UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des mathématiques et sciences de la matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de Master Académique

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse

Par : Bekhouche Rania

Thème

Étude Des Solutions Périodiques Approches D'un Système Parabolique De Réaction Diffusion

Version de : 03/06/2015

Devant le jury composé de :

Dr. ASILA . Mustafa	M. A. UKMO université-Ouargla	Président
Dr. GUERFI . Amara	M. A. UKMO université-Ouargla	Examinateur
Dr. SAID . Mohamed .Said	M. A. UKMO université-Ouargla	Rapporteur

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à ma chère mère,
A mon cher père qui m'ont toujours soutenu,
Qui m'ont aide à affronter les difficultés,
A tous mes enseignants pour leurs utiles conseils, leurs patience, leur persévérance.
A mes très chères soeurs et mon frère.
A toute ma famille.
A tous les amis.
A tous les étudiants d'université de KASDI Merbah - Ouargla.
A tous.

Remerciements

En premier lieu , je tient à témoigner ma reconnaissance à dieu tout puissant , de m'avoir donnée la possibilité de terminer ce travail .

Je tient à exprimer mon profond respect , et de reconnaissance à mon encadreur de mémoire , **Docteur : SAID Mohamed Said** , pour ces conseils , et son encouragement durant la période de la préparation et la rédaction de ce mémoire .

Je remercier sincèrement les membres du jury :

⋆ **Docteur : ACILA Mustafa** , d'avoir accepté la présidence du jury .

Aussi je remercier vivement , mon professeur :

⋆ **Docteur : GUERFI Amara** d'avoir accepté l'examinateur de ce travail . *Je les remercier énormément pour l'attention qu'ils ont accordé à ce travail .*

Il est important pour moi de remercier ma famille : mon père , ma mère , mon frère et mes soeurs , qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragement .

Il est important pour moi de remercier tous mes enseignants d'université de KASDI Merbah - Ouargla .

Un grand merci à mes collègues pour le soutien qui m'ont donnés .

Merci à tous ceux qui ont contribué , de prés ou de loin , à l'aboutissement de ce travail .

Notations

- $\mathbb{R}$: corps des réels .
- $[0,T]$: l'intervalle fermé $0 \leqslant t \leqslant T$.
- Ω : un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
- Γ : la frontière topologique de Ω .
- Σ : la frontière laterele de $\Omega \times]0,T[$.
- D_f : domaine de définition de f .
- $\|.\|$ la norme associée aux produits scalaires .
- $D(\Omega)$: désigne l'espace des fonctions de classe c^{∞} à support compact dans Ω .
- $L^{\infty}(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} mesurable ; sup|u(t)| < +\infty$.
- $f \in L_{loc}(\Omega)$: pour tout compact $k \subset \Omega, \quad f \in L^1(k)$.
- $L^2(\Omega)$: l'espace des fonctions carré intégrable pour la mesure de Lebesgue dx .
- L^p : l'espace des fonctions de puissance $p-ime$ intégrable pour la mesure de Lebesgue dx.
- $H^1(\Omega)$: l'espace de Sobolev d'ordre 1 .
- $H^2(\Omega)$: l'espace de Sobolev d'ordre 2 .
- $\|x\|$: la norme de x .

- E' : le dual topologique de E .
- $\langle , \rangle_{E'\times E}$: le crochet de dualité entre l'espace E et son dual topologique .
- $\omega^{1,p}$: l'espace de Sobolev , $1 \leqslant p \leqslant \infty$.
- $\omega^{1,2} = H^1(\Omega)$: espace de Sobolev .
- $\sigma(E, E')$: la topologie faible définie sur E .
- $\sigma(E', E)$: la topologie faible* définie sur E' .
- $L^p(0,T,X) = \{f : (0,T) \rightarrow x; mesurable : \int_0^T \|f\|_x^p < \infty\}$.

Table des matières

Introduction

Il existe un grand nombre de façons de résoudre une équation différentielle , et aucune méthode n'est clairement supérieure à toutes les autres dans toutes les circonstances . On trouve les équations différentielles un peu partout :
en physique (ex : pendule , equation de la chaleur , les ondes ,.....) ; en chimie (ex : cinétique chimique ,..........) ; en biologie (dynamique de populations ,.....) ; en économie (dynamique de croissance exponentielle ,.........) . à la fin du XIXe siècle le mathématicien H.A.Schwarz a développée la première méthode de décomposition , dans le but de résoudre le problème de Poisson dans un domaine complexe .

Nous allons donner dans ce mémoire un aperçu sur une méthode plus importante pour la résolution des problèmes paraboliques approches de réactions - diffusion qui jouent un grand rôle en analyse numérique .
Cette méthode est "la méthode de décomposition" :
L'objectif principal des méthodes de décomposition , et de retrouver des solutions aux problèmes issus des équations aux dérivées partielles .ce type de méthode à été introduit par Temam puis Lions [3] comme est décrit dans [5] le principe est assez simple :
On transforme un problème de grande taille en une suite de sous problème découplés , de tailles plus petites , qui peuvent être résolus en parallèle . Elle facilitent l'usage des schémas numériques (élément finis , différences finies , ...) pour chaque sous problème .
On présente ici le problème parabolique de réaction-diffusion avec des coefficient périodique :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x)\dfrac{\partial u}{\partial x} = f \quad \text{dans}\Sigma = \Omega \times]0, T[\\ u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R} \quad \text{(condition initialle)} \\ u(x,t) = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma = \partial\Omega \quad \text{(condition aux limite)} \end{cases} \tag{1}$$

mais on va commencer par le problème de réaction diffusion avec des coefficient constante. Dans notre travail , nous allons étudier l'existence et l'unicité de la solution périodique de réaction diffusion (1) , et ceci par la méthode de décomposition .

Cette méthode est basée sur les étapes suivantes :

1/ On décompose le problème initial en deux sous problèmes adjacents .

2/ On applique une semi discrétisation en temps des deux sous problème .

3/ On récupère une suite de solution périodiques approches du problème initial .

4/ On met en évidence des estimations à priori , enfin on passera à la limite .

Ce mémoire contient une introduction et 3 chapitres .

On donne dans le premier chapitre quelques notions et définitions utiles concernant :

1- La topologie faible et faible étoile .

2- Les espaces L^p et leurs propriétés .

3- Les espaces de Sobolev et leurs propriétés .

4- Approximation des solutions d'équations aux dérivées partielles par des méthodes de décomposition.

5- Les équations différentielles à coefficients périodiques .

Et en plus dans ce chapitre on s'intéresse à exposer les outils de travail , l'espace de travail, la méthode de compacité , et le principe de la méthode de décomposition.

Dans la 2^{me} chapitre , nous proposons d'étudier l'existence et l'unicité de la solution .

Nous allons d'abord montrer l'unicité par une méthode classique (Lemme de Gronwall) .
Pour démontrer l'existence on va utiliser les estimations à priori les quels trouvées dans le chapitre précédent pour assurer l'existence de la solution ou (1) , afin de passer à la limite grâce à les propriétés de la compacité et on trouve que le problème (1) admet au moins une solution .
On étudie notre problème dans un espace plus général , on pose $f \in L^\infty$, et pour $u \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ dans Σ , et on trouve que la solution est unique dans $L^\infty(0, T, H^2(\Omega) \cap L^\infty)$.
Enfin pour valider notre travail , nous allons faire une application numérique qui sera le sujet du dernier chapitre .
On termine ce mémoire par une conclusion qui est une synthèse où on récapitule les résultats obtenus.

Chapitre 1

Préliminaires

Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

Pour étudier les équations aux dérivées partielles , il faut préciser dans quel espace fonctionnel on cherche des solutions .
Nous allons passer en revue dans cette section les notations des fonctions utiles en pratique, de la notion la plus faible, à la notion la plus forte .

1.1 Espace de Banach

Un espace vectoriel normé E appelé espace de Banach s'il est complet pour sa norme .
le dual topologique de E noté par E' est l'espace des formes linéaires continues sur E .ie :

$$f \in E \Leftrightarrow f : E \to \mathbb{R},$$

linéaire et

$$\exists c > 0, |\langle f, x \rangle| \leqslant c\|x\|_E . \forall x \in E$$

on muni l'espace dual E' de la norme suivante :

$$\|f\|_{E'} = \underset{\|x\| \leqslant 1}{sup} \langle f, x \rangle.$$

Avec cette norme E' est un espace de Banach .

1.2 Topologie faible et la topologie faible*

1.2.1 Topologie faible

Soient E un espace de Banach et E' son dual topologique , et soit $f \in E'$.
On désigne par $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$,l'application définie par $\varphi_f(x) = \langle f, x\rangle$.
Lorsque f décrit E' on obtient une famille $(\varphi_f)_{f\in E'}$ d'applications de E dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.2.1 *La topologie faible sur E qui notée $\sigma(E, E')$ est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f\in E'}$.*

Définition 1.2.2 *La Suite (x_n) tend vers x pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ si et seulement si : $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$ pour toute $f \in E'$.*

Théorème 1.2.3 *[2] Soit E un espace de Banach réflexif et soit $\{x_n\}$ une suite bornée dans E. Alors il existe une sous-suite extraite $\{x_{nk}\}$ qui converge pour la topologie $\sigma(E, E')$.*

1.2.2 Topologie faible*

On va définir maintenant une autre topologie sur E' : la topologie faible* que l'on note $\sigma(E', E)$.
Pour chaque $x \in E$ on considère l'application :

$$\varphi_x : E' \to \mathbb{R}$$

définie par

$$f \mapsto \varphi_x(f) = \langle f, x\rangle.$$

Lorsque x parcourt E on obtient une famille d'application $(\varphi_x)_{x\in E}$.

Définition 1.2.4 *La topologie faible* désignée aussi par $\sigma(E', E)$ est la topologie la moins fine sur E' rendant continues toutes les applications $(\varphi_x)_{x\in E}$.*

Proposition 1.2.5 *Soit E un espace de Banach , E'' son bidual , alors l'application J de E dans E'' définie par :*

$$[J(x)](\varphi) = \varphi(x).$$

est une isométrie linéaire de E dans E'' .

Preuve. La démonstration se trouve dans [12]. (page 169). ■

Remarque 1.2.6 *La topologie $\sigma(E', E)$ est la topologie la moins fine sur E' rendant continues toutes les applications φ_x , où $x \in E$.*
Donc chaque ouvert pour la topologie $\sigma(E', E)$ est un ouvert pour la topologie de la norme.

1.3 Espaces réflexifs- espaces séparables

1.3.1 Espaces réflexifs

Soit E un espace de Banach et $J : E \to E''$ l'injection canonique de E dans E'' définie par :

$$J_x(f) = f(x), \text{pour tout} \;\; x \in E, f \in E'.$$

Définition 1.3.1 *L'espace E est réflexif, si $J(E) = E''$.*

Remarque 1.3.2 *Si E est un espace réflexif alors E est un espace de Banach .*

Théorème 1.3.3 *[3] Si E est un espace de Banach alors :*

$$E \;\; \textit{réflexif} \Leftrightarrow E' \textit{est réflexif} \;\; .$$

1.3.2 Espaces séparables

Définition 1.3.4 *Un espace métrique séparable est un espace métrique qui contient un sous ensemble D dense et dénombrable.*

Théorème 1.3.5 *Soit E un espace de Banach séparable, alors toute suite bornée$(f_n)_{n\geqslant 0}$ dans E' admet au moins une sous-suite faiblement*convergente.*

Preuve. La démonstration de ce théorème se trouve dans [2] ; (corollaire III.26, page 50). ■

Théorème 1.3.6 *[6] Soit E un espace de Banach , si E' est séparable alors E l'est aussi. la réciproque est en général fausse .*

Corollaire 1.3.7 *[6] Soit E un espace de Banach alors :*
E est réflexif et séparable si et seulement si E' est réflexif et séparable .

Proposition 1.3.8 *Soient E et F des espaces normés séparables et G un sous-espace de E, alors :*

(i) L'espace $E \times F$ est séparable .

(ii) L'espace G est séparable .

Preuve. la démonstration se trouve dans [6] . ■

1.4 Rappels sur les espaces $L^p(\Omega)$

On considère Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. les fonctions f seront considérées de Ω dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.4.1 *On pose* $L^{\infty}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f$ *mesurable et* $\exists$ *une constante* c *telle que* $|f(x)| \leqslant c$ *p.p.sur* $\Omega.\}$

$$\|f\|_{L^{\infty}} = inf\{c; \ \ |f(x)| \leqslant c \ \ p.p.sur \ \ \Omega\}$$

on vérifiera ultérieurement que $\|\|_{L^{\infty}}$ est une norme.

Remarque 1.4.2 *[3] .p56. Si* $f \in L^{\infty}$ *on a*

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_{L^{\infty}} \ \ p.p. \ \ sur \Omega.$$

En effet il existe une suite c_n *telle que* $c_n \to \|f\|_{L^{\infty}}$ *et pour chaque* $n, |f(x)| \leqslant c_n$ *p.p.sur* Ω

Donc $|f(x)| \leqslant c_n$ *pour tout* $x \in \Omega \backslash E_n$ *avec* E_n *négligeable .on pose* $E = \bigcup\limits_{n} E_n$ *de sorte que* E *est négligeable et l'on a* $|f(x)| \leqslant c_n$ *pour tout* $x \in \Omega \backslash E$.

Par conséquent $|f(x)| \leqslant \|f\|_{L^{\infty}}$ *pour tout* $x \in \Omega \backslash E$. .

Théorème 1.4.3 *L'espace* $L^p(\Omega)$ *est réflexive si* $1 < p < \infty$.

Lemme 1.4.4 *Les espaces ,* $L^1(\Omega)$ *;* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *et* $C([0,1])$ *ne sont pas réflexive .*

Preuve. voir [4] p .17 ■

Théorème 1.4.5 *Chaque sous-espace fermé d'un espace de Banach réflexive est réflexive.*

Preuve. voir [4] p .18 ■

Notation 1.4.6 *Soit* $1 \leqslant p \leqslant \infty$;*on désigne par* p' *l'exposant conjugué de* p *i.e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

1- L'espace $L^{\infty}(\Omega)$ est séparable pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

2- L'espace $L^\infty(\Omega)$ ni réflexif , ni séparable et son dual contient strictement dans $L^1(\Omega)$.

3- Pour $mes(\Omega) < \infty$, et $1 \leqslant p \leqslant \infty$ on a :

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

on peut dire que :

$$L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$

Théorème 1.4.7 *[2] $D(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leqslant p < \infty$ c'est à dire :*

$$\overline{D(\Omega)} = L^p(\Omega). \quad \forall p, 1 \leqslant p < \infty$$

.

1.5 Inégalités auxiliaires

1.5.1 Inégalité de Hölder

Soient $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$.
Alors $f.g \in L^1$ et

$$\int |fg| \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

Preuve. la démonstration de ce théorème se trouve dans [2] page 56 .
■

1.5.2 Inégalités de Cauchy-Schwarz

Pour $p = q = 2$ l'inégalité de Hölder n'est autre que l'inégalité de Cauchy-Schwarz .

$$\int_\Omega |f.g| \leqslant \|f\|_{L^2}.\|g\|_{L^2}.$$

1.5.3 Inégalité de Young

Soit a, b deux réels positifs et $p > 1, p' < \infty$.

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p\prime}}{p'}.$$

ou $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1'}{p} = 1$, de plus l'inégalité standard :

$$ab \leqslant \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{b^2}{2\varepsilon}.$$

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, et $\varepsilon > 0$.

Lemme 1.5.1 ***(lemme de Gronwall)*** *Soit $f \in L^1([0,T])$ une fonction positive ,g, h sont deux fonctions continuées et positives sur $[0,T]$ si h satisfait :*

$$h(t) \leqslant g(t) + \int_0^t f(\sigma).h(\sigma) d\sigma. \quad \forall t \in [0,T].$$

Alors :

$$h(t) \leqslant g(t).e^{\int_0^T f(\sigma) d\sigma}.$$

Remarque 1.5.2 *On utilise souvent ce lemme pour montrer l'unicité de la solution des problèmes aux limites et problème de Cauchy .*

1.6 Rappels sur les espaces de Sobolev

1.6.1 Dérivées faibles

Lemme 1.6.1 *Soient $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ .si pour toute fonction $\Phi \in D(\Omega)$ on a :*

$$\int_\Omega f(x)\Phi(x)dx = \int_\Omega g(x)\Phi(x)dx$$

alors :

$$f = g \quad p.p.$$

Définition 1.6.2 *On dit que $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ est dérivable dans la direction i, $i \in [1, N]$,au sens faible s'il existe $D_i f \in L^1_{loc}(\Omega)$, telle que pour toute fonction $\Phi \in D(\Omega)$,*

$$\int_\Omega f(x)\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}dx = \int_\Omega D_i f \Phi(x)dx.$$

Définition 1.6.3 *Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ alors on définit la distribution d'ordre 0 :*

$$T_f(\Phi) = \int_\Omega f(x)\Phi(x)dx.$$

on appelle alors dérivée faible , au sens des distributions , de f dans la direction i , la distribution $D_i T_f$ que l'on note $D_i f$.

Remarque 1.6.4 *Si f est dérivable au sens faible dans la direction i alors :*

$$D_i T_f = T_{D_i f}.$$

Proposition 1.6.5 *Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ alors :*
f est lipschitzienne ssi $\forall i \in [1, N], D_i f \in L^\infty(\Omega)$.

Définition 1.6.6 *Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ alors on note :*

1. *Pour $K \subset \Omega$ compact,$D_k(\Omega) = \{\Phi \in D(\Omega) | supp(\Phi) \subset K\}$.*
2. *Pour $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et $\Phi \in D(\Omega), P_\alpha(\Phi) = \|\partial^\alpha \Phi\|^\infty$.*

1.6.2 Espace de Sobolev

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $u \in L^1_{loc}(\Omega)$,pour tout $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ avec $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. une fonction $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ est dite la dérivée d'ordre α de u si :

$$\int_\Omega v\varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega uD^\alpha \varphi dx, \quad \forall \varphi \in D(\Omega) \diagup v \equiv D^\alpha u.$$

$$H^m(\Omega) = f \in L^2(\Omega) \diagup D^\alpha f \in L^2(\Omega),$$

$$\forall |\alpha| \leqslant m, m \in \mathbb{N}.$$

Définition 1.6.7 *Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$, et $p \in [1, +\infty]$, on définit :*
$\omega_0^{m,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}$ où l'adhérence est prise pour la topologie de $\omega^{m,p}(\Omega)$.

Propriété 1.6.8 *[1] Pour $m \in \mathbb{N}$,$1 \leqslant p \leqslant \infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

$$\omega^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \;\; tq \;\; D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n avec\, |\alpha| \leqslant m\} D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ...... \partial x_n^{\alpha_n}}. \quad (1.1)$$

- *Si $m = 1, \omega^{1,p} = \{u \in L^p(\Omega), \quad \nabla u \in (L^p(\Omega))^n\}$.*

- *Si $p = 2$, $\omega^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.*

Théorème 1.6.9 *$\omega^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach .*

Lemme 1.6.10 *Soient $f, g \in L^1_{loc(\Omega)}$. Si pour toute fonction $\Phi \in D(\Omega)$ on a :*

$\int_\Omega f(x)\Phi(x)dx = \int_\Omega g(x)\Phi(x)dx$ alors $f = g$ p.p.

Remarques 1.6.11 *1- $D_i f$ étant une distribution , $D_i f \in L^2$ signifie qu'il existe $g \in L^2$ telle que $D_i f = T_g$:*

$$\forall \Phi \in D(\Omega), \langle D_i f, \Phi \rangle = \int_\Omega g(x)\Phi(x)dx.$$

2- $\omega^{m,2} = H^m$ *et les normes sur* $\omega^{m,2}$ *et sur* H^m *sont équivalentes .*

Proposition 1.6.12 *1-* $\omega^{m,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach.*

2- Pour $p < +\infty$, $\omega^{m,p}(\Omega)$ *est séparable.*

3- Pour $1 < p <= +\infty$, $\omega^{m,p}(\Omega)$ *est réflexif.*

Remarque 1.6.13 $H^m(\Omega)$ *est donc un Banach muni d'un produit scalaire : c'est un Hilbert.*

Proposition 1.6.14 *Si* $u \in \omega_0^{m,p}(\Omega)$ *et* $\tilde{u}$ *est définie par :*

$$\begin{cases} u & sur \quad \Omega \\ 0 & sur \quad \Omega^c \end{cases}$$

alors $\tilde{u} \in \omega^{m,p}(\Omega)$.

1.6.3 Injection de Sobolev

Injections continues

Définition 1.6.15 *Soit* B_1, B_2 *deux espaces de Banach ,on dit que* B_1 *s'injecte d'une façon continue dans* B_2 *si :*

- $B_1 \subset B_2$.
- $j : B_1 \longrightarrow B_2$ *est continue .*

$$\|u\|_{B_2} \leqslant c\|u\|_{B_1}.$$

Théorème 1.6.16 *[1] Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière lipschitzienne m, l deux entiers tels que $0 \leqslant l < m$, $1 \leqslant p < \infty$.*

- *Si $(m-l)p > n$:* $\quad \omega^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^l(\Omega)$.
- *Si $(m-l)p = n$:* $\quad \omega^{m,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^l(\Omega)$.
- *Si $(m-l)p < n$:* $\quad \omega^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \omega^{l,p^*}(\Omega)$ *avec* $p \leqslant p^* \leqslant \dfrac{np}{n-(m-l)p}$.

Corollaire 1.6.17 *On suppose que Ω est un ouvert de classe C^1 avec Γ borné , ou $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

- *Si $1 \leqslant p < n$,alors $\omega^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{P^*}(\Omega)$, ou $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.*
- *Si $p = n$ $\quad \omega^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p, +\infty]$.*
- *Si $p > n$ $\quad \omega^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.*

Injections Compactes

Définition 1.6.18 *B_1 et B_2 deux espaces de Banach .*
on dit que B_1 s'injecte d'une façon compacte dans B_2 et on note : $B_1 \underset{c}{\hookrightarrow} B_2$.
$B_1 \hookrightarrow B_2$ d'une façon continue et tout borné de B_1 est relativement compacte dans B_2.

Théorème 1.6.19 *[1] $l, m \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant l < m$,$1 \leqslant p < \infty$.*
Les injections suivantes sont compactes :

- $\omega^{m,p}(\Omega) \underset{c}{\hookrightarrow} \omega^{l,q}(\Omega)$, $\quad$ *si $(m-l)p = n$ et $1 \leqslant q < \infty$.*
- $\omega^{m,p}(\Omega) \underset{c}{\hookrightarrow} C_B^l(\Omega)$, $\quad$ *si $(m-l)p > n$.*

- $\omega^{m,p}(\Omega) \underset{c}{\hookrightarrow} C^{l}(\bar{\Omega})$, *si* $(m-l)p > n$.

- $\omega^{m,p}(\Omega) \underset{c}{\hookrightarrow} C^{l\lambda}(\bar{\Omega})$, *si* $(m-l)p > n \geqslant (m-l-1)p$. *et* $0 < \lambda < m-l-\dfrac{n}{p}$.

1.6.4 Compacité

Théorème 1.6.20 *Si Ω est un ouvert borné et $1 \leqslant p < \infty$ et $B \subset L^{p}(\Omega)$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1- B est relativement compacte dans $L^{p}(\Omega)$.

2- il existe un opérateur $P : B \to L^{p}(\mathbb{R}^{n})$ tel que :

- $\forall u \in B, Pu = u$ *sur* Ω .

- $\{Pu, u \in B\}$ *est borné dans* $L^{p}(\mathbb{R}^{n})$.

- $\underset{u\in B}{sup}\|\tau_h Pu - Pu\|_{L^{p}(\mathbb{R}^{n})} \to 0$ *quand* $h \to 0$.

Théorème 1.6.21 ***(Rellich)*** *Si Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne et $1 \leqslant p < \infty$ alors toute partie bornée dans $\omega^{1,p}(\Omega)$ est relativement compacte dans $L^{p}(\Omega)$.*

Remarque 1.6.22 *Ceci traduit que l'inclusion $\omega^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p}(\Omega)$ est compacte.*

Théorème 1.6.23 *Si Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne et $1 < p < \infty$alors la trace $\gamma : \omega^{1,p}(\Omega) \to L^{p}(\partial\Omega)$ est compacte.*

Remarque 1.6.24 *Une application linéaire est compacte si l'image de tout borné est relativement compacte.*

Remarque 1.6.25 *Ce théorème est faux pour p = 1, puisque : $\gamma : \omega^{1,1}(\Omega) \to L^{1}(\partial\Omega)$ est surjective.*

1.7 Approximation d'équations aux dérivées partielles par des méthodes de décomposition

1.7.1 Problèmes d'évolution

Description de la méthode des pas fractionnaires *On considère dans un espace de Hilbert H une équation d'évolution*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t) + Au(x,t) = f(t), \quad 0 < t < T \\ u(0) = u_0 \\ u|_\Gamma = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Où A est un opérateur linéaire dans H (hypothèses à préciser).

Dans les méthodes usuelles approximation, on considère un découpage de l'intervalle $[0,T]$ en N intervalles égaux de longueur k, et on définit une famille d'éléments de H,

$$u^0, u^1, ..., u^N.$$

Par récurrence, en partant de :

$$u^0 = u_0. \tag{1.3}$$

Et de :

$$\begin{cases} \dfrac{u^{n+1} - u^n}{k} + Au^{n+1} = f^{n+1}(= f(n+1)k), \\ n = 0, ..., N-1. \end{cases} \tag{1.4}$$

Avec : $k = \Delta t$.

Si l'opérateur A admet une décomposition :

$$A = \sum_{i=1}^{q} A_i \tag{1.5}$$

On peut utiliser cette décomposition pour approcher (1.2) et ceci conduit au schéma de pas fractionnaires suivant : on définit les éléments :

$$u^{n+\frac{i}{q}} \ , n = 0, ..., N-1, i = 1, ..., q.$$

tels que :

$$u^0 = u_0 \tag{1.6}$$

Et :

$$\begin{cases} \dfrac{u^{n+\frac{i}{q}} - u^{n-\frac{i-1}{q}}}{k} + A_i u^{n+\frac{i}{q}} = f^{n+\frac{i}{q}}, \\ n = 0, ..., N-1, i = 1, ...q. \end{cases} \tag{1.7}$$

Où

$$f^{n+1} = \sum_{i=1}^{q} f^{n+\frac{i}{q}} \tag{1.8}$$

Dans le cas du schéma (1.4) , le calcul de u^{n+1} *nécessite l'inversion de l'opérateur* $(I + KA)$ *; dans le cas du schéma (1.7) , le calcul de* $u^{n+\frac{1}{q}}, ..., u^{n+1}$ *,nécessite l'inversion des opérateurs* $(I + A_1), ..., (I + kA_q)$ *, et la méthode est intéressante lorsque l'inversion de ces opérateurs est plus simple que l'inversion de l'opérateur* $(I + KA)$ *.*

1.7.2 Résultat de convergence

Nous allons énoncer un résultat précis sur la manière dont les $u^{n+\frac{i}{q}}$ *approximent la solution u de (1.2) .*

Soient V_i *,* $i = 1, ..., q$ *, des espaces de Hilbert ,*

$$V = \bigcap_{i=1}^{q} V_i \quad , \quad avec \ \ V \subset V_i \subset H.$$

les injections étant continues , et chaque espace étant dense dans le suivant .

On identifie H à son dual , V' , désignant le dual de V_i, V' celui de V , on a :

$$V \subset V_i \subset H \subset V_i' \subset V' \tag{1.9}$$

avec injections continues , chaque espace étant dense dans le suivant .

Supposons que $A_i \in L(V_i, V_i')$ avec :

$$\begin{cases} (A_i v, v) \geqslant \alpha_i \|V\|_{V_i}^2 \\ \forall v \in V_i \quad , \alpha_i > 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

Alors , pour u_0 donné dans H , et f donné dans $L^2([0,T];H)$, l'équation (1.2) possède une solution unique $u \in L^2([0,T];V) \cap C([0,T];H)$ ([9]).

on se donne une décomposition arbitraire de f .

$$f = \sum_{i=1}^{q} f_i \quad , f_i \in L^2([0,T];H) \tag{1.11}$$

Et on pose :

$$f((n+\frac{i}{q})k) = f^{n+\frac{i}{q}} = \frac{1}{k}\int_{nk}^{(n+1)k} f_i(s)ds \tag{1.12}$$

les équations (1.7) définissent alors de manière unique les $u^{n+\frac{i}{q}}$ comme éléments de V_i , on introduit les fonctions étagées $u_{ik}, 1 \leqslant i \leqslant q$:

$$u_{ik} = u^{n+\frac{i}{q}}, \text{ pour } t \in [nk,(n+1)k[, i = 1, ..., q.$$

et on a le résultat de convergence ([13]).

***Théorème 1.7.1** Lorsque $k \to 0$,*

1. *u_{ik} converge vers u dans $L^2([0,T];V_i)$ fort et $L^\infty([0,T];H)$ faible étoile.*

2. *$u_{ik}(t) \to u(t)$ dans H fort , $\forall t \in [0,T]$, où u est la solution unique de (1.2) .*

1.7.3 Exemple

De façon générale et formelle , considérons le système (u désignant éventuellement un vecteur) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \\ \qquad u|_{\Gamma} = 0 \\ \quad u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{1.13}$$

soit : $k = \Delta t$. *le pas de temps .*

Supposons que nous connaissions :

u^n *" approximation " de u à l'instant nk .*

Nous déterminons alors :

u^{n+1} *:" approximation " de u à l'instant $(n+1)k$.*

Pour montrer l'existence d'une solution de notre problème , on va utiliser la méthode de décomposition des opérateurs , qui décompose le problème initial en deux sous problèmes adjacents , après une semi discrétisation en temps de deux sous problème en deux étapes :

Première étape : *On considère l'équation :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = f_1 \\ v \mid_\Gamma = 0 \quad v(x,0) = v_0(x) \\ v(nk) = u^n \end{cases} \tag{1.14}$$

et on calcule :

$$v((n+1)k) = u^{n+\frac{1}{2}}.$$

par la discrétisation en temps de (1.14) on trouve :

$$\begin{cases} \dfrac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{k} + \dfrac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} = f_1^n \\ u^{n+\frac{1}{2}} \mid_\Gamma = 0 \\ u^{n+\frac{1}{2}}(x,0) = u_0^{n+\frac{1}{2}}(x) \end{cases} \tag{1.15}$$

Deuxièmes étape : *On considère la deuxième partie de l'équation (1.13)*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = f_2 \\ \omega \mid_\Gamma = 0 \quad \omega(x,0) = \omega_0(x) \\ \omega(nk) = u^{n+\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{1.16}$$

où

$$f_1 + f_2 = f.$$

on prend alors :

$$u^{n+1} = \omega((n+1)k).$$

par la discrétisation en temps de(1.16) on trouve :

$$\begin{cases} \dfrac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{k} - \dfrac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} = f_2^n \\ u^{n+\frac{1}{2}} |_\Gamma = 0 \\ u^{n+1}(x, 0) = u_0^{n+1}(x) \end{cases} \tag{1.17}$$

1.8 Équations différentielles à coefficients périodiques

Dans le cas des systèmes à coefficients périodiques . L'équation considérée s'écrit donc :

$$X' = A(t)X \tag{1.18}$$

Où A est une matrice $n \times n$ de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$A(t + \omega) = A(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{1.19}$$

Le nombre $\omega \in \mathbb{R}$ est appelle période de A.

Théorème 1.8.1 *[10] Soit Φ la matrice fondamentale de solutions de (1.18) .
Alors Ψ est ω - périodique et vérifie :*

$$\Psi(t) = \Phi(t + \omega) \ \ \forall t \in \mathbb{R} \tag{1.20}$$

Alors $\Phi(t + \omega)$ est aussi une matrice fondamentale de solutions pour le système (1.18). De plus, pour toute matrice fondamental Φ ; on peut associer une matrice inversible ω-périodique P, et une matrice constante R, telle que :

$$\Phi(t) = P(t)e^{tR} \ \ \forall t \in \mathbb{R} \tag{1.21}$$

Définition 1.8.2 *[10] Les valeurs propres de la matrice* $e^{\omega R}$ *sont appelées multiplicateurs associés à l'équation (1.18) ou encore à la matrice* A *, et les valeurs propres de* R *sont appelées exposants caractéristiques de* A *.*

1.8.1 Résultats complémentaires sur les solutions périodiques pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2

Nous allons encore présenter deux résultats sur les solutions périodiques. pour cela nous intéressons à une équation de la forme suivante :

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t) \tag{1.22}$$

avec a, b *et* c *trois fonctions réelles continues et* $\omega-$ *périodiques.*

Théorème 1.8.3 *[10] Considérons une équation du type ci-dessus .*
L'équation homogène associée s'écrit alors : sous la forme :

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0 \tag{1.23}$$

Alors (1.22) admet une solution ω*-périodique pour toute fonction* $c(t)$ *si et seulement si (1.23) n'en a pas .*

Lemme 1.8.4 *[10] L'équation différentielle (1.22) admet une solution* ω*-périodique si et seulement s'il existe une solution* x *vérifiant la condition de périodicité :*

$$x(\omega) = x(0) \quad x'(\omega) = x'(0) \tag{1.24}$$

Preuve.

- *Sens nécessaire : il est évident que si x est une solution $\omega-$périodique alors x est au moins de classe* c^2 *et on a (1.24).*

- *Sens suffisant : supposons que x est une solution vérifiant (1.24). Alors x vérifie le problème de Cauchy .*

$$\begin{cases} x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t) \\ x(0) = \alpha, \quad x'(0) = \beta. \end{cases}$$

on pose y telle que : $y(t) = x(t+\omega)$.

y vérifie alors le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y''(t) + a(t+\omega)y'(t) + b(t+\omega)y(t) = c(t+\omega) \\ y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta. \end{cases}$$

comme a, b et ,c sont des fonctions $\omega-$périodiques , on obtient exactement le même problème de Cauchy pour x et y , donc par unicité des solutions , on a que x est une solution $\omega-$périodique de (1.22). ■

Remarque 1.8.5 *Ce théorème est un théorème d'unicité : pour tout fonction* $c(t)$ *il existe une solution périodique .*

Théorème 1.8.6 *on suppose que $a(t) = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Donc l'équation (1.22) s'écrit :*

$$x''(t) + b(t)x(t) = c(t) \tag{1.25}$$

ou b et c sont des fonctions $\omega-$périodiques .

Alors ,(1.25) admet une solution périodique si et seulement si on a :

$$\int_0^\omega \Phi(u)c(u)du = 0$$

pour tout solution périodique Φ de l'équation homogène à (1.25).

Chapitre 2

FORMULATION DU PROBLÈME

2.1 Position de problème

Soit $\Sigma = \Omega \times]0, T[$, *avec* Ω *borné de* $\mathbb{R}$ *,le problème est trouver* u *solution de (2.1).*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x)\dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x) \quad \textit{dans}\ \Sigma = \Omega \times]0, T[\\ u(x,0) = u_0(x); x \in \Omega \subseteq \mathbb{R} \quad \textit{(condition initialle)} \\ u = 0\ \textit{sur}\Gamma = \partial\Omega \quad \textit{(condition aux limite)} \end{cases} \tag{2.1}$$

Avec $f \in L^2(\Omega)$ *donnée . On suppose que* a, b *sont des fonctions continues et bornés dans* Ω *et que* a, b, f *sont périodiques et de période* ω *, nous allons étudier les solution périodiques du problème (2.1), pour ceci on va utiliser la méthode de décomposition .*

Théorème 2.1.1 *Si* $u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), u \geqslant 0$ *dans* Σ *, et* u *vérifie les conditions initiales et aux limites continues dans (2.1) et* f *est une fonction positive donnée dans* $L^\infty(\Omega)$ *alors le problème (2.1) admet au moins une solution* $u \in L^\infty(0, T, H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))$.

Remarque 2.1.2 *Il résulte de (2.1) que :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega)).$$

de sorte que u_0 a un sens (en particulier dans $L^2(\Omega)$).

2.2 Étude de L'existence et L'unicité

- *L'étude du problème (2.1) , on commence par le cas où les coefficients sont périodique :*

2.2.1 L'unicité

soient u_1, u_2 deux solutions du problème (2.1) . Posons : $u = u_1 - u_2$ et f fonction continue et $a \in L^{\infty}(\Omega)$ et $b \in L^{\infty}(\Omega)$.

telle que $\exists M_1 > 0$ tq $\|a\| \leqslant M_1$ et $\exists M_2 > 0$ tq $\|b\| \leqslant M_2$.

on a :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + a(x)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial t} + a(x)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial u_2}{\partial x} \tag{2.2}$$

donc :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t} + a(x)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - a(x)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial u_1}{\partial x} - b(x)\frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \tag{2.3}$$

c'est à dire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{2.4}$$

multiplions (2.4) par u , puis on intégrons on trouve :

$$\int_{\Omega} u\frac{\partial u}{\partial t}dx + \int_{\Omega} ua(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + \int_{\Omega} ub(x)\frac{\partial u}{\partial x}dx = 0 \tag{2.5}$$

et on a :

$$\int_{\Omega} u\frac{\partial u}{\partial t}dx = \int_{\Omega} uu' = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} |u|^2 dx$$

et

$$\int_{\Omega} a(x)u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx \leqslant M_1\int_{\Omega} u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx \leqslant -M_1\int_{\Omega} u'^2 dx$$

telle que :$u = 0$ *on* $\Gamma = \partial\Omega$.

et on a :

$$\int_{\Omega} b(x)u\frac{\partial u}{\partial x}dx \leqslant M_2\int_{\Omega} u\frac{\partial u}{\partial x} \leqslant M_2\int_{\Omega} uu'dx \leqslant M_2\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|u|^2 dx$$

de sort que :

$$-M_1\int u'^2 dx \leqslant \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|u|^2 dx + M_2\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|u|^2 dx.$$

et donc d'après le lemme de Gronwall [2] :

on trouve : $u = 0$.

D'où : $u_1 = u_2$.

2.2.2 Étude de L'existence

Solutions approchées

On utilise la méthode de décomposition qui décompose le problème (2.1) en deux sous problèmes comme suit :

Le Premier sous problème est :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + b(x)\frac{\partial u}{\partial x} = f_1 \tag{2.6}$$

Avec les conditions initiales et aux limites relatives à $L_1(v) = \dfrac{\partial v}{\partial t} + b(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}$

Le second sous problème est :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_2 \tag{2.7}$$

Avec les conditions initiales et aux limites relatives $L_2(v) = \dfrac{\partial v}{\partial t} + a(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.
Pour trouver une solution approchée du problème (2.1), on va faire une semi discrétisation en temps des deux sous problèmes (2.6) et (2.7) .
Soit $k = \Delta t$ *le pas de temps on suppose que* u *est connue à l'instant* $nk = n\Delta t$ *on note* u^n
On cherche u *à l'instant* $(n+1)k$ *c'est-à-dire on cherche* u^{n+1}.

- *La semi discrétisation du problème (2.6) est :*

$$u^{n+\frac{1}{2}} - u^n = k[b(x)\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + f_1^{n+\frac{1}{2}}] \tag{2.8}$$

La résolution de (2.8) donne $u^{n+\frac{1}{2}}$ *, qui est une solution approché de (2.1).*

- *La semi discrétisation du problème (2.7) est :*

$$u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}} = k[a(x)\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} + f_2^{n+1}] \tag{2.9}$$

La résolution de (2.9) donne u^{n+1} *Par incrémentation du pas de temps on obtient une suite de solutions approchées du problème (2.1) On pose* $u^0 = u_0$, *ceci définie complètement la suite* $\{u^n\}$.

2.2.3 Estimations à priori

On prend k *sous la forme :*

$$k = \Delta t.$$

et l'on introduit les fonctions :

$$\begin{cases} u_{ik}(t) = u^{n+\frac{i}{2}} \qquad ; i = 1,2 \\ pour \;\; t \in [nk,(n+1)k[, \quad n = 0,1,.....,N-1 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \tilde{u_k} \;\; \text{linéaire dans} \;\; [nk,(n+1)k] \\ \tilde{u_k}(nk) = u^n \end{cases}$$

Lemme 2.2.1 *Les u_{ik} , (i=1,2) , $\tilde{u_k}$ demeurent , lorsque $k \to 0$, dans un borné de $L^\infty(0,T;H^2 \cap L^\infty(\Omega))$ et sont à valeur positives p.p .*

Nous allons diviser la démonstration de ce lemme en plusieurs étapes ; on vérifiera en cours que les fonctions u_{ik} sont bien à valeurs dans $H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Nous allons montrer que la suite (u^n) est bornée dans $H^1(\Omega)$ on commence par montrer que la suite est bornée dans $L^2(\Omega)$.

Lemme 2.2.2 *$\exists c > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} \|u_n\|_{L^2} < c$*

ou

$$\|u_0\|_{L^2} = c.$$

Preuve.

On montre que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \;\; \|u^{n+\frac{1}{2}}\| \leqslant \|u^n\| \\ et \, \forall n \in \mathbb{N} \;\; \|u^{n+1}\| \leqslant \|u^{n+\frac{1}{2}}\| \end{cases} \tag{2.10}$$

Pour montre que :

$$\|u^{n+1}\| \leqslant \|u^{n+\frac{1}{2}}\|.$$

- *On utilise le 2^{me} problème :*

$$u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}} = k[a(x)\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} + f_2^{n+1}].$$

On multiple les deux membres par u^{n+1} et on intègre sur Ω , on aura

$$u^{n+1}.u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}.u^{n+1} = k[a(x)\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} + f_2^{n+1}]u^{n+1}.$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (u^{n+1})^2 \, dx - \int_\Omega u^{n+\frac{1}{2}}.u^{n+1} \, dx = k \int_\Omega [a(x)\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} + f_2^{n+1}]u^{n+1} \, dx$$

On fait les majoration nécessaire ,ce qui donne :

$$\|u^{n+1}\| \leqslant c_1 \|u^{n+\frac{1}{2}}\|. \tag{2.11}$$

On utilise la même technique pour montrer que :

$$\|u^{n+\frac{1}{2}}\| \leqslant c_2 \|u^n\|.$$

- *On considère le premier problème :*

$$u^{n+\frac{1}{2}} - u^n = k[b(x)\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + f_1^{n+\frac{1}{2}}].$$

On multiplie par $u^{n+\frac{1}{2}}$ ce qui donne :

$$u^{n+\frac{1}{2}}.u^{n+\frac{1}{2}} - u^n.u^{n+\frac{1}{2}} = k[b(x)\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + f_1^{n+\frac{1}{2}}]u^{n+\frac{1}{2}}$$

On intègre sur Ω ce qui donne :

$$\int_\Omega u^{n+\frac{1}{2}}.u^{n+\frac{1}{2}}\,dx - \int_\Omega u^n.u^{n+\frac{1}{2}}\ dx = k\int_\Omega [b(x)\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + f_1^{n+\frac{1}{2}}]u^{n+\frac{1}{2}}\ dx$$

Donc :

$$\|u^{n+\frac{1}{2}}\|^2 = \int_\Omega u^n.u^{n+\frac{1}{2}} + k\int_\Omega [b(x)\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + f_1^{n+\frac{1}{2}}]u^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\|u^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \leqslant \|u^n\|.\|u^{n+\frac{1}{2}}\| + \|u^{n+\frac{1}{2}}\|$$

On trouve enfin :

$$\|u^{n+\frac{1}{2}}\| \leqslant c_2\|u^n\|. \tag{2.12}$$

De (2.11) et (2.12) on obtient :

$\|u^{n+\frac{1}{2}}\| \leqslant c_2\|u^n\|$ *et* $\|u^{n+1}\| \leqslant c_1\|u^{n+\frac{1}{2}}\|$

Donc : $\|u^{n+1}\| \leqslant c_3\|u^n\| \leqslant .... \leqslant c_n\|u_0\| \leqslant c.c_n$

Par récurrence on aura :

$$\|u^n\| \leqslant c_4$$

Donc u^n bornée dans un domaine de $L^2(\Omega)$ Il reste à montrer que la suite est bornée dans un domaine de $H^1(\Omega)$ pour ceci on montre le lemme suivante :

Lemme 2.2.3 *Il existe une constante $M > 0$ telle que $\|Du^n\| \leqslant M$ avec $DU^n = \dfrac{\partial u^n}{\partial x}$*

$$\begin{cases} \|Du^{n+\frac{1}{2}}\| \leqslant \|Du^n\| \\ \|Du^{n+1}\| \leqslant \|Du^{n+\frac{1}{2}}\| \end{cases} \tag{2.13}$$

On utilise la même technique que celle utilisée pour montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \|u^n\| \leqslant constante \tag{2.14}$$

- *On utilise la formule du premier problème :*

$$u^{n+\frac{1}{2}} - u^n = k[b(x)\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + f_1^{n+\frac{1}{2}}]$$

On dérive les deux membre par rapport à x :

$$Du^{n+\frac{1}{2}} - Du^n = kD[b(x)\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + f_1^{n+\frac{1}{2}}]$$

On multiple par $Du^{n+\frac{1}{2}}$ *où* $D = \dfrac{\partial}{\partial x}$ *:*

$$Du^{n+\frac{1}{2}}.Du^{n+\frac{1}{2}} - Du^n.Du^{n+\frac{1}{2}} = kD[b(x)\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + f_1^{n+\frac{1}{2}}]Du^{n+\frac{1}{2}}$$

On intègre sur Ω *ça donne :*

$$\int_\Omega Du^{n+\frac{1}{2}}.Du^{n+\frac{1}{2}}\ dx = \int_\Omega Du^n.Du^{n+\frac{1}{2}}\ dx + k\int_\Omega D[b(x)\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + f_1^{n+\frac{1}{2}}]Du^{n+\frac{1}{2}}\ dx$$

Donc :

$$\|Du^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \leqslant \|Du^n\|.\|Du^{n+\frac{1}{2}}\| + k\|Du^{n+\frac{1}{2}}\|$$

On fait les majorations nécessaires ,ce qui donne enfin :

$$\|Du^{n+\frac{1}{2}}\| \leqslant M_1\|Du^n\| \tag{2.15}$$

- *On fait la même chose pour le problème 2 :*

$$u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}} = k[a(x)\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} + f_2^{n+1}] \tag{2.16}$$

On dérive :

$$Du^{n+1} - Du^{n+\frac{1}{2}} = kD[a(x)\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} + f_2^{n+1}]$$

On multiple par Du^{n+1} :

$$Du^{n+1}.Du^{n+1} = Du^{n+\frac{1}{2}}.Du^{n+1} + kD[a(x)\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} + f_2^{n+1}].Du^{n+1}$$

On intègre sur Ω :

$$\int_\Omega (Du^{n+1})^2\,dx = \int_\Omega Du^{n+\frac{1}{2}}.Du^{n+1}\,dx + k\int_\Omega D[a(x)\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} + f_2^{n+1}]Du^{n+1}\,dx$$

Donc :

$$\|Du^{n+1}\|^2 \leqslant \|Du^{n+\dfrac{1}{2}}\|\|Du^{n+1}\| + k\|Du^{n+1}\|$$

On trouve enfin que $\exists M_2 > 0$ tel que :

$$\|Du^{n+1}\| \leqslant M_2\|Du^{n+\frac{1}{2}}\| \leqslant M_1.M_2\|Du^n\| \tag{2.17}$$

Par récurrence n on trouve que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|Du^n\| < constante \tag{2.18}$$

Ce qui donne enfin que la suite $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ demeure dans un borné dans $H^1(\Omega)$.

Remarque 2.2.4 *On peut par la même procédure montrer que la suite (u^n) demeure dans un borné de $H^2(\Omega)$ pour ceci on utilise la même procédure , pour montrer le lemme suivant.*

Lemme 2.2.5 *Il existe un constante $C_1 > 0$, telle que :$\|D^2u^n\| \leqslant C_1$.*
avec : $D^2u^n = \dfrac{\partial^2 u^n}{\partial x^2}$.

$$\begin{cases} \|D^2u^{n+\frac{1}{2}}\| \leqslant \|D^2u^n\| \\ \|D^2u^{n+1}\| \leqslant \|D^2u^{n+\frac{1}{2}}\| \end{cases}$$

Preuve. *On utilise la même technique que celle utilisée pour montrer que* $\|Du^n\| \leqslant M$ ***le lemme 2.2.3*** .

On prend la formule du première problème :

$$u^{n+\frac{1}{2}} - u^n = k[b(x)\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + f_1^{n+\frac{1}{2}}]$$

On dérive les deux membres par rapport à x

$$Du^{n+\frac{1}{2}} - Du^n = kD[b(x)\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + f_1^{n+\frac{1}{2}}$$

On dérive la deuxième fois les deux membres par rapport à x on trouve :

$$D(Du^{n+\frac{1}{2}}) - D(Du^n) = kD^2[b(x)\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + f_1^{n+\frac{1}{2}}]$$

Alors :

$$D^2u^{n+\frac{1}{2}} - D^2u^n = kD^2[b(x)\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + f_1^{n+\frac{1}{2}}] \tag{2.19}$$

On multiplie (2.19) par $(D^2u^{n+\frac{1}{2}})$ *on obtient :*

$$\langle\frac{\partial^2 u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x^2}\rangle - \langle\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x^2}\rangle = k\langle\frac{\partial^2}{\partial x^2}[b(x)\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + f_1^{n+\frac{1}{2}}], \frac{\partial^2 u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x^2}\rangle$$

On intègre sur Ω *on trouve :*

$$\int_\Omega (D^2u^{n+\frac{1}{2}})^2 dx = \int_\Omega (D^2u^n).(D^2u^{n+\frac{1}{2}}) + kD^2[b(x)Du^{n+\frac{1}{2}} + f_1^{n+\frac{1}{2}}]D^2u^{n+\frac{1}{2}}$$

Alors :

$$\|D^2u^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \leqslant \|D^2u^n\|.\|D^2u^{n+\frac{1}{2}}\| + k\|D^2u^{n+\frac{1}{2}}\|$$

Donc :

$$\|D^2u^{n+\frac{1}{2}}\| \leqslant k_2\|D^2u^n\|$$

- *On fait la même chose pour le problème 2 :*

$$u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}} = k[a(x)\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} + f_2^{n+1}]$$

On dérive les deux membres par rapport à x :

$$Du^{n+1} - Du^{n+\frac{1}{2}} = kD[a(x)\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} + f_2^{n+1}]$$

On dérive la deuxième fois les deux membres par rapport à x :

$$D(Du^{n+1}) - D(Du^{n+\frac{1}{2}}) = kD^2[a(x)\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} + f_2^{n+1}] \tag{2.20}$$

On multiple (2.20) par (D^2u^{n+1}) *, on trouve :*

$$\langle\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2}\rangle - \langle\frac{\partial^2 u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2}\rangle = k\langle\frac{\partial^2}{\partial x^2}[a(x)\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} + f_2^{n+1}], \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2}\rangle$$

On intègre sur Ω *on trouve :*

$$\int_\Omega (D^2u^{n+1})^2 dx = \int_\Omega (D^2u^{n+\frac{1}{2}}).(D^2u^{n+1})^2 dx + k\int_\Omega (D^2[a(x)\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} + f_2^{n+1}]).(D^2u^{n+1})dx$$

Donc :

$$\|D^2u^{n+1}\|^2 \leqslant \|D^2u^{n+\frac{1}{2}}\| + k_1\|D^2u^{n+1}\|$$

On trouve enfin que : $\exists\ m_1 > 0$ *et* $m_2 > 0$ *tq :*

$$\|D^2u^{n+1}\| \leqslant m_1\|D^2u^{n+\frac{1}{2}} \leqslant m_2\|D^2u^n\|$$

par récurrence sur n on trouve que :

$$\|D^2u^n\| \leqslant C_1$$

■

2.2.4 Passage à la limite

D'après le ***le lemme 2.2.1*** *, on peut extraire des sous suites , encore notées :* $u_{ik}, \tilde{u}_k$*, telles que :*

$$\begin{cases} u_{ik} \to u_i \\ \tilde{u}_k \to \tilde{u} \\ dans \;\; L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)) \;\; faible \; étoile \end{cases} \tag{2.21}$$

Lemme 2.2.6 *Lorsque* $k \to 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{u}_k}{\partial t}, \quad demeure \\ dans \; un \; borné \;\; L^\infty(0,T,L^2(\Omega)) \end{cases} \tag{2.22}$$

Preuve. *D'après la méthode de décomposition et par la discrétisation en temps on trouve deux sous problème comme suit :*

le premier sous problème est :

$$u^{n+\frac{1}{2}} - u^n - k[b(x)\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + f_1^{n+\frac{1}{2}}] = 0 \tag{2.23}$$

et le second sous problème est :

$$u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}} - k[a(x)\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} + f_2^{n+1}] = 0 \tag{2.24}$$

ce qui équivaut de (2.23) on trouve :

$$\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial t} - b(x)\frac{\partial u_{1k}}{\partial x} - f_{1k} = 0 \tag{2.25}$$

et de (2.24) on trouve :

$$\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial t} - a(x)\frac{\partial^2 u_{2k}}{\partial x^2} - f_{2k} = 0 \tag{2.26}$$

cela extraire (2.22) , grâce au ***le lemme 2.2.1*** *,on peut alors supposer , grâce aux estimations sur* $\tilde{u}_k$ *, et la compacité de l'injection de* $H^2(\Sigma) \to L^2(\Sigma)$ *, que :*

$$\begin{cases} \tilde{u}_k \to \tilde{u} \\ dans \;\; L^2(\Sigma)\, fort \quad et\, p.p \end{cases} \tag{2.27}$$

mais, d'après la définition des fonctions $\tilde{u}_k$ *et* u_{1k} *on a :*

$$\|\tilde{u}_k - u_{1k}\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leqslant \sup_{0\leqslant n\leqslant N-1} |u^{n+\frac{1}{2}} - u^n|$$

et de même pour les fonctions $\tilde{u}_k$ *et* u_{2k} *, on a :*

$$\|\tilde{u}_k - u_{2k}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant \sup_{0\leqslant n\leqslant N-1} |u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}|$$

et avec (2.23) et (2.24) et ***le lemme 2.2.1*** *,il en résulte que :*

$$\|\tilde{u}_k - u_{1k}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant kc_1 \tag{2.28}$$

de même :

$$\|\tilde{u}_k - u_{2k}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant kc_2 \tag{2.29}$$

donc , avec (2.27) ,on en déduit que l'on peut supposer :

$$\begin{cases} u_{2k} \to \tilde{u}\,, u_{1k} \to \tilde{u} \\ dans \;\; L^2(\Sigma) fort \; et \;\; p.p. \end{cases} \tag{2.30}$$

mais on peut écrire la deuxième égalité comme suit :

$$u_{2k} - u_{1k} - ka(x)\frac{\partial^2 u_{2k}}{\partial x^2} + kf_{2k} = 0$$

d'où ,avec ***le lemme 2.2.1***

$$\|u_{2k} - u_{1k}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant kc_2 \tag{2.31}$$

On peut donc supposer d'après (2.27) , que :

$$\begin{cases} u_{1k} \to \tilde{u} \\ dans \quad L^2(\Sigma) \; fort \quad et \;\; p.p. \end{cases}$$

Alors (avec les notation (2.21)) on trouve :

$u_i = \tilde{u} = u$

- *Le cas des coefficients périodiques et suffisante pour généraliser l'étude . Donc on peut déduire l'existence d'une solution au moins du problème dans le cas des coefficients constantes .*

2.3 L'étude des solutions périodique approches

On utilise le premier sous problème suivant :

$$u^{n+\frac{1}{2}} - u^n = k[b(x)\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + f_1^{n+\frac{1}{2}}] \tag{2.32}$$

- *Si* $f_1 = 0$ *, alors d'après* ***le théorème 1.8.1*** *l'équation de (2.32) s'écrit sous la forme :*

$$y' - \frac{1}{kb(x)}y = 0$$

Donc :

$$y' = \frac{1}{kb(x)}y \tag{2.33}$$

telle que :$b(x+\omega) = b(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Preuve. *Pour trouver la solution de (2.33) on va montrer cette résultat :*

$$\Psi(x) = \Phi(x+\omega) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Soit Φ une matrice fondamentale de solutions pour (2.33) on a :

$$\Phi'(x) = \frac{1}{kb(x)}\Phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.34}$$

Soit Ψ une matrice telle que :

$$\Psi(x) = \Phi(x+\omega) \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.35}$$

d'où :

$$\Psi'(x) = \Phi'(x+\omega)\frac{1}{k(b(x+\omega)}\Phi(x+\omega) = \frac{1}{kb(x)}\Psi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

car b est $\omega-$périodique . Donc Ψ vérifie l'équation (2.33)

De plus , comme Φ est une matrice de solutions , son déterminant est non nul :

$$det(\Phi(x)) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

d'où

$$det(\Psi(x+\omega)) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

par conséquent , Ψ est inversible et vérifie (2.33)

c'est une matrice fondamentale de solutions . ■

Théorème 2.3.1 *On suppose que $b(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

Donc l'équation (1.22) s'écrit :

$$z'' - \frac{1}{ka(x)}z = \frac{1}{ka(x)}f_2 \tag{2.36}$$

Ou a , et f_2 sont des fonctions $\omega-$ périodiques . Alors , (2.36) admet une solution périodique si et seulement si on a :

$$\int_0^\omega \Phi(u)f_2(u)du = 0$$

pour toute solution périodique Φ de l'équation homogène associée à (2.36) .

Chapitre 3

Application Numérique

On a le problème parabolique de réaction diffusion à coefficients périodiques suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin x \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \Sigma = \Omega \times]0, T[\\ u(x,0) = u_0(x) \quad , x \in \Omega \subseteq \mathbb{R} \\ u|_\Gamma = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

On pose $u_0(x) = 1$.
Alors

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin x \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) = 1 \\ u|_\Gamma = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

On à :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sin x \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{3.3}$$

L'équation (3.3) implique que :

$$\frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{k} = sinx \frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Avec $k = \Delta t$.
On pose $\Delta t = 1$.
Alors :
$$u^{n+\frac{1}{2}} - u^n = \sin x \frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} \tag{3.4}$$
De $u^0 = 1$ *on trouve :*
$$u^{\frac{1}{2}} - 1 = \sin x \frac{\partial u^{\frac{1}{2}}}{\partial x} \tag{3.5}$$
On pose $u^{\frac{1}{2}} = y$.
On obtient :
$$y - 1 = \sin x \quad y'.$$
implique que :
$$y' - \frac{1}{\sin x} y = -\frac{1}{\sin x} \tag{3.6}$$

- *Les solutions de l'équation homogène associé à (3.6) sont :*
$$y = \lambda e^{\int \frac{1}{\sin x} dx} = \lambda |\tan \frac{x}{2}| \quad \textit{avec } \lambda \in \mathbb{R} \tag{3.7}$$

- *Les solutions particulière de (3.6) sont :*
$$\bar{y} = \lambda(x) e^{-A(x)} \quad \textit{tq} \;\; A \;\; \textit{primitive de} \;\; -\frac{1}{\sin x}.$$
On obtient :
$$(\lambda' e^{-A} - \lambda A' e^{-A}) - \frac{1}{\sin x} \lambda e^{-A} = -\frac{1}{\sin x}$$
Donc :
$$\lambda' = -\frac{1}{\sin x} e^{A}.$$
On cherche alors λ *primitive de* $\frac{1}{\sin x} e^{A}$ *tq :*
$$\lambda = -\int \frac{1}{\sin x} |\tan \frac{x}{2}| dx$$
On utilise le changement de variable : $x = 2y$
Donc :
$$\lambda = -2 \int \frac{1}{\sin 2y} |\tan y| \; dy$$

$$\lambda = -2 \int \frac{1}{2\sin y \cos y} \frac{|\sin y|}{|\cos y|}\ dy$$

On pose : $\varepsilon = \pm 1$

Alors on trouve :

$$\lambda(x) = \varepsilon \int \frac{1}{\cos^2 y}\ dy = \varepsilon \tan y$$

On remplace la valeur de λ *dans (3.7) , alors la solution s'écrit sous la forme :*

$$y = \varepsilon(\tan \frac{x}{2})^2$$

implique que :

$$u^{\frac{1}{2}} = \varepsilon(\tan \frac{x}{2})^2 \tag{3.8}$$

c'est à dire (3.8) solution de l'équation (3.5) .

avec on a :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{3.9}$$

Alors :

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{k} = \frac{\partial^2 u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x^2}$$

On pose : $\Delta t = 1$ *, alors :*

$$u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} \tag{3.10}$$

On remplace $u^{\frac{1}{2}}$ *dans (3.10) on trouve :*

$$\frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} - u^1 = \varepsilon(\tan \frac{x}{2})^2$$

On pose $u^1 = z$ *on trouve :*

$$z'' - z = \varepsilon(\tan \frac{x}{2})^2 \tag{3.11}$$

Pour résoudre (3.11) on résoudre l'équation homogène suivante :

$$z'' - z = 0 \tag{3.12}$$

On trouve :

$$z(x) = Ae^{-x} + Be^{x}$$

d'après la condition $z(0) = 0$ on obtient :

$$z(x) = A(e^{-x} - e^{x}) \tag{3.13}$$

Pour trouver la solution de (3.11) , on dérive z deux fois et on remplace dans (3.11) :

$$A''(x)(e^{-x} - e^{x}) + 2A'(x)(-e^{-x} - e^{x}) + A(x)(e^{-x} - e^{x}) - A(x)(e^{-x} - e^{x}) = \varepsilon(\tan\frac{x}{2})^2$$

On résoudre l'équation homogène suivante :

$$A''(x)(e^{-x} - e^{x}) + 2A'(x)(-e^{-x} - e^{x}) + A(x)(e^{-x} - e^{x}) - A(x)(e^{-x} - e^{x}) = 0$$

$$A''(x)(e^{-x} - e^{x}) = -2A'(x)(-e^{-x} - e^{x})$$

Donc :

$$\int \frac{A''(x)}{A'(x)}\, dx = -2\int \frac{(-e^{-x} - e^{x})}{(e^{-x} - e^{x})}\, dx$$

Alors :

$$\log A'(x) = -2\int \frac{(e^{x} + e^{-x})}{(e^{x} - e^{-x})} = -2\int \coth x\; dx = -2\log|\sinh x|$$

$$A'(x) = |\sinh x|^{-2}$$

implique que :

$$A(x) = \int \frac{1}{|\sinh x|^2}\, dx = \varepsilon \coth x$$

On remplace la valeur de $A(x)$ dans (3.13) , alors la solution s'écrit sous la forme :

$$z(x) = \varepsilon \coth x(e^{-x} - e^{x})$$

Donc :

$$u^1 = \varepsilon \coth x(e^{-x} - e^{x})$$

Pour trouver $u^{\frac{3}{2}}$, on remplace u^1 dans (3.4) on obtient :

$$u^{\frac{3}{2}} - \varepsilon \coth x(e^{-x} - e^{x}) = \sin x\frac{\partial u^{\frac{3}{2}}}{\partial x}$$

On pose : $u^{\frac{3}{2}} = y$
On trouve :

$$y + \varepsilon \coth x(e^{-x} - e_{x}) = \sin x y'$$

Donc :

$$\sin x y' - y = \varepsilon \coth x(e^{-x} - e^{x}) \tag{3.14}$$

on a la solution de l'équation homogène s'écrit sous la forme :

$$y = c|\tan\frac{x}{2}| \tag{3.15}$$

Il reste de calculer $c(x)$, on écrit :

$$y = c(x)|\tan\frac{x}{2}| \tag{3.16}$$

Donc on dérive y de (3.16) et on remplace dans (3.14) on trouve :

$$c'(x) = \varepsilon \coth x(e^{-x} - e^{x})(\tan\frac{x}{2}$$

Alors :

$$c(x) = \varepsilon \int \coth x(e^{-x} - e^{x})(\tan\frac{x}{2}\ dx$$

$$c(x) = -\varepsilon \int (\frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}})(e^{x} - e^{-x})(\tan(\frac{x}{2}))\ dx$$

$$c(x) = -\varepsilon \int (e^{x} + e^{-x}) \tan\frac{x}{2}\ dx$$

On utilise le changement de variable , on pose : $\frac{x}{2} = y$ alors $dx = 2dy$:

$$c(x) = -2\varepsilon \int (e^{2y} + e^{-2y}) \tan y\ dy$$

On peut écrire :

$$c(x) = -4\varepsilon \int \frac{(e^{2y} + e^{-2y})}{2} \tan y\ dy$$

Donc on trouve :

$$c(x) = -4\varepsilon \int (1 + 2\sin^2 y) \tan y\ dy$$

implique que :

$$c(x) = -4\varepsilon \int (3 - \cos^2 y)\frac{\sin y}{\cos y}\ dy$$

$$c(x) = -12\varepsilon[-\log|\cos y|] - 4\varepsilon \int \sin 2y\ dy$$

$$c(x) = 12\varepsilon \log(\cos\frac{x}{2}) + 2\varepsilon \cos x \, dx$$

On remplace $c(x)$ dans (3.16) , on trouve la solution $u^{\frac{3}{2}}$:

$$u^{\frac{3}{2}} = \varepsilon[12\log(\cos\frac{x}{2}) + 2\cos x] \tan\frac{x}{2}$$

Pour trouver u^2 , on remplace $u^{\frac{3}{2}}$ dans (3.10) on obtient :

$$\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} - u^2 = -u^{\frac{3}{2}} = \varepsilon[12\log(\cos\frac{x}{2}) + 2\cos x] \tan\frac{x}{2}$$

On pose $u^2 = z$ on trouve :

$$z''(x) - z(x) = \varepsilon[12\log(\cos\frac{x}{2}) + 2\cos x] \tan\frac{x}{2} \tag{3.17}$$

la solution homogène de (3.17) est :

$$z(x) = A(e^{-x} - e^{x})$$

on écrit $z(x)$ comme suite :

$$z(x) = A(x)(e^{-x} - e^{x})$$

On dérive z deux fois et on remplace dans (3.17) on trouve la solution comme dans u^1 . De même manière on calcule :

$$u^{\frac{5}{2}}, u^3, u^{\frac{7}{2}}, ...u^n.$$

On trouve que les solutions sont périodique , et par récurrence on trouve u^n.
Donc d'après la méthode de décomposition on trouve la suite $\{u^0, u^{\frac{1}{2}}, u^1, u^{\frac{3}{2}}, u^2, ..., u^n\}$, qui converge vers la solution u , par la méthode de compacité ce qui donne la convergence forte de la suite de solutions approchés d'où l'existence d'une solution .
Et pour l'unicité d'une solution ,on applique la méthode classique " lemme de Gronwall "

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons étudié un problème de réaction diffusion parabolique à coefficient périodiques et bornés, nous avons commencé par traiter le cas où les coefficients sont périodique.
Pour ceci nous avons utilisé la méthode de décomposition qui consiste à décomposer le problème initial en deux sous problèmes qu'on a étudié.
Cette étude a été basée sur une semi discrétisation en temps à pas fractionnaire, cette méthode a été introduite par Temam, elle a donnée une suite de solutions approches, nous avons mis en évidence des estimations à priori.

Pour l'unicité nous avons appliqué une méthode classique on part du fait que le problème admet deux solutions , l'utilisation du lemme de Gronwall montre que les deux solutions coïncident , d'où l'unicité .
Pour les coefficients constantes , lorsqu'il existe une équivalence entre les coefficients périodiques et constantes.
Le cas des coefficients périodiques et suffisante pour généraliser l'étude . Donc on peut déduire l'existence d'une solution au moins du problème .
pour l'unicité , on a utilisé la même méthode quelle a utilisée dans des coefficients périodiques.
enfin et pour valider notre travail , nous avons fait une application sur un exemple simple .

Bibliographie

[1] *R . Adams . Sobolev Spaces , New York : Academic Press (1975) .*

[2] *H . Bresis . Analyse fonctionnelle , Sobolev Spaces and Patial Différentiable Equations, Springer (2010) .*

[3] *H . Bresis . Analyse fonctionnelle , Théorie et Applications , Masson (1983) .*

[4] *R . Chill .Quelques méthodes de résolution pour les équations non linéaires , Laboratoire de Mathématiques et Applications de Metz . 2007/8.*

[5] *J . L . Demially - Analyse numérique et équations différentielles , OPU . Alger (1993) .Introduction générale.*

[6] *F. Demmengel et G . Demengel , Espaces fonctionnels utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles , ISBN CNRS- Édition 2007 .*

[7] *S.Doucoure .Methode de décomposition de domaines pour les équations de Navier-Stokes en jonction fleuve / Océan et les lois de conservation scalaires,UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL , CH-2009 (suisse).*

[8] *J.L.Lions , Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod , Gauthier Villars ,Paris , 1969.*

[9] *J-L. Lions - Équations différentielles opérationnelles, Springer-Verlag, Berlin (1961).*

[10] *K. Marie - Perturbation d'un système différentiel ayant une solution périodique, 2007.*

[11] SAID .M.S - Résolution d'un système non linéaire en deux dimensions intervenant en dynamique des Gaz par la méthode d'approximation successive Actes de l'université UHA université de Mulhouse France 2006 N° pp.137-144.

[12] M . Samuelides , L . Touzillier - Analyse fonctionnelle , Cepadues - éditions, n° 255 .(1989).

[13] R . Temam - Sur la stabilité et la convergence de la méthode des pas fractionnaires, Annali di Mat . Pur. ad Applic , LXXIV (1968) , p . 191-380.

[14] R. Temam - Approximation d'équations aux dérivées partielles par des méthodes de décomposition. Séminaire N.Bourbaki. (1969-1970), exp. n° 381, p. 1-15.

ملخص:

في هذا العمل قمنا بدراسة الحلول الدورية التّقريبية لمسألة (قطع مكافئ الانتشار ورد الفعل)، مع شروط ابتدائية وشروط حدّية.

ولتسهيل هذه الدّراسة: استخدمنا طريقة تفكيك المؤثّرات التي تفكك المسألة الأصلية إلى عدة مسائل جزئية متقاربة لدراستها في نفس الوقت ؛ حيث قمنا بتقسيم الزمن إلى خطوات جزئيّة متماثلة من أجل الحصول على سلسلة من الحلول التقريبية تعطينا تقديرات مسبقة ، مرورا إلى النّهاية التي تتم فيها دراسة تقارب الحلّ بقوة انطلاقا من نظرية التّراص؛ وذلك بتقارب سلسلة الحلول المشكّلة نحو حل المسألة المطروحة.

أمّا البرهنة على وحدانية الحل فتتم باستخدام (Lemme de Gronwall) .

الكلمات المفتاحية:

طريقة التّراص ، رد فعل الانتشار ، القطع المكافئ ، حلول دورية ، طريقة التفكيك.

Abstract:

In this work, we studied the periodic solutions of parabolic reaction diffusion problems. For this, we used the decomposition method of operators that breaks the original problem into several problems, that will be coupled approached simultaneously study this will be done by a semi time discretization end we will pass to the limit.

Key words : **{Compactness method , diffusion reaction, parabolic problems, periodic solutions , decomposition method .}**

Résumé:

Dans ce travail nous avons étudié les solutions périodiques des problèmes paraboliques de réaction diffusion.

Pour ceci, nous avons utilisé la méthode de décomposition des opérateurs, qui décompose le problème initial en plusieurs problèmes approchés couplés, qui seront étudié simultanément.

Pour Ceci nous avons fait , une semi discrétisation en temps en fin on passera à la limite, Puis on a construit une suite de solutions approchées qui convergent vers une solution du problème, le lemme de Gronwall nous a permis de montrer l'unicité.

Mots clés : **{Méthode de compacité, réaction diffusion, problèmes paraboliques, solutions périodiques, méthode de décomposition.}**