varphi - \pi_N^{k,0}\varphi\|_{H^k(\Lambda)} \leq c\|\varphi' - \pi_{N-1}^{k-1,0}\varphi'\|_{H^{k-1}(\Lambda)}.$$

puisque $(\pi_N^{1,0}\varphi)' = \pi_{N-1}\varphi'$ alors par récurrence $(\pi_N^{k,0}\varphi)' = \pi_{N-1}^{k-1,0}\varphi'$ et puisque $\|\varphi - \pi_N^{k,0}\|_{H^1(\Lambda)} = \|\varphi' - \pi_{N-1}^{k-1,0}\varphi'\|_{L^2(\Lambda)}$ alors on a

$$\|\varphi - \pi_N^{k,0}\|_{H^k(\Lambda)} = \|\varphi' - (\pi_N^{k,0}\varphi)'\|_{H^{k-1}(\Lambda)} = \|\varphi' - \pi_{N-1}^{k-1,0}\varphi'\|_{H^{k-1}(\Lambda)}$$

alors $\|\varphi - \pi_N^{k,0}\|_{H^k(\Lambda)} \leq c\|\varphi' - \pi_{N-1}^{k-1,0}\varphi'\|_{H^{k-1}(\Lambda)}$ car $c > 0$.

A' partir de (2.6) on a $\|\varphi - \pi_N^{1,0}\|_{H^k(\Lambda)} \leq cN^{1-m}\|\varphi\|_{H^m(\Lambda)}$.

On démontre par récurrence sur k la majoration pour $\ell = k$. pour $\ell = 1$ on a (2.6) vraie on suppose que $\|\varphi - \pi_N^{k,0}\|_{H^k(\Lambda)} \leq cN^{k-m}\|\varphi\|_{H^m(\Lambda)}$ est vraie et on démontre l'inégalité pour $k+1$

$$\begin{aligned}\|\varphi - \pi_N^{k+1,0}\varphi\|_{H^{k+1}(\Lambda)} &= \|\varphi' - \pi_{N-1}^{k,0}\varphi'\|_{H^k(\Lambda)} \leq c(N-1)^{k-m}\|\varphi'\|_{H^m(\Lambda)} \\ &\leq cN^{k+1-m}\|\varphi'\|_{H^{m-1}(\Lambda)} = cN^{k-(m-1)}\|\varphi'\|_{H^{m-1}(\Lambda)} \\ &\leq cN^{k+1-m}\|\varphi\|_{H^m(\Lambda)}\end{aligned}$$

alors on démontré l'inégalité pour $k+1$

2) pour obtenir la majoration pour $\ell = 0$, on utilise de nouveau la méthode d'Aubin-Nitsche

$$\|\varphi - \pi_N^{k,0}\varphi\|_{L^2(\Lambda)} = \sup_{g \in L^2(\Lambda)} \frac{\int_{-1}^1 (\varphi - \pi_N^{1,0}\varphi)(\zeta)g(\zeta)d\zeta}{\|g\|_{L^2(\Lambda)}}$$

pour g quelconque dans $L^2(\Lambda)$, on considère la solution χ du problème

$$\forall \psi \in H_0^k(\Lambda), \int_{-1}^1 (\frac{d^k\chi}{d\zeta^k})(\zeta)(\frac{d^k\psi}{d\zeta^k})(\zeta)d\zeta = \int_{-1}^1 g(\zeta)\psi(\zeta)d\zeta \tag{2.15}$$

et on voit qu'elle vérifie

$$\|\chi\|_{H^{2k}(\Lambda)} \leq c\|g\|_{L^2(\Lambda)}. \tag{2.16}$$

puisque en prenant $\psi = \chi^{(k)}$ et on applique l'inégalité de Cauchy-Schwerz

$$\int_{-1}^1 (\frac{d^{2k}\chi}{d\zeta^{2k}})^2(\zeta)d\zeta = \int_{-1}^1 g(\zeta)\chi^{(k)}(\zeta)d\zeta \leq c\|g\|_{L^2(\Lambda)}\|\chi^{(k)}\|_{L^2(\Lambda)} = c\|g\|_{L^2(\Lambda)}\|\chi\|_{H^k(\Lambda)}$$

alors $\|\chi\|^2_{H^{2k}(\Lambda)} \leq c\|g\|_{L^2(\Lambda)}\|\chi\|_{H^k(\Lambda)}$ et puisque $H^{2k}(\Lambda) \subset H^k(\Lambda)$ alors $\|.\|_{H^k(\Lambda)} \leq c\|.\|_{H^{2k}(\Lambda)}$ d'où on obtint que

$$\|\chi\|_{H^{2k}(\Lambda)} \leq c\|g\|_{L^2(\Lambda)}$$

L'argument clé de la méthode est le calcul de

$$\int_{-1}^{1}(\varphi - \pi_N^{k,0})(\zeta)g(\zeta)d\zeta = \int_{-1}^{1}(\varphi^{(k)} - (\pi_N^{k,0}\varphi)^{(k)})\chi^{(k)}(\zeta)d\zeta$$

D'après la définition de l'opérateur $\pi_N^{k,0}$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(\varphi - \pi_N^{k,0}\varphi)(\zeta)g(\zeta)d\zeta &= \int_{-1}^{1}(\varphi^{(k)} - (\pi_N^{k,0}\varphi)^{(k)})(\zeta)(\chi^{(k)} - \chi_N^{(k)})(\zeta)d\zeta \\ &\leq \|\varphi^{(k)} - \pi_N^{k,0}\varphi\|_{H^k(\Lambda)}\|\chi - \chi_N\|_{H^k(\Lambda)}\end{aligned}$$

on choisit alors $\chi_N = \pi_N^{k,0}\chi$ et on applique la majoration (2.6) à la fonction χ avec $m = 2k$, ce qui donne.

$$\int_{-1}^{1}(\varphi - \pi_N^{k,0}\varphi)(\zeta)g(\zeta)d\zeta \leq cN^{-k}\|\varphi - \pi_N^{k,0}\varphi\|_{H^k(\Lambda)}\|\chi\|_{H^{2k}(\Lambda)}$$

alors

$$\int_{-1}^{1}(\varphi - \pi_N^{k,0}\varphi)(\zeta)g(\zeta)d\zeta \leq cN^{-k}\|\varphi - \pi_N^{k,0}\varphi\|_{H^k(\Lambda)}\|g\|_{L^2(\Lambda)}$$

d'où

$$\|\varphi - \pi_N^{k,0}\varphi\|_{L^2(\Lambda)} \leq cN^{-2k}\|\varphi\|_{H^{2k}(\Lambda)} = cN^{-m}\|\varphi\|_{H^m(\Lambda)}$$

3) Finalement, la majoration pour ℓ quelconque se déduit des majorations pour $\ell = k$ et $\ell = 0$ grâce à la formule suivante, que l'on démontre par récurrence sur k : pour tous entiers k et ℓ, $k \geq \ell$, toute fonction ψ de $H_0^k(\Lambda)$ vérifie

$$\|\psi\|_{H^\ell(\Lambda)} \leq \|\psi\|_{L^2(\Lambda)}^{1-\frac{\ell}{k}}\|\psi\|_{H^k(\Lambda)}^{\frac{\ell}{k}}.$$

par des arguments analogues à

$$(\tilde{\pi}_N^1\varphi)(\zeta) = (\pi_N^{1,0}\tilde{\varphi})(\zeta) + \varphi(-1)\frac{1-\zeta}{2} + \varphi(1)\frac{1+\zeta}{2},$$

On peut construire un opérateur $\tilde{\pi}_N^k$ de $H^k(\Lambda)$ dans tel que les inégalités suivantes soient vérifiées pour toute fonction φ de $H^m(\Lambda)$, $m \geq k$:

$$\|\varphi - \tilde{\pi}_N^k\varphi\|_{H^\ell(\Lambda)} \leq cN^{\ell-k}\|\varphi\|_{H^m(\Lambda)}, 0 \leq \ell \leq k.$$

car :

$$\varphi - \tilde{\pi}_N^k \varphi = \tilde{\varphi} - \pi_N^{1,0} \tilde{\varphi}$$

on remplace dans l'inégalité précédente on obtient que

$$\|\tilde{\varphi} - \pi_N^{k,0} \tilde{\varphi}\|_{H^\ell(\Lambda)} \leq \|\tilde{\varphi} - \pi_N^{k,0} \tilde{\varphi}\|_{L^2(\Lambda)}^{1-\frac{\ell}{k}} \|\tilde{\varphi} - \pi_N^{k,0} \tilde{\varphi}\|_{H^k(\Lambda)}^{\frac{\ell}{k}}$$

alors

$$\|\varphi - \tilde{\pi}_N^k \varphi\|_{H^l(\Lambda)} \leq (cN^{-m} \|\tilde{\varphi}\|_{H^m(\Lambda)})^{1-\frac{\ell}{k}} (N^{k-m} \|\tilde{\varphi}\|_{H^m(\Lambda)})^{\frac{\ell}{k}}$$

on d'après l'inégalité

$$\|\tilde{\varphi}\|_{H^m(\Lambda)} \leq c\|\varphi\|_{H^m(\Lambda)}$$

alors

$$\|\varphi - \tilde{\pi}_N^k \varphi\|_{H^\ell(\Lambda)} \leq cN^{\ell-m} \|\varphi\|_{H^m(\Lambda)}$$

cet opérateur les valeurs aux extrémités de l'intervalle de la fonction et de toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $k-1$. ■

2.2 Erreur d'approximation polynômiale en dimension fini quelconque

Dans ce qui suit, on note Ω l'ouvert $]-1,1[^d$, où d est un entier quelconque ≥ 2. Le but de ce paragraphe est d'établir des majorations, de la distance dans un espace $H^k(\Omega)$ d'une fonction de régularité connue à un certain espace de polynômes [7] et [6]. on présente les démonstrations uniquement dans le cas $d = 2$. On désigne par $x = (x, y)$ le point générique de Ω dans ce cas.
Les démonstrations reposent essentiellement sur les résultats de la Section (2.1), utilisés sur chaque variable avec un argument de "tensorisation". Ceci signifie que l'on va faire appel à la propriété suivante, en dimension $d = 2$ par exemple,

$$L^2(\Omega) = \{\upsilon : \Omega \to \mathbb{R}; \int_\Omega \upsilon^2(x)dx < +\infty\}$$

$$= \{\upsilon : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{R}; \int_{-1}^1 (\int_{-1}^1 \upsilon^2(x,y)dy)dx < +\infty\}$$

$$= \{\upsilon : \Lambda \to L^2(\Lambda); \int_{-1}^{1} \|\upsilon(x,.)\|^2_{L^2(\Lambda)} dx < +\infty\}$$

$$= L^2(\Lambda; L^2(\Lambda)).$$

De même façon, on voit facilement que

$$H^1(\Omega) = L^2(\Lambda; H^1(\Lambda)) \cap H^1(\Lambda; L^2(\Lambda))$$

car

$$H^1(\Omega) = \{\upsilon \in L^2(\Omega) | \frac{\partial \upsilon}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, ..., n\}$$

Mini de la norme

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega u^2 dx + \sum_{i=0}^{n} \int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2 dx$$

Alors

$$H^1(\Omega) = \{\upsilon : \Omega \to \mathbb{R},\ \int_\Omega \upsilon^2(x,y) dxdy < \infty,\ \int_\Omega (\frac{\partial \upsilon}{\partial x})^2 dxdy < \infty,\ \int_\Omega (\frac{\partial \upsilon}{\partial y})^2 dxdy < \infty\}$$

$H^1(\Omega) = \{\upsilon : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{R},$

$$\int_{-1}^{1} (\int_{-1}^{1} \upsilon^2(x,y) dy) dx < \infty,\ \int_{-1}^{1} (\int_{-1}^{1} (\frac{\partial \upsilon}{\partial x})^2 dy) dx < \infty, \int_{-1}^{1} (\int_{-1}^{1} (\frac{\partial \upsilon}{\partial y})^2 dx) dy < \infty\}$$

$H^1(\Omega) = \{\upsilon : \Lambda \times \Lambda \to L^2(\Lambda),$

$$\int_{-1}^{1} \|\upsilon(x,.)\|^2_{L^2(\Lambda)} dx < \infty, \int_{-1}^{1} \|\frac{\partial \upsilon}{\partial x}(x,.)\|^2_{L^2(\Lambda)} dx < \infty, \int_{-1}^{1} \|\frac{\partial \upsilon}{\partial y}(.,y)\|^2_{L^2(\Lambda)} dy < \infty\}$$

$H^1(\Omega) = \{\upsilon : \Lambda \times \Lambda \to L^2(\Lambda),$

$$\int_{-1}^{1} \|\upsilon(x,.)\|^2_{L^2(\Lambda)} dx < \infty, \int_{-1}^{1} |\frac{\partial \upsilon}{\partial x}(x,.)|^2_{H^1(\Lambda)} dx < \infty, \int_{-1}^{1} |\frac{\partial \upsilon}{\partial y}(.,y)|^2_{H^1(\Lambda)} dy < \infty\}$$

Alors

$$H^1(\Omega) = H^1(\Lambda; L^2(\Lambda)) \cap L^2(\Lambda; H^1(\Lambda))$$

On donne une version générale du résultat énoncé ci-dessus, qui sera de grande importante dans ce qui suit.

Lemme 7 *Pour tout entier $m \geq 0$ et pour tout entier r, $0 \leq r \leq m$, l'espace $H^m(\Omega)$ est inclus avec injection continue dans l'espace $H^r(\Lambda; H^{m-r}(\Lambda^{d-1}))$.*

Preuve. On démontre que l'espace

$$H^r(\Omega) \subset H^r(\Lambda; H^{m-r}(\Lambda^{d-1}))$$

c'est une conséquence immédiate de l'inégalité

$$\|\upsilon\|^2_{H^r(\Lambda;H^{m-r}(\Lambda))} = \int_{-1}^{1} \sum_{k=0}^{r} \|(\frac{\partial^k \upsilon}{\partial x^k})(x,.)\|^2_{H^{m-r}(\Lambda)} dx$$

la norme sur $H^r(\Lambda; H^{m-r}(\Lambda^{d-1}))$ et car

$$\|\upsilon\|_{H^{m-r}(\Omega)} = \int_{-1}^{1} \sum_{\ell=0}^{m-r} (\frac{\partial^{k+\ell} \upsilon}{\partial x^k \partial y^\ell})^2(x,y)dy)dx$$

alors

$$\begin{aligned}\|\upsilon\|^2_{H^r(\Lambda;H^{m-r}(\Lambda))} &= \int_{-1}^{1} \sum_{k=0}^{r} (\int_{-1}^{1} \sum_{\ell=0}^{m-r} (\frac{\partial^{k+\ell} \upsilon}{\partial x^k \partial y^\ell})^2(x,y)dy)dx \\ &\leq \int_{\Omega} \sum_{k+\ell=0}^{m} (\frac{\partial^{k+\ell} \upsilon}{\partial x^k \partial y^\ell})^2(x)dx = \|\upsilon\|^2_{H^m(\Omega)}.\end{aligned}$$

■

Lemme 8 *Pour tout entier $m \geq 0$, on a l'égalité*

$$H^m(\Omega) = L^2(\Lambda; H^m(\Lambda^{d-1})) \cap H^1(\Lambda; L^2(\Lambda^{d-1})). \tag{2.17}$$

Dans un premier temps, on étudie le comportement de la distance dans $L^2(\Omega)$ à l'espace $\mathbb{P}_N(\Omega)$ introduit dans la notation 3

Preuve.
le même démonstration plus haut généraliser de

$$H^1(\Omega) = L^2(\Lambda; H^1(\Lambda)) \cap H^1(\Lambda; L^2(\Lambda)).$$

On a

$$H^m(\Omega) = \{\upsilon | \upsilon \in L^2(\Omega),\ D^\alpha \upsilon \in L^2(\Omega),\ |\alpha| \leq m\}$$

ou $D^\alpha \upsilon = \dfrac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_d} \upsilon}{\partial x_1^{\alpha_1} + \ldots + \partial x_1^{\alpha_d}}$

$$H^m(\Omega) = \{\upsilon : \Lambda \times \Lambda^{d-1} \to \mathbb{R}, \quad \int_{-1}^{1} (\int_{\Lambda^{d-1}} (D^\alpha \upsilon)^2 (x_1, \ldots, x_d) dx_1 \ldots dx_{d-1}) dx_d < +\infty, \quad |\alpha| \leq m\}$$

$$H^m(\Omega) = \{\upsilon : \Lambda \to L^2(\Lambda^{d-1}), \quad \int_{-1}^{1} \|D^\alpha \upsilon\|^2_{L^2(\Lambda^{d-1})} dx_d < +\infty, \qquad |\alpha| \leq m\}$$

$$H^m(\Omega) = \{\upsilon : \Lambda \to L^2(\Lambda^{d-1}), \quad \int_{-1}^{1} \|\upsilon\|^2_{H^m(\Lambda^{d-1})} dx_d < +\infty\}$$

alors

$$H^m(\Omega) = L^2(\Lambda; H^m(\Lambda^{d-1})) \cap H^m(\Lambda; L^2(\Lambda^{d-1})).$$

■

2.2.1 Le projection Π_N

Notation 27 *On note Π_N l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(\Omega)$ sur $\mathbb{P}_N(\Omega)$. Dans ce qui suit, en dimension $d = 2$, le symbole $^{(x)}$ ou $^{(y)}$ après un opérateur monodimensionnel indiquera que l'on fait agir cet opérateur sur la variable x ou y respectivement. étant donnée une fonction υ de $L^2(\Omega)$, on a par exemple pour presque y dans Λ :*

$$\int_{-1}^{1} (\upsilon(x, y) - \pi_N^{(x)} \upsilon(x, y)) L_n(x) dx = 0, \quad 0 \leq n \leq N.$$

On applique cette formule avec υ remplacé par $\pi_N^{(y)}\upsilon$ et on en déduit, pour $0 \le m \le N$ et $0 \le n \le N$,

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}(\upsilon(x,y) - \pi_N^{(x)} \circ \pi_N^{(y)}\upsilon(x,y))L_m(x)L_n(y)dxdy \\
&= \int_{-1}^{1} L_n(y)(\int_{-1}^{1}(\upsilon(x,y) - \pi_N^{(x)} \circ \pi_N^{(y)}\upsilon(x,y))L_m(x)dx)dy \\
&= \int_{-1}^{1} L_n(y)(\int_{-1}^{1}(\upsilon(x,y) - \pi_N^{(y)}\upsilon(x,y))L_m(x)dx)dy \\
&= \int_{-1}^{1} L_m(y)(\int_{-1}^{1}(\upsilon(x,y) - \pi_N^{(y)}\upsilon(x,y))L_n(x)dy)dx = 0
\end{aligned}$$

Comme $\pi_N^{(x)} \circ \pi_N^{(y)}\upsilon$ appartient à $\mathbb{P}_N(\Omega)$ et que les $L_m(x)L_n(y)$, $0 \le m, n \le N$, forment une base de $\mathbb{P}_N(\Omega)$, voir la proposition(4) on obtient l'identité :

$$\Pi_N = \pi_N^{(x)} \circ \pi_N^{(y)}. \tag{2.18}$$

On peut aussi facilement vérifier que les opérateurs $\pi_N^{(x)}$ et $\pi_N^{(y)}$ commutent.

Théorème 28 *Pour tout entier $m \ge 0$, il existe une constante c positive ne dépendant que de m telle que, pour toute fonction υ de $H^m(\Omega)$, on ait*

$$\|\upsilon - \Pi_N\upsilon\|_{L^2(\Omega)} \le cN^{-m}\|\upsilon\|_{H^m(\Omega)} \tag{2.19}$$

Preuve. En utilisant l'identité (2.18), on voit que

$$\begin{aligned}
\|\upsilon - \Pi_N\upsilon\|_{L^2(\Omega)} &= \|\upsilon - \pi_N^{(x)} \circ \pi_N^{(y)}\upsilon\|_{L^2(\Lambda;L^2(\Lambda))} \\
&\le \|\upsilon - \pi_N^{(x)}\upsilon\|_{L^2(\Lambda;L^2(\Lambda))} + \|\pi_N^{(x)}(\upsilon - \pi_N^{(y)}\upsilon)\|_{L^2(\Lambda;L^2(\Lambda))}.
\end{aligned}$$

Pour majorer le premier terme, on applique le Théorème (17) par rapporte à la variable x :

$$\|\upsilon - \pi_N^{(x)}\upsilon\|_{L^2(\Lambda;L^2(\Lambda))} \le cN^{-m}\|\upsilon\|_{H^m(\Lambda;L^2(\Lambda))}.$$

Pour majorer le second terme, on utilise la continuité de l'opérateur π_N de l'espace $L^2(\Lambda)$ dans lui-même, puis on applique le Théorème (17) par rapport à la variable y :

$$\|\pi_N^{(x)}(\upsilon - \pi_N^{(y)}\upsilon)\|_{L^2(\Lambda;L^2(\Lambda))} \le \|\upsilon - \pi_N^{(y)}\upsilon\|_{L^2(\Lambda;L^2(\Lambda))} \le cN^{-m}\|\upsilon\|_{L^2(\Lambda;H^m(\Lambda))}.$$

On conclut en regroupant ces deux estimations et en utilisant le Lemme 2 pour $r = m$ et pour $r = 0$. Comme précédemment, on s'intéresse à l'approximation de fonction de $H_0^1(\Omega)$ par des polynômes de l'espace $\mathbb{P}_N^0(\Omega)$. ■

2.2.2 Le projection $\Pi_N^{1,0}$

Notation 29 *On note $\Pi_N^{1,0}$ L'opérateur de projection orthogonale de $H_0^1(\Omega)$ sur $\mathbb{P}_N^0(\Omega)$ pour le produit scalaire associé à la norme $|.|_{H^1(\Omega)}$.*
Les propriétés d'approximation de l'opérateur $\Pi_N^{1,0}$ vont être étudiées en deux temps.

Théorème 30 *Pour tout entier $m \geq 1$, il existe une constante c positive ne dépendant que de m telle que, pour tout fonction υ de $H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, on ait*

$$|\upsilon - \Pi_N^{1,0}\upsilon|_{H^1(\Omega)} \leq cN^{1-m}\|\upsilon\|_{H^m(\Omega)}. \tag{2.20}$$

Preuve. Le résultat étant évident pour $m = 1$, on peut supposer la fonction υ dans $H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $m \geq 2$. On a

$$|\upsilon - \Pi_N^{1,0}\upsilon|_{H^1(\Omega)} = \inf_{\upsilon_N \in \mathbb{P}_N^0(\Omega)} |\upsilon - \upsilon_N|_{H^m(\Omega)},$$

il suffit donc de trouve un polynôme υ_N de $\mathbb{P}_N^0(\Omega)$ tel que

$$|\upsilon - \upsilon_N|_{H^m(\Omega)} \leq cN^{1-m}\|\upsilon\|_{H^m(\Omega)}. \tag{2.21}$$

D'après (7), la fonction υ appartient à $H^1(\Lambda; H^1(\Lambda))$ et même, puisqu'elle s'annule sur $\partial\Omega$, à $H_0^1(\Lambda; H_0^1(\Lambda))$. On choisit alors $\upsilon_N = \pi_N^{1,0(x)} \circ \pi_N^{1,0(y)}\upsilon$, qui appartient bien sur à $\mathbb{P}_N^0(\Omega)$. Comme on a

$$|\upsilon - \upsilon_N|^2_{H^1(\Omega)} = \|(\frac{\partial}{\partial x})(\upsilon - \upsilon_N)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|(\frac{\partial}{\partial y})(\upsilon - \upsilon_N)\|^2_{L^2(\Omega)},$$

et puisque la définition de υ_N est symétrique en x et en y, il suffit de majorer par exemple $\|(\frac{\partial}{\partial x})(\upsilon - \upsilon_N)\|_{L^2(\Omega)}$. On fait appel pour cela à l'inégalité triangulaire

$$\|(\frac{\partial}{\partial x})(\upsilon - \upsilon_N)\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \|(\frac{\partial}{\partial x})(v - \pi_N^{1,0(x)} v)\|_{L^2(\Lambda;L^2(\Lambda))} + \|(\frac{\partial}{\partial x})\pi_N^{1,0(x)}(v - \pi_N^{1,0(y)} v)\|_{L^2(\Lambda;L^2(\Lambda))}$$

On utilise alors la majoration (2.6) par rapport à la variable x dans le premier terme, et la continuité de l'opérateur $\pi_N^{1,0}$ de $H_0^1(\Lambda)$ dans lui-même dans le second terme. On obtient

$$\|(\frac{\partial}{\partial x})(v - v_N)\|_{L^2(\Omega)} \leq cN^{1-m}\|v\|_{H^m(\Lambda;L^2(\Lambda))} + \|(\frac{\partial}{\partial x})(v - \pi_N^{1,0(y)} v)\|_{L^2(\Lambda;L^2(\Lambda))}.$$

Comme l'opérateur $\pi_N^{1,0(y)}$ commute avec la dérivation en x, ceci s'écrit

$$\|(\frac{\partial}{\partial x})(v - v_N)\|_{L^2(\Omega)} \leq cN^{1-m}\|v\|_{H^m(\Lambda;L^2(\Lambda))} + \|\frac{\partial v}{\partial x} - \pi_N^{1,0(y)}\frac{\partial v}{\partial x}\|_{L^2(\Lambda;L^2(\Lambda))},$$

et on utilise la majoration (2.7) par rapport à la variable y

$$\|(\frac{\partial}{\partial x})(v - v_N)\|_{L^2(\Omega)} \leq cN^{1-m}\|v\|_{H^m(\Lambda;L^2(\Lambda))} + cN^{1-m}\|\frac{\partial v}{\partial x}\|_{L^2(\Lambda;L^2(\Lambda))}$$

alors la conclusion

$$\|(\frac{\partial}{\partial x})(v - v_N)\|_{L^2(\Omega)} \leq cN^{1-m}\|v\|_{H^m(\Omega)}.$$

■

Théorème 31 *Pour tout entier $m \geq 1$, il existe une constante c positive ne dépendant que de m telle que, pour toute fonction v de $H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, on ait*

$$\|v - \Pi_N^{1,0} v\|_{L^2(\Omega)} \leq cN^{-m}\|v\|_{H^m(\Omega)}. \tag{2.22}$$

Preuve. La encore, on utilise la méthode de dualité d'Aubin-Nitsche, grâce à l'égalité :

$$\|v - \Pi_N^{1,0} v\|_{L^2(\Omega)} = \sup_{g \in L^2(\Omega)} \frac{\int_\Omega (v - \Pi_N^{1,0} v)(x) g(x) dx}{\|g\|_{L^2(\Omega)}}. \tag{2.23}$$

Pour toute fonction g de $L^2(\Omega)$, on considère la solution w dans $H_0^1(\Omega)$ du problème

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega (gradw)(x).(gradv)(x)dx = \int_\Omega g(x)v(x)dx$$

Puisque Ω est un ouvert convexe, on peut démontrer que la fonction w appartient en fait à $H^2(\Omega)$ et vérifie

$$\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|g\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.24}$$

Grâce à la définition de l'opérateur $\Pi_N^{1,0}$, on a

$$\int_\Omega (\upsilon - \Pi_N^{1,0}\upsilon)(x)g(x)dx = \int_\Omega (grad(\upsilon - \Pi_N^{1,0}\upsilon))(x).(gradw)(x)dx$$

$$= \int_\Omega (grad(\upsilon - \Pi_N^{1,0}\upsilon))(x).(grad(w - \Pi_N^{1,0}w))(x)dx$$

$$\leq |\upsilon - \Pi_N^{1,0}\upsilon|_{H^1(\Omega)}|w - \Pi_N^{1,0}w|_{H^1(\Omega)}.$$

On utilise

$$\int_\Omega (\upsilon - \Pi_N^{1,0}\upsilon)(x)g(x)dx \leq cN^{-1}|\upsilon - \Pi_N^{1,0}\upsilon|_{H^1(\Omega)}\|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

La formule (2.7) et le Théorème (30) permettent alors de conclure. Pour étudier l'approximation des fonctions de $H^1(\Omega)$, on utilise ici un opérateur de projection orthogonale. ■

2.2.3 Le projection $\Pi_N^{k,0}$

Notation 32 *Pour tout entier positif k, on note $\Pi_N^{k,0}$ l'opérateur de projection orthogonale de $H_0^k(\Omega)$ sur $\mathbb{P}_N(\Omega) \cap H_0^k(\Omega)$ pour le produit scalaire associé à la norme $|.|_{H^k(\Omega)}$.*

Théorème 33 *Pour toute entier positif k et pour tout entier $m \geq k$, il existe une constante c positive ne dépendant que de k et m telle que, pour toute fonction υ de $H^m(\Omega) \cap H_0^k(\Omega)$, on ait*

$$|\upsilon - \Pi_N^{k,0}\upsilon|_{H^k(\Omega)} \leq cN^{k-m}\|\upsilon\|_{H^m(\Omega)}. \tag{2.25}$$

Lemme 9 *Soit deux entiers r et s, $r \leq s$. Étant donnés un ouvert borné θ à frontière lipschitzienne et un espace de Banach E, on considère une application linéaire continue de $H^r(\theta)$ dans E, de norme α, et de $H^s(\theta)$ dans E, de norme β. Alors, pour tout entier t, $r \leq t \leq s$, elle est linéaire continue de $H^t(\theta)$ dans E de norme $\leq \alpha^{\frac{s-t}{s-r}}\beta^{\frac{t-r}{s-r}}$. Ce résultat est encore vrai avec les espaces $H^r(\theta)$, $H^s(\theta)$ et $H^t(\theta)$ remplacés par leurs intersections respectives avec l'espace $H_0^k(\theta)$, pour tout entier k positif $\leq r$.*

Preuve.
Définitin : Soient X et Y deux espaces de Banach formant un couple d'interpolation, et soit E un espace intermédiaire entre X et Y. On dit que E est un espace d'interpolation entre X et Y si tout application linéaire de $X+Y$ dans $X+Y$, continue de X dans X et de Y dans Y, automatiquement continue de E dans E. En d'autres termes, pour tout application linéaire

$$L : X+Y \to X+Y,\ \|L\|_{X\to X} < \infty,\ \|L\|_{Y\to Y} < \infty \Longrightarrow \|L\|_{E\to E} < \infty.$$

utilisé la notation

$$\|L\|_{A\to B} = \sup_{\|x\|_A \leq 1} \|Lx\|_B.$$

On a

$$r \leq t \leq s \Longrightarrow H^s(\theta) \subset H^t(\theta) \subset H^r(\theta)$$

et u application linéaire continue de

$$H^s(\theta) \to E,\ \ \|u\| = \alpha$$

application linéaire continue de

$$H^r(\theta) \to E,\quad \|u\| = \beta.$$

D'après la définition u est continue de $H^t(\theta) \to E$ si

$$\|u\|_{H^s(\theta)\to E} < \infty \ \ et\ \ \|u\|_{H^r(\theta)\to E} < \infty \Longrightarrow \|u\|_{H^t(\theta)\to E} < \infty.$$

On a $H^s(\theta)$ et $H^r(\theta)$ couple d'interpolation dans E.
puisque

$$\|u\|_{H^t(\theta)\to E} = \sup_{\|x\|_{H^t(\theta)} \leq 1} \|u(x)\|_E \leq \alpha^{\frac{s-t}{s-r}} \beta^{\frac{t-r}{s-r}}.$$

■

Démonstration du théorème : On suppose d'abord $m \geq 2k$, de sorte qu'une fonction υ de $H^m(\Omega) \cap H_0^k(\Omega)$ appartient à $H_0^k(\Lambda; H_0^k(\Lambda))$. Par définition de l'opérateur $\Pi_N^{k,0}$, on a alors :

$$|\upsilon - \Pi_N^{k,0}\upsilon|_{H^k(\Omega)} \leq |\upsilon - \pi_N^{k,0(x)} \circ \pi_N^{k,0(y)}\upsilon|_{H^k(\Omega)}.$$

Il faut maintenant majorer $\|(\frac{\partial^k}{\partial x^\ell \partial y^{k-\ell}})(\upsilon - \pi_N^{k,0(x)} \circ \pi_N^{k,0(y)} \upsilon)\|_{L^2(\Omega)}$, ce qu'on fait en appliquant l'inégalité triangulaire à la somme

$$\upsilon - \pi_N^{k,0(x)} \circ \pi_N^{k,0(y)} \upsilon = (\upsilon - \pi_N^{k,0(x)} \upsilon) + (\upsilon - \pi_N^{k,0(y)} \upsilon) - ((id - \pi_N^{k,0(x)} \upsilon) \circ (id - \pi_N^{k,0(y)})\upsilon),$$

puisque

$$\begin{aligned}((id - \pi_N^{k,0(x)}) \circ (id - \pi_N^{k,0(y)})\upsilon) &= (id - (id - \pi_N^{k,0(x)})(id - \pi_N^{k,0(y)})\upsilon) \\ &= id((id - \pi_N^{k,0(y)} \upsilon) - \pi_N^{k,0(x)}(id - \pi_N^{k,0(y)})\upsilon \\ &\upsilon - \pi_N^{k,0(y)} \upsilon - \pi_N^{k,0(x)} \upsilon - \pi_N^{k,0(x)} \circ \pi_N^{k,0(y)} \upsilon\end{aligned}$$

alors

$$(\upsilon - \pi_N^{k,0(x)} \upsilon) + (\upsilon - \pi_N^{k,0(y)} \upsilon) - ((id - \pi_N^{k,0(x)}) \circ (id - \pi_N^{k,0(y)})\upsilon) = \upsilon - \pi_N^{k,0(x)} \circ \pi_N^{k,0(y)} \upsilon$$

Maintenant en utilisant l'estimation de Théorème (9) pour toute fonction υ de $H^m(\Omega) \cap H_0^k(\Omega)$, on ait

$$|\upsilon - \Pi_N^{k,0} \upsilon|_{H^\ell(\Omega)} \leq cN^{\ell-m} \|\upsilon\|_{H^m(\Omega)} \quad , 0 \leq \ell \leq k$$

en utilisant 4 fois le précédent estimation : par rapport à la variable x pour le premier terme, par rapport à la variables y pour le second et successivement par rapport aux deux variable pour le troisième.
On a

$$\begin{aligned}|\upsilon - \pi_N^{k,0(x)} \circ \pi_N^{k,0(y)} \upsilon|_{H^\ell}(\Lambda) &\leq cN^{\ell-m}\|\upsilon\|_{H^m(\Lambda)} + cN^{\ell-m}\|\upsilon\|_{H^m(\Lambda)} + cN^{\ell-m}\|\upsilon - \pi_N^{k,0(y)}\upsilon\|_{H^m(\Lambda)} \\ &\leq cN^{\ell-m}\|\upsilon\|_{H^m(\Lambda)} + cN^{2\ell-2m}\|\upsilon\|_{H^m(\Lambda)} \leq cN^{\ell-m}\end{aligned}$$

en utilisant le lemme (7) contient l'estimation

$$\|\upsilon\|^2_{H^r(\Lambda; H^{m-r}(\Lambda))} \leq \|\upsilon\|^2_{H^m(\Lambda)}$$

on obtient que

$$|\upsilon - \pi_N^{k,0(x)} \circ \pi_N^{k,0(y)} \upsilon|_{H^k}(\Lambda) \leq cN^{k-m}\|\upsilon\|_{H^m(\Lambda)}.$$

Le résultat étant évident pour m égal à k, il reste à vérifier les cas intermédiaires $k < m < 2k$, ce qui se fait par l'intermédiaire du Lemme (9) : en effet, on a prouvé que l'application $id - \Pi_N^{k,0}$ est linéaire continue de $H_0^k(\Omega)$ dans lui-même de norme 1 car en utilisant l'estimation du Théorème (26) et le Lemme (9) sur $id - \pi_N^{k,0}$ on obtient $id - \pi_N^{k,0}$ est linéaire continue de $H^{2k}(\Omega) \cap H_0^k(\Omega)$ dans $H_0^k(\Omega)$ de norme $\leq cN^{-k}$. Si m est compris entre k et $2k$, elle est donc linéaire continue de $H^m(\Omega) \cap H_0^k(\Omega)$ dans $H_0^k(\Omega)$.

$$|\upsilon - \pi_N^{k,0(x)} \circ \pi_N^{k,0(y)} \upsilon|_{H^\ell}(\Lambda) \leq cN^{\ell-m} \|\upsilon - \pi_N^{k,0(y)} \upsilon\|_{H^m(\Lambda)} \leq cN^{\ell-m} \|\upsilon\|_{H^m(\Lambda)}$$

en utilisant le Lemme (7) on obtient que

$$|\upsilon - \pi_N^{k,0(x)} \circ \pi_N^{k,0(y)} \upsilon|_{H^k(\Omega)} \leq cN^{k-m} \|\upsilon\|_{H^m(\Omega)}.$$

On applique le Lemme (9) on obtient que $id - \pi_N^{k,0}$ est linéaire continue de $H^m(\Omega) \cap H_0^k(\Omega)$ dans $H_0^k(\Omega)$, de norme $\leq (cN^{-k})^{\frac{m-k}{k}} \leq c' N^{k-m}$

Théorème 34 *En dimension $d = 2$, pour tout entier $m \geq 2$, il existe une constante c positive ne dépendant que de m telle que, pour toute fonction υ de $H^m(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, on ait*

$$\|\upsilon - \Pi_N^{2,0} \upsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq cN^{-m} \|\upsilon\|_{H^m(\Omega)}. \tag{2.26}$$

Preuve.
Lorsque $k = 2$ et en dimension $d = 2$, on peut encore démontrer, sous les hypothèses du Théorème (33), la majoration de $\upsilon - \Pi_N^{2,0}\upsilon$ dans le norme de $L^2(\Omega)$. En effet, la méthode de dualité requiert dans ce cas la continuité de $L^2(\Omega)$ dans $H^4(\Omega)$ de l'application : $g \to w$, ou w est la solution dans $H_0^2(\Omega)$ du problème

$$\forall \upsilon \in H_0^2(\Omega), \ \int_\Omega (\Delta w)(x)(\Delta \upsilon)(x)dx = \int_\Omega g(x)\upsilon(x)dx$$

que l'on sait démontrer dans un carré voir Remarque :
les propriétés de régularité de la solution du problème

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{dans } \theta \\ u = \partial_n u = 0 & \text{sur } \partial\theta \end{cases} \tag{2.27}$$

sont plus compliqués à établir que pour la solution de l'équation de Laplace. ce pendant, dans le cas bi-dimensionnel $d = 2$, on peut prouver que l'application : $f \to u$, ou u est la solution du problème (2.27), est continue de $H^{k-4}(\theta)$ dans $H^k(\theta)$ pour $k = 3$ lorsque θ est ouvert convexe et pour $k = 4$ lorsque θ est un rectangle, plus généralement lorsque θ est un polygone de plus grand angle $\leq 0.7\pi$.

■

2.2.4 Le projection Π_N^1

Notation 35 *On note Π_N^1 l'opérateur de projection orthogonale de $H^1(\Omega)$ sur $\mathbb{P}_N(\Omega)$ pour le produit scalaire associé à la norme $\|.\|_{H^1(\Omega)}$. Cette définition de Π_N^1 s'écrit de la façon équivalente suivante : pour toute fonction υ de $H^1(\Omega)$, $\Pi_N^1\upsilon$ appartient à $\mathbb{P}_N(\Omega)$ et vérifie $\forall w_N \in \mathbb{P}_N(\Omega)$,*

$$\int_\Omega (grad(\upsilon - \Pi_N^1\upsilon))(x).(grad w_N)(x)dx + \int_\Omega (\upsilon - \Pi_N^1\upsilon)(x)w_N(x)dx = 0 \tag{2.28}$$

Théorème 36 *Pour toute entier $m \geq 1$, il existe une constante c positive ne dépendant que de m telle que, pour toute fonction υ de $H^m(\Omega)$, on ait*

$$|\upsilon - \Pi_N^1\upsilon|_{H^1(\Omega)} \leq cN^{1-m}\|\upsilon\|_{H^m(\Omega)}, \tag{2.29}$$

et

$$\|\upsilon - \Pi_N^1\upsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq cN^{-m}\|\upsilon\|_{H^m(\Omega)}. \tag{2.30}$$

Preuve. On prouve les deux majorations successivement.
1) Comme pour le Théorème (30), on peut supposer $m \geq 2$, et on a

$$\|\upsilon - \Pi_N^1\upsilon\|_{H^1(\Omega)} = \inf_{\upsilon_N \in \mathbb{P}_N(\Omega)} \|\upsilon - \upsilon_N\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\upsilon - \tilde{\pi}_N^{1(x)} \circ \tilde{\pi}_N^{1(y)}\upsilon\|_{H^1(\Omega)}.$$

On est donc ramené à étudier les trios termes

$$\|\upsilon - \tilde{\pi}_N^{1(x)} \circ \tilde{\pi}_N^{1(y)}\upsilon\|_{L^2(\Omega)}, \|(\frac{\partial}{\partial x})(\upsilon - \tilde{\pi}_N^{1(x)} \circ \tilde{\pi}_N^{1(y)}\upsilon)\|_{L^2(\Omega)} \ \ et \ \ \|(\frac{\partial}{\partial y})(\upsilon - \tilde{\pi}_N^{1(x)} \circ \tilde{\pi}_N^{1(y)}\upsilon)\|_{L^2(\Omega)}.$$

La majoration du second et du troisième terme s'effectue exactement comme dans la démonstration du Théorème (30),en utilisant (2.14) au lieu (2.6)et (2.7). Pour le premier on écrit l'inégalité triangulaire :

$$\|\upsilon - \tilde{\pi}_N^{1(x)} \circ \tilde{\pi}_N^{1(y)}\upsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\upsilon - \tilde{\pi}_N^{1(x)}\upsilon\|_{L^2(\Lambda;L^2(\Lambda))} + \|\upsilon - \tilde{\pi}_N^{1(y)}\upsilon\|_{L^2(\Lambda;L^2(\Lambda))}$$
$$+\|(id - \tilde{\pi}_N^{1(x)}) \circ (id - \tilde{\pi}_N^{1(y)})\upsilon\|_{L^2(\Lambda;L^2(\Lambda))}$$

Puis on fait appel à la majoration (2.14) :
$\|v - \tilde{\pi}_N^{1(x)} \circ \tilde{\pi}_N^{1(y)} v\|_{L^2(\Omega)}$

$$\leq c(N^{-m}\|v\|_{H^m(\Lambda;L^2(\Lambda))} + N^{-m}\|v\|_{L^2(\Lambda;H^m(\Lambda))} + N^{-1}\|v - \tilde{\pi}_N^{1(y)} v\|_{H^1(\Lambda;L^2(\Lambda))})$$

$$\leq c(N^{-m}\|v\|_{H^m(\Lambda;L^2(\Lambda))} + N^{-m}\|v\|_{L^2(\Lambda;H^m(\Lambda))} + N^{-m}\|v\|_{H^1(\Lambda;H^{m-1}(\Lambda))}),$$

et on conclut grâce au Lemme(7)
2) Pour obtenir la majoration (2.26), on utilise l'argument de dualité :

$$\|v - \Pi_N^1 v\|_{L^2(\Omega)} = \sup_{g \in L^2(\Omega)} \frac{\int_\Omega (v - \Pi_N^1 v)(x) g(x) dx}{\|g\|_{L^2(\Omega)}},$$

et on considère, pour tout g dans $L^2(\Omega)$, la solution w dans $H^1(\Omega)$ du problème :

$$\forall v \in H^1(\Omega), \int_\Omega (gradw)(x).(gradv)(x)dx + \int_\Omega w(x)v(x)dx = \int g(x)v(x)dx$$

La définition de l'opérateur Π_N^1 entraine alors

$$\int_\Omega (v - \Pi_N^1 v)(x) g(x) dx = \int_\Omega (grad(v - \Pi_N^1 v))(x).(grad(w - \Pi_N^1 w))(x)dx$$

$$+ \int_\Omega (v - \Pi_N^1 v)(x)(w - \Pi_N^1 w)(x)dx,$$

et la continuité de l'application : $g \longmapsto w$ de $L^2(\Omega)$ dans $H^2(\Omega)$ mène à l'estimation désirée. On termine cette étude par un résultat d'approximation dans $H_0^k(\Omega)$ (qui est essentiellement utilisé pour k égal à 2). ■

Théorème 37 *Pour tout entier positif k, on peut également considérer l'opérateur de projection orthogonale Π_N^k de $H^k(\Omega)$ sur $\mathbb{P}_N(\Omega)$ et prouver le résultat suivant : pour tout entier $m \geq k$, il existe une constante c positive ne dépendant que de k et m telle que, pour toute fonction v de $H^m(\Omega)$, on ait*

$$\|v - \Pi_N^k v\|_{H^k(\Omega)} \leq c N^{k-m} \|v\|_{H^m(\Omega)}. \tag{2.31}$$

Preuve. pour tout entier k, on peut également considère l'opérateur de projection orthogonale π_N^k de $H^k(\Omega)$ sur $\mathbb{P}_N(\Omega)$ et prouve le résultat suivant :
pour tout entier $m \geq k$, il existe un constante c positive ne dépendant que de k et m telle que, $\forall \upsilon \in H^m(\Omega)$, on ait

$$\|\upsilon - \Pi_N^k \upsilon\|_{H^k(\Omega)} \leq cN^{k-m} \|\upsilon\|_{H^m(\Omega)}.$$

On peut bien entendu être intéressé par l'approximation dans $H^k(\Omega)$ de fonction qui ne s'annulent pas en $\partial\Omega$.
De plus la fonction $\tilde{\upsilon} \in H_0^k(\Omega)$, $\|\tilde{\upsilon}\|_{H^k(\Omega)} \leq c\|\upsilon\|_{H^k(\Omega)}$
On peut définir l'opérateur π_N^k sur $H^k(\Omega)$ de manière que on constate alors l'identité :

$$\upsilon - \pi_N^k \upsilon = \tilde{\upsilon} - \pi_N^{k,0} \tilde{\upsilon}$$

de sorte que le majoration $\upsilon - \Pi_N^k \upsilon\|_{H^k(\Omega)} \leq cN^{k-m} \|\upsilon\|_{H^m(\Omega)}$
est une conséquence immédiate de Théorème (34). ■

Conclusion

A la fin de notre travail, on résulte que soit dans l'erreur d'approximation polynômiale en un dimension, soit en dimension quelconque notre problème est l'approximation d'erreur optimal. Ce dernier est étudiée en un dimension au moyen de la projection orthogonale π_N dans l'espace $L^2(\Lambda)$ sur $\mathbb{P}_N(\Lambda)$, on a montré la majoration de $\|\varphi - \pi_N\varphi\|_{L^2(\Lambda)}$ à partir d'estimation apriori [4] et dans la projection orthogonale $\pi_N^{k,0}$ dans l'espace $H_0^k(\Lambda)$ sur $\mathbb{P}_N(\Lambda) \cap H_0^k(\Lambda)$, on a montré la majoration de $\|\varphi - \pi_N^{k,0}\varphi\|_{H^\ell(\Lambda)}$.
Pour la dimension quelconque , on a définit Π_N l'opérateur de la projection orthogonale de $L^2(\Omega)$ sur $\mathbb{P}_N(\Omega)$, on a montré la majoration $\|\upsilon - \Pi_N\upsilon\|_{L^2(\Omega)}$ l'estimation apriori [5] et l'opérateur de la projection orthogonale $\Pi_N^{k,0}$ de $H_0^k(\Omega)$ sur $\mathbb{P}_N(\Omega) \cap H_0^k(\Omega)$, on a montré la majoration de $\|\upsilon - \Pi_N^{k,0}\upsilon\|_{H^k(\Omega)}$.
On conclut en présentant un résultat de relèvement de trace polynomiale, donc l'étude d'erreur d'approximation polynomiale est pour but d'utilisation de la discrétisation spectrale[4].

Bibliographie

[1] R.A. ADAMS- Sobolev Spaces, Academic Press, New-York, San Francisco, London (1975).

[2] M. AZAIEZ, M. DAUGE et Y. MADAY- Méthodes Spectrales et des éléments Spectraux, Université Paul Sabatier F-31062 Toulouse Cedex, France (1993).

[3] C. Bernardi et Y. Maday-Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques, Mathématiques et Applications 10, SMAI, Springer-Verlag, Paris (1992).

[4] C. Bernardi et Y. Maday-Approximations variationnelles de problème aux limites elliptique, anales de l'institul Fourier, (1964).

[5] C. Bernardi, Y. Maday et F.Rapeti-Discrétisations variationnelles de problème aux limites elliptique, Mathématiques et Applications 45, Springer, Paris(2004).

[6] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni and T.A. Zang-Spectral Methods in Fluid Dynamics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1987).

[7] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni and T.A. Zang-Spectral Methods in Fluid Dynamics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1987).

ملــــخص :

في هذاالعمل قمنا بدراسة تقريب خطأ كثيرات الحدود الذي يقوم على أساس الزيادة في انتظام دالة من مسافة معينة في فضاء كثيرات الحدود،ويتم احتساب هذه المسافة باستخدام الإسقاط العمودي على مساحة من كثيرات الحـدود [5] و [6].وقد أجريت هذه الدراسة لأول مـرة فـــي المجالات]-1,1[=Λ، ثـم فــي المجـــــالات ($]-1,1[)^d$=Λ، حيث d هوعدد صحيح ≥ 2.

الكلــــمات المفتاحية: كثيرات الحــدود Legendre، مساحات منفصلة ، كثــيرات الحـــدود المتعامدة.

Résumé:

Dans ce travail nous avons étudié l'erreur d'approximation polynomiale qui se base sur la majoration de la distance de fonction de régularité donnée dans l'espace de polynômes, cette distance est calculée au moyen de la projection orthogonale sur l'espace de polynômes et a été initialement estimée dans [5] et [6]. L'étude s'effectue d'abord sur l'intervalle Λ=]-1,1[, puis sur des domaines du type Λ =($]-1,1[)^d$ où d est un entier quelconque ≤2.

Mots clés: polynôme de Legendre, espaces discrets, polynôme orthogonaux.

Abstract:

In this work we studied the error polynomial approximation which is based on the increase of the regularity of a function of distance given in the polynomial space, this distance is calculated using the orthogonal projection onto the space of polynomials and was initially estimated in [5] and [6]. The study was first carried out in the interval Λ=]-1,1[, then like domains Λ=($]-1,1[)^d$ where d is any integer ≤2.

Key words: Legendre polynomials, discret espaces, orthogonal polynomial.

ملـــخص :

في هذا العمل قمنا بدراسة تقريب خطأ كثيرات الحدود الذي يقوم على أساس الزيادة في انتظام دالة من مسافة معينة في فضاء كثيرات الحدود، ويتم احتساب هذه المسافة باستخدام الإسقاط العمودي على مساحة من كثيرات الحـدود [5] و [6]. وقد أجريت هذه الدراسة لأول مـرة فـــي المجالات$]-1,1[$= ٨ ، ثـم فـــي المجـــــالات $(]-1,1[)^d$ =٨، حيث d هو عدد صحيح ≥2 .

الكلـــمات المفتاحية : كثيرات الحــدود Legendre، مساحات منفصلة ، كثـيرات الحـــدود المتعامدة.

Résumé

Dans ce travail nous avons étudié l'erreur d'approximation polynomiale qui se base sur la majoration de la distance de fonction de régularité donnée dans l'espace de polynômes, cette distance est calculée au moyen de la projection orthogonale sur l'espace de polynômes et a été initialement estimée dans [5] et [6]. L'étude s'effectue d'abord sur l'intervalle $\Lambda=]-1,1[$, puis sur des domaines du type $\Lambda=(]-1,1[)^d$ où d est un entier quelconque ≤2.

Mots clés : polynômes de Legendre, espaces discrets, polynôme orthogonaux.

Abstract:

In this work we studied the error polynomial approximation which is based on the increase of the regularity of a function of distance given in the polynomial space, this distance is calculated using the orthogonal projection onto the space of polynomials and was initially estimated in [5] and [6]. The study was first carried out in the interval $\Lambda=]-1,1[$, then like domains $\Lambda=(]-1,1[)^d$ where d is any integer ≤2.

Keywords: Legendre polynomials, discrete spaces, orthogonal polynomial.