



**UNIVERSITE KASDI MERBAH  
OUARGLA**

Faculté de Mathématiques et des Sciences de  
Matière

N° d'ordre :  
N° de série :

**DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES**

**MASTER**

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par : Belkacemi Messaoud

Thème

**Sur un Problème aux limites de Navier-Stokes**

Soutenu publiquement le : 04/06/2015

Devant le jury composé de :

Mr. CHACHA Djamel Ahmed	Prof. université de KASDI Merbah - Ouargla	Président
Mr. Merabet Ismaïl	M. C. (B) université de KASDI Merbah - Ouargla	Examineur
Mr. Meflah Mabrouk	M. C. (A) université de KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

# Dédication

A mes parents,  
A mes soeurs,  
A mes frères,  
A toute ma famille.

# Remerciement

*Nous remercions DIEU le tout, puissant qui nous a guidé dans l'accomplissement de ce travail.*

*Ce travail à été réalise sous l'encadrement mon professeur ” **Meflah Mabrouk** ” à l'université de **Ouargla** , a qui nous voudrons exprimer nos profonde gratitude pour ses disponibilités, ses aides leurs conseils pour réaliser ce travail.*

*Comme je tient à remercier vivement, docteur DJMEL AHMED CHACHA professeur à l'université de Kasdi Merbeh Oaurgla pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de ce mémoire.*

*Mes remerciements vont également à Docteur MERABET Ismail pour avoir accepté d'examiner ce travail*

*Ainsi qui' à tous les professeurs de l'université de **Ouargla** .*

*Nous remercions vivement nos familles, et nos parents pour leurs aides et leurs soutiens morales.*

*Nous tenons à remercier tous les étudiants de le promotion 2014/2015 de Master Maths de l'université de **Ouargla***

# Notations et Conventions

$u(x, t)$  : La vitesse.

$\mu$  : La viscosité dynamique.

$\rho$  : La masse volumique.

$\gamma$  : l'accélération.

$T$  : La température.

$p$  : La pression.

$Re$  : Nombre de Reynolds.

$\nabla(u) : \nabla(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$  : le produit scalaire matricielle.

$\partial\Omega$  : la frontière de  $\Omega$ .

$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$  : le gradient.

$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$  : laplacien.

$div u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \in \mathbb{R}$  : la divergence .

$(u \cdot \nabla)u = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbb{R}^n$  : le terme de convection

$\mathcal{V} := \{u \in \mathcal{D}(\Omega) : div u = 0\}$ .

$V = \{v \in (H_0^1(\Omega))^n, div v = 0\}$

$H = \{v \in (L^2(\Omega))^n, div v = 0, tr(v)_{\partial\Omega} = 0\}$

$L^p(0, T; X) = \{f : ]0, T[ \rightarrow X, telle que \int_0^T \|f(t)\|_X^p dt < \infty\}$

$\sigma = 2\nu D(u) - pI_d$  : le tenseur de contraintes de Cauchy.

$D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^t)$  : tenseur de déformation.

# Table des matières

Dédication	i
Remerciement	ii
Notations et Conventions	iii
Introduction	1
<b>1 Les équations de Navier-Stokes</b>	<b>3</b>
1.1 Rappels d'analyse fonctionnelle . . . . .	3
1.1.1 Topologie faible . . . . .	3
1.1.2 Espaces de Sobolev . . . . .	4
1.2 Cinématique . . . . .	7
1.3 Les équations de conservations . . . . .	9
1.3.1 Conservation de la masse . . . . .	9
1.3.2 Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	9
1.4 Écoulements incompressibles . . . . .	10
1.4.1 Équations de Navier-Stokes . . . . .	10
1.4.2 Nombre de Reynolds . . . . .	12
<b>2 Problème de Stokes</b>	<b>15</b>
2.1 Le problème continu . . . . .	15
2.1.1 Formulation mixte du problème de Stokes . . . . .	15
2.1.2 L'existence et l'unicité . . . . .	17
2.2 Le problème discret . . . . .	18
2.2.1 Forme matricielle . . . . .	19
2.3 Méthode de différence finis du problème de Stokes . . . . .	19
2.4 Schémas MAC pour le problème de Stokes . . . . .	20
2.4.1 Résolution du système discrétisé de Stokes . . . . .	21
2.5 La simulation le problème de Stokes par free fem++ . . . . .	22
<b>3 Problème de Navier-Stokes</b>	<b>24</b>
3.1 Position du problème . . . . .	24

3.1.1	Formulation variationnelle . . . . .	24
3.2	Étude de l'existence et de l'unicité . . . . .	25
3.3	Discrétisation d'équations de Navier-Stokes par la méthode des éléments finis	27
3.3.1	Discrétisation en temps . . . . .	27
3.4	Discrétisation par la méthode des différences finis . . . . .	28
3.5	Forme matricielle . . . . .	30
3.6	Résolution du système discrétisé de Navier-Stokes . . . . .	30
3.7	La simulation le problème de Navier-Stokes par free fem++ . . . . .	31
<b>Conclusion</b>		<b>34</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>36</b>

# Table des figures

- 2.1 Solution numérique du problème de Stokes par free fem++ . . . . . 23
- 3.1 Solution numérique du problème de Navier-Stokes par free fem++ . . . . . 33
- 3.2 Solution numérique du problème de Navier-Stokes par free fem++ . . . . . 33

# Introduction

Les équations de Stokes et de Navier-Stokes modélisent la dynamique de fluides visqueux incompressibles. L'objectif de ce travail est d'étudier l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème de Navier-Stokes .

Le fluide est caractérisé localement par deux variables : sa vitesse  $u(x, t) = (u_i(x, t))_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$  et sa pression  $p = p(x, t) \in \mathbb{R}$ , définies pour  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $t \in ]0, T[$ . Les équations de Navier-Stokes sont définies en deux groupes. Le premier est la réalisation de la seconde loi de la dynamique de Newton (ou de la conservation de la quantité de mouvement) et le second est la traduction de l'incompressibilité du fluide (ou l'expression de la conservation de la masse) :

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right) - \nu \Delta u + \nabla p = f \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u(x, 0) = u_0 \\ u(x, t) = g(x, t) \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

La densité  $\rho > 0$  du fluide est choisie constante et  $\nu > 0$  désigne la viscosité dynamique du fluide. Enfin,  $f = (f_1, \dots, f_n)$  représente une densité massique de forces extérieures.

Dans le premier chapitre, nous donnons des rappels d'analyse fonctionnelle ainsi que fournir une brève introduction aux équations de la mécanique des fluides que l'on utilisera par la suite.

Dans le deuxième chapitre on étudie le problème de Stokes. Pour on établie les méthodes des éléments finis, car cette équation est linéaire, d'abord on présente le problème continu et on cherche a formulation variationnelle mixte, on utilise le condition "inf-sup" pour montrer l'existence et l'unicité de solution. En suite nous donnons le problème discrétisé pour approximer  $(u, p)$  par des fonctions  $(u_h, p_h)$  dans les sous espaces discrets et donner quelques résultats importants de l'existence et l'unicité, convergence et l'ordre de convergence de solution.

Dans le troisième chapitre on position le problème de Navier-Stokes avec le condition aux limite, ce problème non linéaire. On utilisera la formulation variationnelle pour prouver l'existence d'une solution faible par le méthode de Galerkin. On obtient alors il existe une solution unique dans le cas de la dimension d'espace  $n = 2$ , mais dans le cas  $n = 3$  l'unicité une question ouverte.

Enfin on considère les équations de Navier-Stokes incompressibles posées dans un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , on choisit désormais le carré unité comme domaine c'est-à-dire  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ .



On va utiliser un schéma de type MAC pour les équations de Navier-Stokes incompressibles. Ce schéma est discrétisé en temps et il est obtenu en linéarisant (en temps) le terme non linéaire des équations de Navier-Stokes.

# Chapitre 1

## Les équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes forment un modèle mathématique qui décrit l'écoulement d'un fluide.

Dans ce chapitre nous montrons comment les équations de Navier-Stokes, sont dérivées à partir de lois de conservation de la masse et conservation de la quantité de mouvement. Nous introduisons des notions utiles de cinématique.

### 1.1 Rappels d'analyse fonctionnelle

#### 1.1.1 Topologie faible

**Définition 1** On note  $X$  un espace vectoriel normé,  $X'$  son dual topologique. On appelle topologie faible sur  $X$  et que l'on note  $\sigma(X, X')$ , la topologie la moins fine rendant continues toutes les formes linéaires  $f \in X'$ .

**Définition 2** Si  $x_n \rightarrow x$  dans  $\sigma(X, X')$ , on notera  $x_n \rightharpoonup x$  et on dira que  $x_n$  converge faiblement vers  $x$  dans  $X$ .

**Proposition 3** Soit  $X$  un espace de Banach et  $(x_n)$  une suite d'éléments de  $X$  alors :

$$x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow f(x_n) \rightarrow f(x), \forall f \in X'$$

Soit  $X$  un espace de Banach,  $X'$  son dual,  $X''$  son bidual topologique muni de la norme :

$$\|\xi\|_{X''} = \sup_{\substack{f \in X' \\ \|f\| \leq 1}} |\xi(f)|$$

On a une injection canonique  $J : X \rightarrow X''$ . En effet tout élément  $x \in X$  définit un élément  $J_x \in X''$  par :

$$J_x(f) = f(x)$$

$J_x$  est bien une forme linéaire continue sur  $X$  puisque :

$$|J_x(f)| = |f(x)| \leq \|x\|_X \|f\|_{X'}$$

En fait  $\|J_x\|_{X''} = \|x\|_X$  car :

$$\|J_x\|_{X''} = \sup_{\substack{f \in X' \\ \|f\| \leq 1}} |J_x(f)| = \sup_{\substack{f \in X' \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)| = \|x\|_X$$

**Corollaire 4** Soit  $X$  un espace de Banach séparable et soit  $\{f_n\}$  une suite bornée dans  $X'$ . Alors, il existe une sous-suite extraite  $\{f_{n_k}\}$  qui converge pour la topologie  $\sigma(X', X)$ . C'est à dire :

$$\langle f_{n_k}, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \forall x \in X$$

**Définition 5** L'espace  $X$  est dit réflexif, si  $J(X) = X''$ .

**Théorème 6** Soit  $X$  un espace de Banach réflexif, alors toute suite bornée dans  $X$  admet au moins une sous-suite faiblement convergente

## 1.1.2 Espaces de Sobolev

Soit  $(X, \|\cdot\|_X)$  un espace de Banach,  $1 \leq p < \infty$  et  $T > 0$ . On définit l'espace  $L^p(0, T; X)$  comme suit :

$$L^p(0, T; X) = \{f : ]0, T[ \rightarrow X, \text{ tell que } \int_0^T \|f(t)\|_X^p dt < \infty\}$$

cet espace est munit de la norme :

$$\|f\|_{L^p(0, T; X)} = \left( \int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

et pour  $p = \infty$ , on pose :

$$\|f\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in ]0, T[} \text{ess} \|f(t)\|_X$$

**Propriété 7** (i) Pour  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $L^p(0, T; X)$  est un espace de Banach et on particulier,  $L^2(0, T; X)$  est un espace de Hilbert, lorsque  $X$  est un espace de Hilbert.

(ii) Pour  $1 < p < \infty$  et si  $X$  est réflexif, alors  $L^p(0, T; X)$  est un espace réflexif.

(iii) Pour  $1 \leq p < \infty$  et si  $X$  séparable, alors  $L^p(0, T; X)$  est aussi séparable.

## Espaces de Sobolev d'ordre entier

**Définition 8** Soit  $p$  un réel,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $m$  un entier naturel.

On appelle espace de Sobolev d'ordre  $m$  et on note  $H^m(\Omega)$  l'ensemble :

$$H^m(\Omega) = \{u \text{ mesurable, tel que } D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\},$$

où

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n}} u, \text{ désigne la dérivée d'ordre } \alpha \text{ au sens des distributions avec.}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \text{ tel que } |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

Quelques propriétés des espaces  $H^m(\Omega)$

(i) On munit l'espace  $H^m(\Omega)$  du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall u, v \in H^m(\Omega)$$

La norme associée étant donnée par :

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u \in H^m(\Omega)$$

de plus, il est bien connu que cet espace est un espace de Hilbert.

(ii) Pour  $m = 0$  on a  $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$  et pour tout  $m_1 > m_2$ , on a :  $H^{m_1}(\Omega) \subset H^{m_2}(\Omega)$  avec injection continue.

(iii) Pour tout  $m \geq 0$ ,  $H^m(\Omega)$  est un espace séparable.

(iv) Pour tout  $m \leq 0$ , nous désignons par :  $H_0^m(\Omega)$  la fermeture de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H^m(\Omega)$  :

$$H_0^m(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)} \text{ dans } H^m(\Omega)$$

et par  $H^{-m}(\Omega)$  le dual topologique de  $H_0^m(\Omega)$ .

(v) Grâce aux applications traces, que nous allons voir dans la suite, les espaces  $H_0^m(\Omega)$  peuvent être définis comme suit :

$$H_0^m(\Omega) = \{u \in H^m(\Omega) \text{ telle que } \frac{\partial^j u}{\partial n_j} = 0, \forall j = 0, \dots, m-1\}$$

où :  $\frac{\partial}{\partial n}$  est la dérivée normale de  $u$  suivant la normale extérieure à  $\Gamma = \partial\Omega$  :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) n_i \quad \forall x \in \Gamma$$

## Formule de Green

(1) Pour tout champ scalaire  $u, v$  réguliers on a

$$\int_{\Omega} -\Delta u v dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma$$

où  $n$  est la normale unitaire extérieure à  $\Omega$

(2) Pour tous champs vectoriels  $v, w$  réguliers, on a

$$\int_{\Omega} -\Delta u v dx = \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma$$

Avec

$$\nabla u : \nabla v = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

**Théorème 9 (Inégalité de Poincaré)** *On suppose que  $\Omega$  est un ouvert borné. Alors il existe une constante  $C$  (dépendant de  $\Omega$  et  $p$ ) telle que :*

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p} \forall u \in W^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty)$$

## Les espaces de fonctions à divergence nulle

Soit tout d'abord

$$\mathcal{V} := \{u \in \mathcal{D}(\Omega) : \operatorname{div} u = 0\}.$$

On définit  $H$  et  $V$

$H$  est la fermeture de  $\mathcal{V}$  dans  $L^2(\Omega)$

$V$  est la fermeture de  $\mathcal{V}$  dans  $H_0^1(\Omega)$

Les espaces  $H$  et  $V$  sont des sous espaces fermés de  $L^2(\Omega)$  et  $H_0^1(\Omega)$ .

Ce sont donc des espaces de Hilbert séparables.

## Caractérisation du gradient d'une distribution

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $P$  une distribution dans  $\Omega$ ,  $P \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . On prend  $v \in \mathcal{V}$  on obtient

$$\langle \nabla P, v \rangle = \sum_{i=1}^n \langle D_i P, v \rangle = - \sum_{i=1}^n \langle P, D_i v \rangle = - \langle P, D_i v \rangle = 0 \quad (1.1)$$

**Théorème 10 (de Rham)** *Soit  $q \in (\mathcal{D}'(\Omega))^n$  telle que*

$$\sum_{i=1}^n \langle q_i, \varphi_i \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in (\mathcal{D}(\Omega))^n \text{ telle que } \sum_{i=1}^n \partial_i \varphi_i = 0.$$

*Alors il existe  $f \in \mathcal{D}'(\Omega; E)$  telle que :  $\forall i, q_i = \partial_i f$*

## 1.2 Cinématique

On considère un ensemble des particules, qui, à l'instant  $t=0$  occupe un espace  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ . Chaque particule est repérée par sa position  $X \in \Omega_0$ .

les particules sont un mouvement, a l'instant  $t$ , le domaine  $\Omega_0$  s'est déplacé  $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$ . Au cours du temps, chaque particule peut être repérée par :

- (i) La position  $X \in \Omega_0$  qu'elle avait initialement (configuration de Lagrange).
- (ii) La position  $x \in \Omega_t$  qu'elle occupe à l'instant  $t$  (configuration d'Euler).

L'utilisation l'une ou de autre configuration donne lieu de description différente du mouvement :

### Description Lagrangienne

On se réfère par chacune des particules que l'on suit dans son mouvement. Pour cela, on utilise les variables Lagrangiennes  $X_1, X_2, X_3$  et  $t$ . La position des particules au temps  $t$  est donnée par la fonction  $\phi$  :

$$\phi = \phi(X, t) \tag{1.2}$$

Pour un temps  $t$  donnée,  $\phi(\cdot, t)$  envoie  $\Omega_0$  sur  $\Omega_t$ . Nous supposons que cette application est bijective, et que la fonction  $(X, t) \mapsto \phi(X, t)$  est continûment dérivable.

### Description Eulérienne

On se place en un point  $M \in \mathbb{R}^3$  fixé et on se réfère aux particules qui passent en ce point. Les variables utilisées sont appelées variables d'Euler. Il s'agit de  $x_1, x_2, x_3$  et  $t$ . La fonction qui permet de retrouver les particules observées est notée  $\varphi$  :

$$\varphi = \varphi(x, t). \tag{1.3}$$

Pour un temps  $t$  donné,  $\varphi(\cdot, t)$  envoie  $\Omega_t$  sur  $\Omega_0$ . Cette application est bijective et nous supposons que la fonction  $(x, t) \mapsto \varphi(x, t)$  est continûment dérivable.

### Dérivée particulaire

On appelle dérivée particulaire d'une quantité associée à une particule la dérivée temporelle quand on suit la particule dans son mouvement. En coordonnées lagrangiennes, cette dérivée s'écrit naturellement  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ .

En revanche, en notation eulérienne, la dérivée partielle ne tient pas compte du fait que la particule qui passe par  $X$  à l'instant  $t$  est en mouvement et que ce mouvement contribue

à la variation temporelle de  $\varphi$ . La bonne notion de dérivée temporelle en eulérien est celle de dérivée particulaire, notée  $\frac{D\varphi}{Dt}$

$$\begin{aligned}\frac{D\varphi}{Dt}(X(x, t), t) &= \frac{d}{dt}(\varphi(X(x, t), t)) \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial t}(X(x, t), t) + \frac{\partial X}{\partial t}(X(x, t), t) + \nabla\varphi(X(x, t), t) \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial t}(X(x, t), t) + u(X(x, t), t) + \nabla\varphi(X(x, t), t)\end{aligned}$$

où  $u$  désigne le champ de vitesse. Dans toute la suite on ne travaillera plus qu'en coordonnées eulériennes.

### Dérivée d'une intégrale

Considérons l'ensemble des particules à l'instant  $t$  dans une région  $\omega(t)$  contenue dans  $\Omega_t$ , et suivons cet ensemble de particules lorsque  $t$  varie.

Considérons une quantité  $K(t)$  attachée à  $\omega(t)$  par :

$$K(t) = \int_{\omega(t)} k(x, t) dx \quad (1.4)$$

Où la fonction  $k(x, t)$  est donnée. Nous posons alors le problème : comment calculer  $\frac{dK(t)}{dt}$ . Avant de donner les résultats, notons que la difficulté du problème réside dans le fait que le domaine d'intégration est entraîné dans un mouvement du milieu continu par le champ de vitesse  $u(x, t)$ . Si  $\omega(t)$  était fixe, le problème serait celui de la dérivation sous signe intégrale, problème qui ne pose pas de difficulté dès lors que la fonction  $k(x, t)$  possède des dérivées partielles bornées dans  $\omega(t)$ . Dans les cas qui nous intéressent ici la variation de  $K(t)$  est due :

- (i) à la variation de la fonction à intégrer  $k(x, t)$ .
- (ii) au fait que le domaine d'intégration  $\omega(t)$  est en mouvement.

**Théorème 11** *Sous le hypothèse de régularité :  $k$  et  $u$  continue dans  $\overline{\Omega} \times (0, t_1)$  et à dérivées partielles bornées, on a :*

$$\frac{dK}{dt} = \int_{\omega(t)} \left[ \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (k u_i) \right] dx, \quad \forall t \in (0, t_1) \quad (1.5)$$

*c-à-dire*

$$\frac{dK}{dt} = \int_{\omega(t)} \frac{\partial k}{\partial t} dx + \int_{\partial\omega_t} k u \cdot n dx, \quad (1.6)$$

Où  $n$  est la normale extérieure unitaire à  $\partial\omega(t)$ .

**Preuve.** Voir [3] ■

## 1.3 Les équations de conservations

On va établir ici les équations décrivant le mouvement d'un fluide dans un domaine de  $\mathbb{R}^3$ , l'équation de conservation de la masse et l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

### 1.3.1 Conservation de la masse

On se donne un ensemble de particules que l'on suit dans leur mouvement. On note  $\Omega_t$  le volume défini par ces particules à l'instant  $t$ . Le nombre de particules étant constant, la masse du système  $m(t)$  l'est aussi. Ainsi, en coordonnées Eulériennes :

$$\frac{dm(t)}{dt}.$$

Or  $m(t) = \int_{\Omega_t} \rho(X, t) dX$ . L'équation de conservation de la masse s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(X, t) dX = 0$$

D'après le théorème 1.1, on obtient :

$$\int_{\Omega_t} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho u) \right) = 0$$

Cette équation devant être vraie à tout instant et pour n'importe quel ensemble de particules  $\Omega_t$ , on en déduit l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho u) = 0 \quad \forall t, \forall X \in \Omega_t. \quad (1.7)$$

Cette équation est aussi appelée équation de continuité.

### 1.3.2 Conservation de la quantité de mouvement

On se donne un fluide de masse volumique  $\rho$ , de vitesse  $v$  dans un volume  $\Omega_t$  s'écrit :

$$\int_{\Omega_t} \rho u dX.$$

D'après le théorème fondamental de la dynamique, la variation temporelle de quantité de mouvement d'un volume est égale à la somme des forces extérieures qui s'appliquent sur ce volume. On compte les forces volumiques

$$\int_{\Omega_t} \rho f dX.$$

Où  $f$  désigne la densité volumique de force, et les forces de contact

$$\int_{\partial\Omega_t} \gamma(s) ds,$$



Où  $\gamma$  est la contrainte surfacique.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho u dX = \int_{\Omega_t} \rho f dX + \int_{\partial\Omega_t} \gamma(s) ds,$$

On s'intéresse maintenant à la contrainte  $\gamma$ . Le théorème de Cauchy établit que l'on peut définir le tenseur des contraintes  $\sigma$  par la relation  $\gamma = \sigma \nu$ , où  $\nu$  est la normale extérieure à  $\partial\Omega_t$ . Le terme de bord de l'équation de conservation de la quantité de mouvement se met alors sous la forme :

$$\int_{\Omega_t} \operatorname{div} \sigma ds,$$

et on peut alors avoir une relation locale :

$$\frac{d\rho u}{dt} + \rho u \operatorname{div} u = \rho f + \operatorname{div} \sigma \quad (1.8)$$

Afin d'expliciter le tenseur des contraintes, on commence par introduire le tenseur des déformations :

$$D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^t)$$

Quand le fluide est au repos, la seule contrainte à laquelle il est soumis est la pression hydrostatique, c'est-à-dire  $-pId$ . Quand le fluide est en mouvement, d'autres contraintes surfaciques viennent s'ajouter, et on a la relation :

$$\sigma = \sigma_0 - pId \quad (1.9)$$

On va supposer que l'on travaille par la suite uniquement avec des fluides newtoniens. Cela veut dire que  $\sigma_0$  dépend de façon linéaire et isotrope du tenseur des déformations  $D(u)$ . Sous ces hypothèses, la relation entre  $\sigma_0$  et  $D(u)$  se met sous la forme :

$$\sigma_0 = 2\mu D(u) + \lambda \operatorname{div} u Id.$$

Où  $\mu$  et  $\lambda$  sont deux coefficients réels. On reporte alors cette relation dans l'équation (1.8) et on obtient l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{d\rho u}{dt} + \rho u \operatorname{div} u - \mu \Delta u + (p - (\lambda + \mu) \operatorname{div} u) = \rho f. \quad (1.10)$$

## 1.4 Écoulements incompressibles

### 1.4.1 Équations de Navier-Stokes

On considérerons des fluides Newtonien incompressibles, d'écoulement de fluides, on appelées équations de Navier-Stokes .

## Fluides de Newtoniens

**Définition 12** On dit q une fluide est Newtonien si la relation de comportement qui donne  $\sigma$  en fonction de  $D$  est affine.

De manière générale, il a été établi expérimentalement, que pour des fluide quelconque, le tenseur  $\sigma$  vérifie les condition (i), (ii) et (iii) ci dessous :

- (i)  $\sigma$  est une fonction du tenseur des vitesse de déformation, i.e.  $\sigma(M) = \phi(D(M))$ .
- (ii) La fonction  $\phi$  introduite en (i) est isotrope, c'est-à- dire :  $\forall Q$  matrice de rotation :  
$$\phi(QDQ^t) = Q\phi(D)Q^t.$$
- (iii)  $\sigma$  dépend de manière affine.

### La loi d'incompressibilité du fluide

Un écoulement est dit incompressible si, pour chaque particule de fluide, la masse volumique est constante le long de la trajectoire. On écrit alors

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \tag{1.11}$$

On reporte cette égalité dans l'équation de conservation de la masse (1.7) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0 &\Leftrightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} u = 0 \\ &\Rightarrow \operatorname{div} u = 0 \end{aligned}$$

La divergence de la vitesse est nulle dans un fluide incompressible. Cette équation, ainsi que l'équation (1.11), vont permettre de simplifier l'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.10), qui s'écrit alors :

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right) - \mu \Delta u + \nabla p = \rho f$$

Les deux équations auxquelles on a abouti forment les équations de Navier-Stokes incompressibles :

$$\begin{cases} \rho \frac{Du}{Dt} - \mu \Delta u + \nabla p = \rho f \\ \operatorname{div} v = 0 \end{cases} \tag{1.12}$$

### Conditions initiales et conditions aux limites

Nous supposons que la vitesse initiale des particule est donnée, i.e.

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x \in \Omega_0.$$

Et nous considérons uniquement les cas où le fluide occupe tout le volume d'un récipient aux parois rigides. Dans une situation, le domaine fluide  $\Omega_t$  reste constamment égal à  $\Omega$ . Nous supposons aussi que le fluide est visqueux et par conséquent que les conditions aux limites sont des conditions d'adhérence sur les parois, i.e.

$$u(x, t) = 0, \quad \partial\Omega \times [0, T]. \quad (1.13)$$

### Les système de Navier-Stokes

Afin de simplifier encore l'équation (1.10), nous posons :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho_0}, \quad P = \frac{p}{\rho_0}.$$

Le nombre  $\nu$  est appelle coefficient de viscosité cinématique et la fonction  $P$  est la pression normalisée.

Nous sommes à présent en mesure de formuler le système de Navier-Stokes classique qui décrit la circulation d'un fluide visqueux homogène et incompressible dans une configuration fixe. Le système de Navier-Stokes est le problème que nous appelons  $(p)$ , qui est constitué des équations ci-dessous :

$$(p) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u = f - \nabla P, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div} u(x, t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ u(x, t) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (1.14)$$

Les inconnues sont  $u : \Omega \times (0, T) \longrightarrow \mathbb{R}^3$  et  $P : \Omega \times (0, T) \longrightarrow \mathbb{R}$ . Alors que  $\Omega, T, f : \Omega \times (0, T) \longrightarrow \mathbb{R}^3$  et  $u_0 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$  sont donnée.

### 1.4.2 Nombre de Reynolds

Soit  $U \in \mathbb{R}$  une vitesse caractéristique de l'écoulement étudié et  $L$  une longueur caractéristique. On considère le temps caractéristique  $T = \frac{L}{U}$  et on pose :

$$\tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{T}, \quad \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \frac{u(x, t)}{U}, \quad \tilde{P} = \frac{P(x, t)}{\rho U^2} \quad (1.15)$$

Les nouvelles vitesse et pression  $\tilde{u}$  et  $\tilde{P}$  vérifient alors

$$\rho \left( \frac{U^2}{L} \tilde{u}_{\tilde{t}} + \frac{U^2}{L} (\tilde{u} \cdot \nabla) \tilde{u} \right) - \nu \frac{U}{L^2} \Delta \tilde{u} + \frac{\rho U^2}{L} \nabla \tilde{P} = f \quad \text{dans } \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^+$$

Les nouveaux opérateurs différentiels  $\nabla$  et  $\Delta$  ci-dessus sont relatifs à la (nouvelle) variable  $\tilde{x}$ . On obtient ainsi

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_t + (\tilde{u} \cdot \nabla) \tilde{u} - \frac{1}{Re} \Delta \tilde{u} + \nabla \tilde{P} = \tilde{f} \quad \text{dans } \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \\ \operatorname{div} \tilde{u} = 0 \quad \text{dans } \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \end{array} \right. \quad (1.16)$$

avec  $\tilde{f} = \frac{L}{\rho U^2} f$  et  $Re$  est le nombre de Reynolds défini par

$$Re = \frac{LU}{\nu} \rho$$

Le nombre  $\tilde{\nu} = \frac{\nu}{\rho}$  représente la viscosité cinématique. Par exemple, on a  $\tilde{\nu} = 0.15 * 10^{-4} m/s$  pour l'air et  $\tilde{\nu} = 10^{-6} m/s$  pour l'eau. Le tableau suivant indique quelques valeurs du nombre de Reynolds.

	U	L	$Re = LU/\nu$
bactérie (dans l'eau)	100 $\mu$ m/s	0.1 $\mu$ m	10 <sup>-5</sup>
protozoaire	10 <sup>-1</sup> cm/s	10 <sup>-2</sup>	10 <sup>-1</sup>
guêpe	2 cm/s	2 cm	26
papillon	1 m/s	5 cm	3333
pigeon	5 m/s	30 cm	10 <sup>5</sup>
poisson (hareng) m/s	1.67cm	30 cm	5.10 <sup>5</sup>
poisson (saumon) m/s	12.5 m	1	1.25.10 <sup>7</sup>
automobile	100 km/s	3 m	5.10 <sup>6</sup>
avion (airbus A330)	860 km/h	60 m	$\simeq 10^9$

Le nombre de Reynolds caractérise le type d'écoulement étudié. Mathématiquement, il prend en compte le terme de viscosité du laplacien de la vitesse.

### Les équations de Stokes et d'Euler

Les équations de Navier-Stokes se réduisent aux équations de Stokes ou d'Euler selon que le nombre de Reynolds  $Re$  est petit ou grand.

Pour  $Re \ll 1$ , les effets dus à la viscosité sont dominants. Si on pose  $p' = LU\rho\tilde{p} = \nu Re\tilde{p}$  et  $f' = \nu Re\tilde{f}$ , l'équation 1.16 devient

$$u_t + (u \cdot \nabla)u - \frac{1}{Re} \Delta u + \frac{1}{\nu Re} \nabla p' = \frac{1}{\nu Re} f'.$$

En faisant tendre  $Re$  vers 0. Le système de Stokes s'écrit alors :

$$\begin{cases} -\nu \Delta u + \nabla P = \rho f \\ \text{div } u = 0 \end{cases} \quad (1.17)$$

Pour  $Re \gg 1$  le terme de convection non linéaire  $(u \cdot \nabla)u$  est dominant ; dans ce cas, en faisant tendre  $Re$  vers  $+\infty$  dans l'équation (1.16), on obtient les équations d'Euler

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right) + \nabla P = \rho f \\ \text{div } u = 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

Les principales difficultés pour étudier et résoudre les équations de Navier-Stokes (1.16) sont d'une part le couplage vitesse/pression et d'autre part la présence du terme de convection non linéaire  $(u \cdot \nabla)u$ . D'un point de vue numérique, la résolution des équations de Navier-Stokes utilisera dans de nombreuses méthodes la résolution intermédiaire de problèmes de

Stokes. Le problème de Stokes est un problème couplé vitesse/pression mais linéaire. On va d'abord étudier le problème de Stokes puis on développera et on analysera des schémas numériques pour les équations de Navier-Stokes.

# Chapitre 2

## Problème de Stokes

On considère un fluide visqueux incompressible. On définit le problème de Stokes par le système :

$$(s) \begin{cases} -\nu \Delta u + \nabla P = f & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} u(x) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

Où  $\nu > 0$  est la viscosité du fluide.

### 2.1 Le problème continu

On définit d'abord le tenseur de Cauchy des contraintes comme suite :

$$\sigma = \sigma(u, p) = 2\nu D(u) - pI_d.$$

Où

$$D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

est le tenseur symétrique des déformations. Les équations de Stokes s'écrivent alors :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \sigma = f & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.2)$$

La divergence du tenseur  $\sigma$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  qui a pour composantes

$$(\operatorname{div} \sigma)_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

#### 2.1.1 Formulation mixte du problème de Stokes

Soit  $v$  un fonction de test s'annule sur le bord  $\partial\Omega$ . En intégrant par partie, on obtient

$$\sum_{i,j} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \int_{\Omega} f v dx.$$

Puisque le tenseur  $\sigma$  est symétrique ( $\sigma_{i,j} = \sigma_{j,i}$ ), on a  $\sum_{i,j} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sum_{i,j} \sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$  par conséquent

$$\sum_{i,j} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sum_{i,j} \sigma_{ij} D(v)_{i,j}.$$

On a besoin également d'introduire l'espace

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) \int_{\Omega} q dx = 0 \right\}.$$

L'espace des fonctions de  $L^2(\Omega)$  à moyenne nulle dans  $\Omega$ . On obtient alors la formulation variationnelle suivante

Trouver  $(u, p) \in H_0^1(\Omega)^3 \times L_0^2(\Omega)$

$$\begin{cases} 2\nu \int_{\Omega} D(u) : D(v) dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div} v dx = \int_{\Omega} f v dx & \forall v \in H_0^1(\Omega)^3 \\ \int_{\Omega} (\operatorname{div} u) q dx = 0 & \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{cases} \quad (2.3)$$

**Remarque 13** Dans la relation (2.3), il est équivalent de prendre des fonctions test  $q$  dans  $L^2(\Omega)$ . Cependant,  $L_0^2(\Omega)$  est le "bon" espace pour la pression. Dans les équations de Stokes, la pression est connue à une constante près. Choisir la moyenne nulle revient à fixer la constante.

**Remarque 14** Compte tenu du fait que la vitesse  $u$  vérifie la relation d'incompressibilité  $\operatorname{div} u = 0$ , on a

$$2 \int_{\Omega} D(u) : D(v) dx = \int_{\Omega} \nabla(u) : \nabla(v) dx$$

ce qui simplifie les calculs. Cependant, en vue d'applications aux problèmes de fluides, on préfère travailler avec la formulation (2.3)

On introduit alors les formes bilinéaires suivantes :

$$\begin{aligned} a &: H_0^1(\Omega)^n \times H_0^1(\Omega)^n \rightarrow \mathbb{R} \\ a(u, v) &= 2\nu \int_{\Omega} D(u) : D(v) dx \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} b &: H_0^1(\Omega)^n \times L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \\ b(u, q) &= - \int_{\Omega} (\operatorname{div} u) q dx \end{aligned} \quad (2.5)$$

La formulation variationnelle mixte du problème de Stokes s'écrit alors

$$\begin{cases} \text{trouver } (u, p) \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u, v) + b(v, q) = (f, v) & \forall v \in H_0^1(\Omega)^n \\ b(u, q) = 0 & \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{cases} \quad (2.6)$$

## 2.1.2 L'existence et l'unicité

**Théorème 15** [1] *On fait les hypothèses suivantes :*

(1) *Les formes bilinéaires  $a$  et  $b$  sont continues respectivement sur  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  et  $H_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$  :*

(2) *La forme bilinéaire  $a$  est coercive sur  $H_0^1(\Omega)$  c.-à-d*

$$\text{Il existe } \alpha > 0 \text{ telle que } a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

(3) *Il existe une constante positive  $\beta$  telle que la forme bilinéaire  $b$  vérifie :*

$$\inf_{q \in L^2(\Omega)} \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{b(v, q)}{\|v\|_{1,\Omega}} \geq \beta \|q\|_{0,\Omega}.$$

*Alors le problème (2.6) admet une unique solution  $(u, p) \in H_0^1(\Omega)^n \times L^2(\Omega)$  .*

**Preuve.**

**La forme  $a$  est continue et coercive sur  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$**

$\forall u, v \in H_0^1(\Omega)$  on a :  $a(u, v) = \nu \int \nabla u : \nabla v \, dx = \nu \sum_{i=1}^n \int \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx$

d'après l'inégalité de Holdre on obtient

$$\begin{aligned} a(u, v) &\leq \nu \sum_{i=1}^n \|\nabla u_i\|_{L^2} \cdot \|\nabla v_i\|_{L^2} \\ &\leq \nu \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \\ &\leq C \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \end{aligned}$$

Alors la forme  $a$  est continue.

On a d'après de Poincaré on obtient :

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \nu \sum_{i=1}^n \int (\nabla u_i)^2 \, dx = \nu \sum_{i=1}^n \|\nabla u_i\|_{L^2}^2 \\ &= \nu \|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq C \|u\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

Alors la forme  $a$  est coercive.

**La forme  $b$  est continue sur  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$**

$$b(v, q) = - \int (\text{div } v) q \, dx \leq \|v\|_{H^1} \|q\|_{L^2}$$

Pour prouver la condition "inf-sup" nous donnons le lemme suivant :



**Lemme 1** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $p \in L^2(\Omega)$ , il existe  $v \in H^1(\Omega)$ .*

$$\operatorname{div} v = p \text{ et } \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|p\|_{L^2(\Omega)}.$$

*De plus, si  $p$  vérifie  $\int_{\Omega} p dx = 0$ , on peut prendre  $v \in H_0^1(\Omega)$ .*

*Pour établir la condition "inf-sup" pour le problème de Stokes, on prend  $q \in L_0^2(\Omega)$ .*

*D'après le lemme, il existe  $v \in H_0^1(\Omega)$  tel que  $q = -\operatorname{div} v$  et  $\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|q\|_{L^2(\Omega)}$ .*

D'autre part :  $b(v, q) = -\int_{\Omega} (\operatorname{div} v) q dx = \|q\|_{L^2(\Omega)}^2$ .

$$\frac{b(v, q)}{\|q\|_{L^2(\Omega)}} = \|q\|_{L^2(\Omega)} \geq \frac{1}{C} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Par conséquent,  $b$  vérifie la condition "inf-sup" avec  $\beta = \frac{1}{C} > 0$ . ■

## 2.2 Le problème discret

La discrétisation par éléments finis du problème de Stokes approxime  $(u, p)$  par des fonctions  $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ . Les sous-espaces  $V_h$  de  $V$  et  $Q_h$  de  $Q$ . On définit les deux espaces

$$V_h = \{v \in C^0(\Omega)^n \text{ tel que } v|_K \in P_K^n \text{ pour toute } K \in \tau_h, v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

$$Q_h = \{q \in C^0(\Omega)^n \text{ tel que } q|_K \in P_{K'} \text{ pour toute } K \in \tau_h\}$$

Le problème discrétisé s'écrit alors :

$$\begin{cases} \text{trouver } (u_h, p_h) \in V_h \times Q_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) + b(v_h, q_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h \\ (u_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \end{cases} \quad (2.7)$$

**Théorème 16 (Convergence.)** [1] *Sous les hypothèses d'existence et d'unicité des solutions  $(u, p)$  et  $(u_h, p_h)$  des problèmes de Stokes continu et discret et si la condition de Brezzi-Babůska est vérifiée, alors :*

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq C \left[ \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1,\Omega} + \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_{0,\Omega} \right] \quad (2.8)$$

**Théorème 17 (Ordre de convergence.)** [1] *Sous les mêmes hypothèses qu'au théorème précédent et si de plus le sous-espace  $V_h$  contient les polynômes de degré  $k$  et le sous-espace  $Q_h$  contient les polynômes de degré  $(k - 1)$ , alors :*

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^k (\|u\|_{k+1,\Omega} + \|p\|_{k,\Omega}) \quad (2.9)$$

### 2.2.1 Forme matricielle

D'après la formulation variationnelle du problème discret, On introduit une base  $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq n_V}$  de  $V_h$  ( $n_V$  dimension de  $V_h$ ) et une base  $(\psi_j)_{1 \leq j \leq n_Q}$  de  $Q_h$  ( $n_Q$  dimension de  $Q_h$ ). On décompose  $u_h$  et  $p_h$  sur ces bases

$$u_h = \sum_{j=1}^{n_V} u_j \varphi_j(x), \quad p_h = \sum_{j=1}^{n_Q} p_j \psi_j(x).$$

On peut de plus décomposer le système sous la forme :

$$\begin{pmatrix} A_h & B_h^* \\ B_h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_h \\ p_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_h \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Où  $B_h^*$  est la matrice transposée de  $B_h$  et

$$\begin{aligned} (A_h)_{1 \leq i, j \leq n_V} &= (\nu \int_{\Omega} \varphi_i \psi_j dx)_{1 \leq i, j \leq n_V} \\ (B_h)_{1 \leq i \leq n_V, 1 \leq j \leq n_Q} &= (- \int_{\Omega} \psi_j \operatorname{div} \varphi_i dx)_{1 \leq i \leq n_V, 1 \leq j \leq n_Q} \\ U_h &= (u_i)_{1 \leq i \leq n_V} \\ P_h &= (p_j)_{1 \leq j \leq n_Q} \end{aligned}$$

## 2.3 Méthode de différence finis du problème de Stokes

Pour discrétiser le problème (s) par différence finis, On choisit la dimension 2 des espaces, et on prend  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ ,  $\nu = 1$ .

Pour discrétiser le domaine  $\Omega$  par un maillage uniforme, on prend

$$\mathcal{P}_{i,j} = (ih, jh), \quad h = \frac{1}{N+1}, \quad \text{tel que } i, j = 0, \dots, N+1$$

Puis que la dimension des espaces est égale à 2, alors on cherche les approximations

$$u_{i,j}^{(k)} = u_k(\mathcal{P}_{i,j}) \quad \text{et} \quad p_{i,j} = p(\mathcal{P}_{i,j}), \quad k = 1, 2$$

○ La discrétisation du  $\Delta u$  :

$$\begin{aligned} \Delta u_{i,j}^{(1)} &= \frac{u_{i-1,j}^{(1)} - 2u_{i,j}^{(1)} + u_{i+1,j}^{(1)}}{h^2} \\ \Delta u_{i,j}^{(2)} &= \frac{u_{i,j-1}^{(2)} - 2u_{i,j}^{(2)} + u_{i,j+1}^{(2)}}{h^2} \\ \Delta u_{i,j} &= \left( \frac{u_{i-1,j}^{(1)} - 2u_{i,j}^{(1)} + u_{i+1,j}^{(1)}}{h^2} \right) + \left( \frac{u_{i,j-1}^{(2)} - 2u_{i,j}^{(2)} + u_{i,j+1}^{(2)}}{h^2} \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

◦ La discrétisation du  $\nabla p$  :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i+1,j} &= \frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2h} \\ \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i,j+1} &= \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2h} \end{aligned} \quad (2.12)$$

On applique le condition aux limite sur le bord on remarque

$$u_{0,j} = u_{N+1,j} = u_{i,0} = u_{i,N+1} = 0.$$

Alors le problème discret s'écrit par la système :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_{i,j}^{(1)} + \frac{1}{2h} (p_{i+1,j} - p_{i-1,j}) = f_{i,j}^1 \\ -\Delta u_{i,j}^{(2)} + \frac{1}{2h} (p_{i,j+1} - p_{i,j-1}) = f_{i,j}^2 \\ \frac{1}{2h} (u_{i+1,j}^{(1)} - u_{i-1,j}^{(1)}) + \frac{1}{2h} (u_{i,j+1}^{(2)} - u_{i,j-1}^{(2)}) = 0 \\ u_{0,j} = u_{N+1,j} = u_{i,0} = u_{i,N+1} = 0 \end{array} \right. \quad (2.13)$$

On remarque que le nombre de l'équation est  $3N^2$  et  $2N^2 + (N+2)^2$  inconnues dans ce cas impossible résoudre cette système

## 2.4 Schémas MAC pour le problème de Stokes

Le but du schéma de MAC est d'obtenir le même nombre d'équation que d'inconnues.

◦ La discrétisation du  $div u = 0$  :

$$\frac{1}{2h} (u_{i,j}^{(1)} + u_{i,j+1}^{(1)} - u_{i+1,j}^{(1)} - u_{i+1,j+1}^{(1)}) + \frac{1}{2h} (u_{i,j}^{(2)} + u_{i,j+1}^{(2)} - u_{i+1,j}^{(2)} - u_{i+1,j+1}^{(2)}) = 0$$

$i, j = 1, \dots, N$ .

◦ La discrétisation du  $\nabla p$  : le principe de discrétisation  $\nabla p$  nous changeons le point de la pression  $P$ . Donc on prend le point nouvelle par la suite :

$$P_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \left( \left( i + \frac{1}{2} \right) h, \left( j + \frac{1}{2} \right) h \right).$$

Donc la formule de la pression donnée par :

$$p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \simeq p \left( P_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right) \quad (2.14)$$

Ainsi, on introduit la pression moyenne :

$$\begin{aligned} p_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{1}{2} (p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + p_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}), & p_{i,j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} (p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + p_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) \\ p_{i-\frac{1}{2},j} &= \frac{1}{2} (p_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}), & p_{i,j-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} (p_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

On déduit que :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{p_{i+\frac{1}{2},j} - p_{i-\frac{1}{2},j}}{2h} \\ \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} &= \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-\frac{1}{2}}}{2h} \end{aligned} \quad (2.15)$$

On a le problème discrète

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_h u_{(i,j)}^{(1)} + \frac{1}{2h} (p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + p_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}) = f_{i,j}^{(1)} \\ -\Delta_h u_{(i,j)}^{(2)} + \frac{1}{2h} (p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + p_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - p_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}) = f_{i,j}^{(2)} \\ \frac{1}{2h} (u_{i,j}^{(1)} + u_{i,j+1}^{(1)} - u_{i+1,j}^{(1)} - u_{i+1,j+1}^{(1)}) + \frac{1}{2h} (u_{i,j}^{(2)} + u_{i,j+1}^{(2)} - u_{i+1,j}^{(2)} - u_{i+1,j+1}^{(2)}) = 0 \\ u_{0,j} = u_{N+1,j} = u_{i,0} = u_{i,N+1} = 0 \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Dans ce cas on obtient le même nombre de d'équation et d'inconnues. Et on remarque  $2N^2$  equation de Stokes et  $(N+1)^2$  équation de divergence. Alors  $2N^2 + (N+1)^2$  mais, on a  $2N^2$  inconnues pour la vitesse et  $(N+1)^2$  pour la pression. Donc  $2N^2 + (N+1)^2$  inconnues.

La résolution de ce système est conduit à résoudre de système linéaire suivant :

$$\begin{cases} Au + Bp = F \\ B^T u = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

### 2.4.1 Résolution du système discrétisé de Stokes

Pour résoudre le système de Stokes (2.10), on utilise une méthode de pénalisation en considérant le problème variationnelle discret modifié suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } (v_h^\varepsilon, p_h^\varepsilon) \in V_h \times \tilde{Q}_h \\ a(u_h^\varepsilon, v_h) + b(v_h, p_h^\varepsilon) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h \\ b(u_h^\varepsilon, q_h) - \varepsilon (p_h^\varepsilon, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in \tilde{Q}_h \end{array} \right.$$

où  $\tilde{Q}_h \subset L^2(\Omega)$ . Donc on prend :

$$\operatorname{div} u_h^\varepsilon = \varepsilon p_h^\varepsilon \quad (2.18)$$

on a la forme algébrique est

$$\begin{pmatrix} A & B^* \\ B & \varepsilon I_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_h^\varepsilon \\ p_h^\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_h^\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

avec un paramètre  $\varepsilon > 0$  petit. On résout alors ce système en découplant les équations vitesse/pression. C'est devenu possible avec l'introduction de la pénalisation :

$$\begin{aligned} \left( A + \frac{1}{\varepsilon} B^* B \right) u_h^\varepsilon &= F_h^\varepsilon \\ p_h^\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon} B u_h^\varepsilon \end{aligned} \quad (2.20)$$

La pénalisation a rendu inversible la matrice du système modifié (2.20). En fait, pour tout  $\varepsilon > 0$  la matrice  $A + \frac{1}{\varepsilon} B^* B$  est symétrique et définit positive, alors le système 2.20 admet un solution, de plus il existe un constant  $C > 0$  indépendant de  $\varepsilon$  telles que

$$\|u_h - u_h^\varepsilon\|_{1,\Omega} + \|p_h - p_h^\varepsilon\|_{0,\Omega} \leq C\varepsilon \quad (2.21)$$

## 2.5 La simulation le problème de Stokes par free fem++

### Définition du problème

On choisit le domaine  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ , la viscosité  $\nu = \frac{1}{100}$ ,  $f = 0$  et le condition aux limites  $\{u = 0 \text{ sur les bords } x = 0, y = 0, y = 1\}$  et  $\left\{u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sur } x = 1\right\}$ . avec  $\Delta t = 0.05$ .  
 Pour modéliser le problème on prend  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$$\begin{cases} -\nu \Delta u_h + \nabla p_h = 0 \\ \operatorname{div} u_h = \varepsilon p_h \\ u|_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_4} = 0 \\ u_1|_{\partial\Omega_3} = 1, u_2|_{\partial\Omega_3} = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

la simulation par free fem++ est :

```

mesh Th=square(15,15);
fespace Uh(Th,P2); Uh u1,u2,v1,v2;
fespace Ph(Th,P1); Ph p,q;
solve stokes([u1,u2,p],[v1,v2,q]) = int2d(Th)((dx(u1)*dx(v1)+dy(u1)*dy(v1)
+ dx(u2)*dx(v2)+dy(u2)*dy(v2))
- p*q*(0.000001)
- p*(dx(v1)+dy(v2))
- q*(dx(u1)+dy(u2)))
+ on(1,2,4,u1=0,u2=0)
+ on(3,u1=1,u2=0);
plot([u1,u2],p,ps="stokes_exple.eps");
    
```

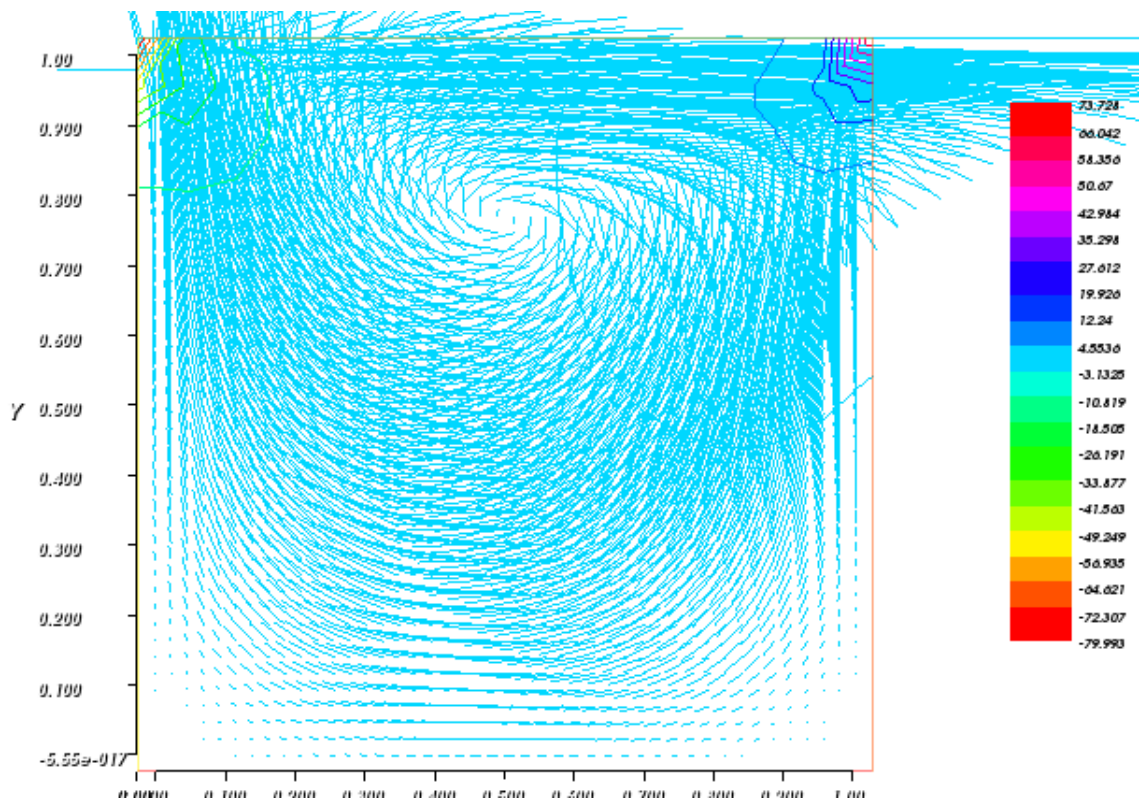


FIGURE 2.1 – Solution numérique du problème de Stokes par free fem++

# Chapitre 3

## Problème de Navier-Stokes

### 3.1 Position du problème

On pose le problème de Navier-Stokes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla P = f, \text{ dans } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div} u(x, t) = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T) \\ u(x, t) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), \text{ dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (*) \quad (3.1)$$

#### 3.1.1 Formulation variationnelle

On définit le cadre fonctionnel  $H_0^1(\Omega)$  et  $L_0^2(\Omega)$ .

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), v' \in L^2(\Omega), v|_{\partial\Omega} = 0\}$$

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega), \int_{\partial\Omega} q = 0 \right\}$$

Soit  $v$  un fonction de test, on multiplie (\*) par  $v$  et on intègre par partie sur  $\Omega$  on obtient :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot v dx + \int_{\Omega} (u \cdot \nabla)u \cdot v dx - \nu \int_{\Omega} \Delta u \cdot v dx + \int_{\Omega} \nabla P \cdot v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx$$

On applique le formule de green on obtient :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot v dx + \int_{\Omega} (u \cdot \nabla)u \cdot v dx + \nu \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} \nabla P \cdot v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx$$

On pose maintenant :

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \quad \forall u, v \in V$$

$$b(u, v, w) = \sum_{i,k=1}^n \int_{\Omega} u_k (D_k v_i) w_i.$$

Alors le formulation variationnelle s'écrit par la suivant :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) + \nu a(u, v) + b(u, u, v) + (\nabla p, v) = (f, v) \quad (3.2)$$

**Lemme 2** *La forme trilinéaire  $u, v, w \rightarrow b(u, v, w)$  est continue sur  $X \times X \times (X \cap [L^n(\Omega)]^n)$ , on a*

$$b(u, v, w) \leq \|u\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^4(\Omega)} \quad \forall u, v, w \in H_0^1$$

## 3.2 Étude de l'existence et de l'unicité

Pour prouver l'existence de solutions faibles, on remarque que, pour toute  $\varphi \in \mathcal{V}$  on a :

$$\nabla p = f - \frac{\partial u}{\partial t} + \nu \Delta u - (u \cdot \nabla)u.$$

d'après le théorème de Rhamme on a :  $(\nabla p, \varphi) = 0$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega) \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}$ , donc

$$\left\langle f - \frac{\partial u}{\partial t} + \nu \Delta u - (u \cdot \nabla)u, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = 0$$

. Alors  $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) + \nu a(u, v) + b(u, u, v) = (f, v) \quad (3.3)$$

On va démontrer les résultats suivants :

### **Théorème 18 (Existence de solutions faibles)** [12]

*Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $u_0 \in H$  et  $f \in L^2([0, 1[, (H^{-1}(\Omega))^n$ . Alors le problème de Navier-Stokes admet  $(u, p)$  au moins une solution  $u$  qui de plus vérifie l'inégalité d'énergie*

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \langle f(\tau), u(\tau) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} d\tau$$

**Remarque 19** *Si  $n = 3$ , L'unicité de telles solutions demeure un problème ouvert.*

**Preuve.** 18

### **l'existence**

On utilise la méthode de Galerkin, pour démontre la solution faible du problème de Navier-Stokes.

#### **étape 1 : Construction d'une suite approximante**

Soit  $V$  un espace de Hilbert séparable, il existe une base hilbertienne  $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ .

Pour  $m \in \mathbb{N}$ , on note  $V_m$  l'espace engendré par  $\{w_0, \dots, w_m\}$ . On prend

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j$$



$$(\partial_t u_m(t) \cdot w_j) + \nu(\nabla u_m(t) \cdot \nabla w_j) + ((u_m(t) \cdot \nabla) u_m \cdot w_j) = (f(t), w_j)_\Omega \quad (3.4)$$

$u_m(0) = u_{0m} \in \{w_0, \dots, w_m\}$ ,  $u_{0m} \rightarrow u_0$  dans  $H$ .

On remplace  $u_m(t)$  dans le forme faible on obtient :

$$\left(\frac{\partial(\sum_{j=1}^m g_{jm}(t)w_j)}{\partial t}, w_j\right) + \nu(\nabla(\sum_{j=1}^m g_{jm}(t)w_j), \nabla w_j) + \left[\left(\sum_{j=1}^m g_{jm}(t)w_j \cdot \nabla\left(\sum_{j=1}^m g_{jm}(t)w_j\right)\right)w_j\right] = (f, w_j)$$

Cette formule construit un système différentielle.

## étape 2 : Estimations a priori

On utilise  $b(u_m, u_m, u_m) = 0$  et

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} u_m, u_m\right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u_m, u_m)$$

$$\frac{1}{2} (u_m, u_m) + \nu a(u_m, u_m) + b(u_m, u_m, u_m) = (f, u_m)$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |u_m(t)|^2 + \nu \|u_m(t)\|^2 &\leq \|f(t)\| \|u_m(t)\| \\ &\leq \frac{\nu}{2} \|u_m(t)\|^2 + c \|f(t)\| \end{aligned}$$

On intègre sur  $]0, T[$  on obtient :

$$|u_m(t)|^2|_0^T + 2\nu \int_0^T \|u_m(t)\|^2 dt \leq \nu \int_0^T \|u_m(t)\|^2 + c \int_0^T \|f(t)\|$$

donc  $u_m$  demeure dans un bornée de  $L^2(0, T; V)$

## étape 3 : Passage à la limite

On pose  $v \in V$  telle que  $v = \sum_{j=1}^m a_j w_j$  et on notée  $v_m = \sum_{j=1}^m a_j w_j$ , On sait que

$$\frac{\partial}{\partial t} \int u_m w_j + \nu \int \nabla u_m \cdot \nabla w_j + \int (u_m \cdot \nabla u_m) w_j = \int f \cdot w_j$$

On multiplie par  $a_j$  et sommant en  $j$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int u_m v_m + \nu \int \nabla u_m \cdot \nabla v_m + \int (u_m \cdot \nabla u_m) \cdot v_m &= \int f \cdot v_m \\ \int u_m v_m &\rightarrow \int uv \quad \text{dans } L^2(0, T) \\ \frac{\partial}{\partial t} \int u_m v_m &\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int uv \quad \text{dans } H^{-1}(0, T) \\ \nu \int \nabla u_m \nabla v_m &\rightarrow \nu \int \nabla u \nabla v \quad \text{dans } L^2(0, T) \text{ faible} \\ \int (u_m \cdot \nabla u_m) \cdot v_m &\rightarrow \int (u \cdot \nabla u) \cdot v \quad \text{dans } \mathcal{D}(0, T) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Donc le problème de Navier-Stokes admet un solution faible.

## Unicité

Pour prouve l'unicité on donne le théorème suivant.

**Théorème 20** [11] Toute solution  $u$  du Problème 3.1 vérifie, lorsque  $n = 2$ ,

$$u' \in L^2(0, T; V') \quad (3.6)$$

Soient  $u$  et  $u^*$  deux solutions et soit  $w = u - u^*$ . Alors

$$(w', v) + \nu a(w, v) + b(w, u, v) + b(u, w, v) - b(w, w, v) = 0, \quad \forall v \in V \quad (3.7)$$

Puisque l'on sait, d'après (3.6), que  $w' \in L^2(0, T; V')$ , on peut prendre dans (3.7)  $v = w(t)$  et intégrer en  $t$ ; il vient

$$\frac{1}{2}|w(t)|^2 + \nu \int_0^t a(w, w) + \int_0^t [b(w, u, w) + b(u, w, w) - b(w, w, w)] dt = 0. \quad (3.8)$$

Mais  $b(w, w, w) = 0$ ,  $b(w, w, w) = 0$ , et donc (3.8) donne

$$\frac{1}{2}|w(t)|^2 + \nu \int_0^t \|w(\sigma)\|^2 d\sigma = - \int_0^t b(w, u, w) d\sigma. \quad (3.9)$$

Or

$$\left| \int_0^t b(w, u, w) d\sigma \right| \leq C \int_0^t \|w(\sigma)\|_{(L^4(\Omega))^2}^2 \|u(\sigma)\| d\sigma.$$

On utilise le lemme 2

$$\begin{aligned} &\leq C \int_0^t |w(\sigma)| \|w(\sigma)\| \|u(\sigma)\| d\sigma \\ &\leq \nu \int_0^t \|w(\sigma)\|^2 d\sigma + C \int_0^t |w(\sigma)|^2 \|u(\sigma)\|^2 d\sigma \end{aligned}$$

Donc (3.9) donne

$$|w(t)|^2 \leq 2C \int_0^t |w(\sigma)|^2 \|u(\sigma)\|^2 d\sigma \quad (3.10)$$

d'où  $w = 0$ . ■

## 3.3 Discrétisation d'équations de Navier-Stokes par la méthode des éléments finis

### 3.3.1 Discrétisation en temps

Soient  $\Delta t > 0$  on pose  $t^n = n\Delta t$ . On prend  $u^n$  l'approximation de  $u$  et  $p^n$  de  $p$ , on définit le caractèreistique  $X(\tau, t, x)$ . [6]

On dérive le caractèreistique par rapporte  $\tau$  on obtient :

$$\frac{dX}{d\tau}(\tau, t, x) = u(X(\tau, t, x), \tau).$$

la dérivation second

$$\frac{d}{d\tau}[u(X(\tau, t, x), \tau)] = \left( \frac{dX}{d\tau}(\tau, t, x) \cdot \nabla \right) u(X(\tau, t, x)) + \frac{\partial u}{\partial \tau}(X(\tau, t, x))$$

On prend  $\tau = t$  on obtient :

$$\frac{d}{d\tau}[u(X(\tau, t, x), \tau)]_{\tau=t} = (u \cdot \nabla)u + \frac{\partial u}{\partial t}$$

donc la formulation variationnelle

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouve}(u, p) \in H_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega). \\ (\frac{du}{dt}, v) + \nu a(u, v) + c(v, p) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \\ c(q, u) = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{array} \right. \quad (3.11)$$

donc la formulation variationnelle discret

$$\left\{ \begin{array}{l} (\frac{du_h^n}{dt}, v_h) + \nu a(\nabla u_h^n, v_h) + c(p^n, \nabla v_h) = (f, v_h) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ c(q_h, u_h^n) = 0 \quad \forall v \in L_0^2(\Omega) \end{array} \right. \quad (3.12)$$

### 3.4 Discrétisation par la méthode des différences finis

La discrétisation la problème de Navier-Stokes on utilise le même étape de problème de Stokes, mais dans l'équation de Navier-Stokes il existe un terme non linéaire.[10]

**La discrétisation du  $(u^{n-1} \cdot \nabla)u^n$**  Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^2$ , on prend  $u_h^n(u^n, v^n)$ ,  $P_{ij} = (ih, jh)$   $i, j = 0, \dots, N + 1$ , avec  $h = \frac{1}{N + 1}$

$$\nabla u^n = (\nabla v^n, \nabla u^n) = \nabla w = \left( \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

On a

$$(u^{n-1} \cdot \nabla)u^n = (u^{n-1} \cdot \nabla u^n, u^{n-1} \cdot \nabla v^n)$$

et

$$u^{n-1} \cdot \nabla w = u^{n-1} \frac{\partial w}{\partial x} + v^{n-1} \frac{\partial w}{\partial y}$$

On discrétise le  $\nabla w$

$$(\nabla w_{ij})_x = \frac{w_{ij} - w_{i-1,j}}{h}$$

$$(\nabla w_{ij})_y = \frac{w_{ij} - w_{i,j-1}}{h}$$

donc la discrétisation du  $(u^{n-1} \nabla u^n)$  est :

$$(u^{n-1} \nabla u^n) = u^{n-1} \nabla w =$$

$$(u^{n-1})^+ \frac{w_{ij} - w_{i-1,j}}{h} + (u^{n-1})^- \frac{w_{i+1,j} - w_{i,j}}{h} + (v^{n-1})^+ \frac{w_{ij} - w_{i,j-1}}{h} + (v^{n-1})^- \frac{w_{ij+1} - w_{i,j}}{h}$$

$$u^{n-1}(P_{ij}) \simeq \begin{cases} (u^{n-1})^+ & \text{si } u_{ij}^{n-1} \geq 0 \\ (u^{n-1})^- & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.13)$$

$$v^{n-1}(P_{ij}) \simeq \begin{cases} (v^{n-1})^+ & \text{si } v_{ij}^{n-1} \geq 0 \\ (v^{n-1})^- & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.14)$$

**La discrétisation  $\operatorname{div} u^n = 0$  :**

$$\frac{1}{2h}(u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n - u_{i+1,j}^n - u_{i+1,j+1}^n) + \frac{1}{2h}(v_{i,j}^n + v_{i,j+1}^n - v_{i+1,j}^n - v_{i+1,j+1}^n) = 0 \quad (3.15)$$

**La discrétisation  $\Delta u^n$**

$$\Delta_h u_{i,j}^n = \frac{1}{h^2} ((u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + (v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}))$$

**La discrétisation  $\nabla p^n$**

On change le point de discrétisation, cela obtient le même nombre d'équation et d'inconnues.

$$P_{i+1/2,j+1/2} = \{(i + 1/2)h; (j + 1/2)h\} :$$

$$p_{i+1/2,j+1/2}^n \simeq p(P_{i+1/2,j+1/2}, t^n) \quad (3.16)$$

pour  $i, j = 0, \dots, N$ . On définit le moyenne de la pression

$$p_{i+1/2,j}^n = \frac{1}{2}(p_{i+1/2,j+1/2}^n + p_{i+1/2,j-1/2}^n) \quad (3.17)$$

$$p_{i,j+1/2}^n = \frac{1}{2}(p_{i+1/2,j+1/2}^n + p_{i-1/2,j+1/2}^n) \quad (3.18)$$

On approche alors le gradient de la pression en  $P_{i+1/2,j+1/2}$  par

$$\nabla p(P_{i+1/2,j+1/2}) \simeq (P_{i+1/2,j+1/2}, P_{i+1/2,j+1/2})$$

avec

$$\begin{aligned} (P_{i+1/2,j+1/2})_x &= \frac{1}{h}(P_{i+1/2,j}^n - P_{i-1/2,j}^n) \\ &= \frac{1}{2h}(P_{i+1/2,j+1/2}^n + P_{i+1/2,j-1/2}^n - P_{i-1/2,j+1/2}^n - P_{i-1/2,j-1/2}^n) \end{aligned} \quad (3.19)$$

et

$$\begin{aligned} (P_{i+1/2,j+1/2})_y &= \frac{1}{h}(P_{i,j+1/2}^n - P_{i,j-1/2}^n) \\ &= \frac{1}{2h}(P_{i+1/2,j+1/2}^n + P_{i-1/2,j+1/2}^n - P_{i+1/2,j-1/2}^n - P_{i-1/2,j-1/2}^n) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Le système de Navier-Stokes est alors discrétisée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{ij}^n - u_{ij}^{n-1}}{\Delta t} + (u^{n-1})^+ \left( \frac{w_{i,j} - w_{i-1,j}}{h} \right) + (u^{n-1})^- \left( \frac{w_{i+1,j} - w_{i,j}}{h} \right) - \nu \Delta_h u_{ij}^n + (\nabla P_{i+1/2,j+1/2})_x = f_{(1),ij}^{(n)} \\ \frac{v_{ij}^n - v_{ij}^{n-1}}{\Delta t} + (v^{n-1})^+ \left( \frac{w_{i,j} - w_{i,j1}}{h} \right) + (v^{n-1})^- \left( \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{h} \right) - \nu \Delta_h v_{ij}^n + (\nabla P_{i+1/2,j+1/2})_y = f_{(2),ij}^{(n)} \\ \frac{1}{2h}(u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n - u_{i+1,j}^n - u_{i+1,j+1}^n) + \frac{1}{2h}(v_{i,j}^n + v_{i,j+1}^n - v_{i+1,j}^n - v_{i+1,j+1}^n) = 0 \\ u_{i,0}^n = u_{i,N+1}^n = u_{0,j}^n = u_{N+1,j}^n = 0 \end{array} \right. \quad (3.21)$$

Dans ce cas on obtient sur le même nombre d'équations que d'inconnues. Alors  $2N^2$  équations de Navier-Stokes et  $(N+1)^2$  équations pour l'équation de la divergence, donc  $2N^2 + (N+1)^2$  équations. Donc, on a  $2N^2$  inconnues pour la vitesse et  $(N+1)^2$  inconnues pour la pression, alors  $2N^2 + (N+1)^2$  inconnues.

### 3.5 Forme matricielle

le système discrétisé de Navier-Stokes nous conduit à système matricielle suivant :

$$U^n = \left( \underbrace{u_{11}^n, u_{21}^n, \dots, u_{N1}^n}_{\text{1ère ligne pour } u^n}, \dots, \underbrace{u_{1N}^n, u_{2N}^n, \dots, u_{NN}^n}_{\text{ligne } N \text{ pour } u^n} \underbrace{v_{11}^n, v_{21}^n, \dots, v_{N1}^n}_{\text{1ère ligne pour } v^n}, \dots, \underbrace{v_{1N}^n, v_{2N}^n, \dots, v_{NN}^n}_{\text{ligne } N \text{ pour } v^n} \right) \in \mathbb{R}^{2N^2} \quad (3.22)$$

De même pour la pression :

$$P^n = \left( \underbrace{p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^n, p_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}^n, \dots, p_{N+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^n}_{\text{1ère ligne pour } p^n}, \underbrace{p_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}^n, \dots, p_{N+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}^n}_{\text{ligne 2 pour } p^n}, \underbrace{p_{\frac{1}{2}, N+\frac{1}{2}}^n, \dots, p_{N+\frac{1}{2}, N+\frac{1}{2}}^n}_{\text{ligne } N \text{ pour } p^n} \right) \in \mathbb{R}^{(N+1)^2} \quad (3.23)$$

En déduit que :

$$(I_d + A + C^{n-1}) U^n + B P^n = \Delta t F^n + U^{n-1} \quad (3.24)$$

Le vecteur  $F^n \in \mathbb{R}^{2N^2}$  a la même structure que  $U$  :

$$F^n = \left( \underbrace{f_{(1),11}^{(n)}, \dots, f_{(1),N2}^{(n)}, \dots, f_{(1),1N}^{(n)}, \dots, f_{(1),NN}^{(n)}}_{f_{(2)}^{(n)}}, \underbrace{f_{(2),11}^{(n)}, \dots, f_{(2),N2}^{(n)}, \dots, f_{(2),1N}^{(n)}, \dots, f_{(2),NN}^{(n)}}_{f_{(2)}^{(n)}} \right) \quad (3.25)$$

- $A$  désigne la matrice de laplacien de taille  $2N^2 \times 2N^2$ .
- $I_d$  désigne la matrice identité de taille  $N \times N$ .
- La matrice  $C^{n-1}$  désigne de la discrétisation de terme de convection  $u^{n-1} \nabla$  de taille  $2N^2 \times 2N^2$ .
- $B$  désigne la matrice gradient le pression de taille  $N^2 \times (N+1)^2$ .
- La matrice  $B^T$  désigne la matrice de divergence.

Finalement on obtient le système matricielle :

$$\begin{pmatrix} I_d + A + C^{n-1} & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^n \\ P^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta t F^n + U^{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

### 3.6 Résolution du système discrétisé de Navier-Stokes

Pour résoudre le système précédant, on utilise le méthode de pénalisation :

$$\begin{pmatrix} I_d + A + C^{n-1} & B \\ B^T & \varepsilon I_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^n \\ P^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta t F^n + U^{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

avec un paramètre  $\varepsilon > 0$  petit. On découple alors les équations vitesse/pression :

$$(I_d + A + C^{n-1} + \frac{1}{\varepsilon}BB^T)U^n = \Delta t F^n + U^{n-1} \quad (3.28)$$

$$P^n = \frac{1}{\varepsilon}B^T U^n \quad (3.29)$$

### 3.7 La simulation le problème de Navier-Stokes par free fem++

On modélise les équations de Navier-Stokes par le programme free fem++[4], on obtient :

#### Définition du problème

On choisit l'exemple de la cavité entraînée avec  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ , la viscosité  $\nu = \frac{1}{100}$ ,  $f = 0$  et les conditions aux limites  $\{u = 0 \text{ sur les bords } x = 0, y = 0, y = 1\}$  et  $\left\{u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sur } x = 1\right\}$ . et avec  $\Delta t = 0.05$ .

Pour modélise le problème on prend  $\varepsilon = 10^{-6}$ . D'après la discrétisation du temps de terme de convection et la méthode de pénalisation on obtient :

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1} - u^n \circ X^n}{\Delta t} - \nu \Delta u^{n+1} + \nabla p^{n+1} = 0 \\ \operatorname{div} u^{n+1} = \varepsilon p^n \\ u|_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_4} = 0 \\ u_1|_{\partial\Omega_3} = 1, u_2|_{\partial\Omega_3} = 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

la simulation par free fem++ est :

```

mesh Th=square(8,8);
fespace Xh(Th,P2); // definition of the velocity component space
fespace Mh(Th,P1); // definition of the pressure space
Xh u2,v2;
Xh u1,v1;
Mh p,q;
int i=0;
real nu=1./100.;
real dt=0.05;
real alpha=1/dt;
Xh up1,up2;
problem NS (u1,u2,p,v1,v2,q,solver=Croust,init=i) =
int2d(Th)(
  alpha*( u1*v1 + u2*v2)
  + nu * ( dx(u1)*dx(v1) + dy(u1)*dy(v1)
  + dx(u2)*dx(v2) + dy(u2)*dy(v2) )

```

```

- p*q*(0.000001)
- p*dx(v1) - p*dy(v2)
- dx(u1)*q - dy(u2)*q
)
+ int2d(Th) ( -alpha*
convect([up1,up2],-dt,up1)*v1 -alpha*convect([up1,up2],-dt,up2)*v2 )
+ on(3,u1=1,u2=0)
+ on(1,2,4,u1=0,u2=0)
;
for (i=0;i<=10;i++)
{
up1=u1;
up2=u2;
NS;
if (!(i % 10)) // plot every 10 iteration
plot(coef=0.2,cmm=" [u1,u2] and p ",p,[u1,u2]);
};

```

Le deux figure suivant représente que le champ du vitesse et le champ de la pression.

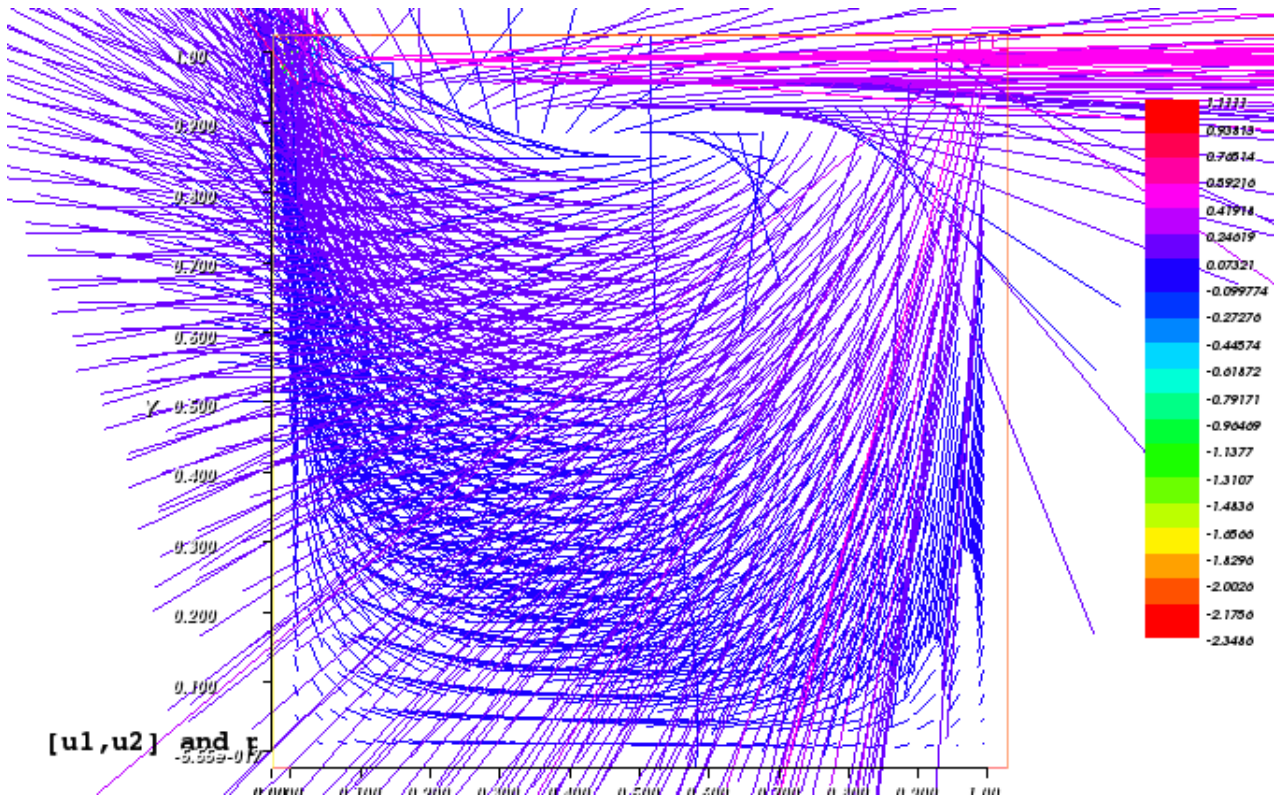


FIGURE 3.1 – Solution numérique du problème de Navier-Stokes par free fem++

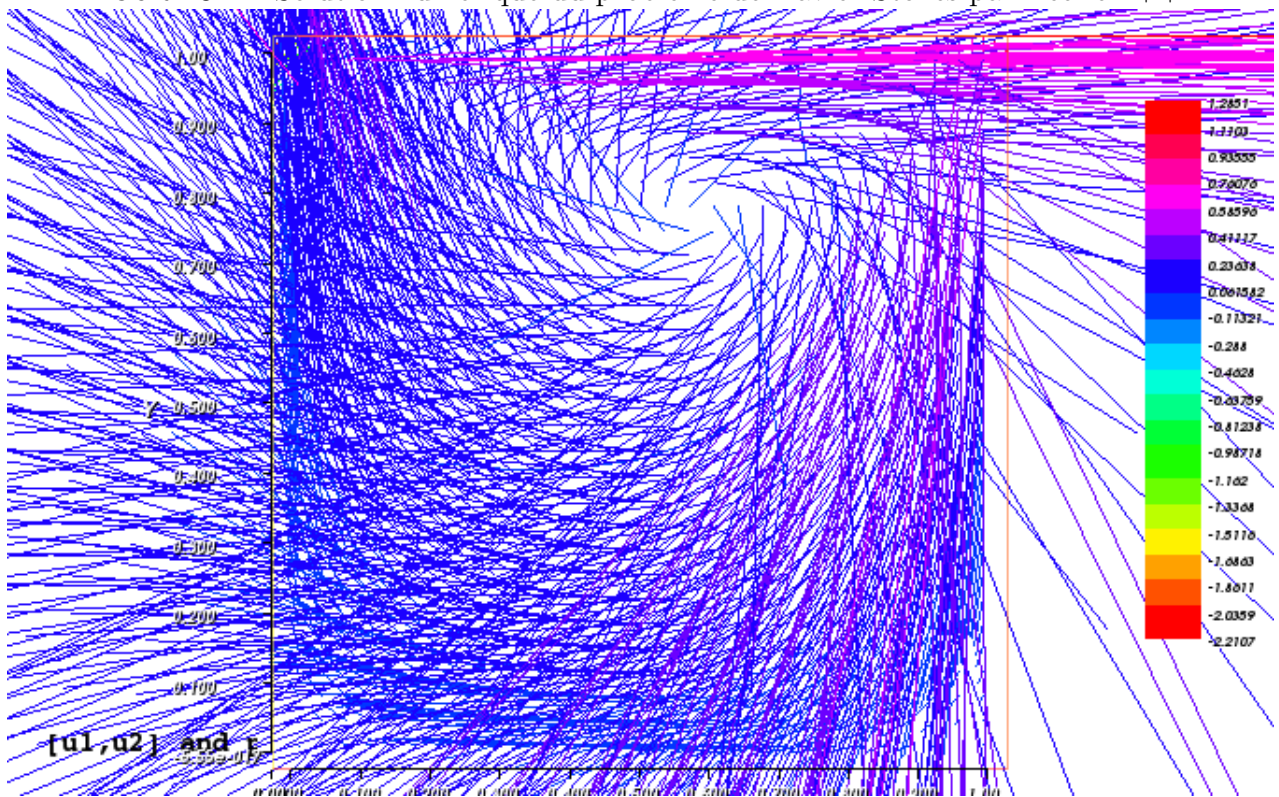


FIGURE 3.2 – Solution numérique du problème de Navier-Stokes par free fem++



# Conclusion

Le but de ce travail est étudié un problème aux limites des équation Navier-Stokes incompressible. On remarque l'équation de Navier-Stokes sont définies en deux groupe le premier la conservation de la quantité de mouvement et le second est traduction de l'incompressibilité du fluide .

Le problème de Stokes est un problème linéaire on utilise la méthode des éléments finis et méthode des différences finis pour résoudre ce problème, et pour prouve l'existence et l'unicité on utilise la condition "inf-sup".

Le problème de Navier-Stokes est un problème non linéaire cela prouver l'existence et l'unicité on utilise la méthode de compacité. On a dans le cas  $n = 2$  , mais dans le cas  $n = 3$  l'existence vérifie et l'unicité reste une question ouverte.

# Bibliographie

- [1] André Fortin, André Garon *Les éléments finis : de la théorie à la pratique* ©1997-2011
- [2] DAVEAU CHRISTIAN. *METHODE DES ELEMENTS FINIS* Université de Cergy Pontoise 2005/2006
- [3] David Cherel, *Décomposition de domaine pour des systèmes issus des équations de Navier-Stokes*, Analysis of PDEs. Université de Grenoble, 2012. French. < tel – 00995603 >
- [4] F. Hecht *FreeFem++*. *Third Edition, Version 3.14* . Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris
- [5] G.Duvaut *Mécanique de milieux continus*. Masson, Paris 1990.
- [6] Gilles Fourestey *Une méthode des caractéristiques d'ordre deux sur maillages mobiles pour la résolution des équations de Navier-Stokes incompressible par éléments finis*. Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis. Avril 2002
- [7] Grégoire allaire. *Analyse numérique et optimisation*, A la memoire de Jacques-Louis(1928-2001), Professeur à l'école polytechnique de 1966 à 1986.
- [8] Haïm BREZIS. *ANALYSE FONCTIONNELLE Théorie et applications*, Université Pierre et Marie Curie et École Polytechnique. MASSON Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987
- [9] J.-F. Scheid *Analyse numérique des équations de Navier-Stokes*, Université de lorraine.
- [10] J.-F. Scheid , *Méthodes numériques pour la dynamique des fluides* Université de Lorraine Année 2011-2012
- [11] J. L. Lions, *Quelque méthode de résolution des problème aux limite non linéaire*, Dunod , Paris 2002

- [12] Pierre Dreyuss *Introduction à l'analyse des équations de Navier-Stokes* Ellipses Édition Markeing S.A.,2012
- [13] ROGER TEMAM *NAVIER-STOKES EQUATIONS THEORY AND NUMERICAL ANALYSIS* Unioersite de Paris-Sud, Orsay, France Ecole Polytechnique, Palaiseau, France 1977.

## Résumé :

Les équations Navier-Stokes sont des équations non linéaires , ces équations divisent deux groupe : la première la conservation de la quantité du mouvement fluide et le second la conservation de la masse. vue que de la difficulté de trouver une solution permanente à ces équations, en particulier dans l'espace en trois dimensions, nous avons recours aux méthodes numériques comme les méthode d' éléments finis et différences finies .....

La discrétisation des équations de Navier-Stokes en temps et il est obtenu en linéarisant le terme nonlinéaire.

**Mots clés :** équations de Navier-Stokes, éléments finis, différences finis, discrétisation, incompressible.

## المُلخَص :

مَعَادَلَات نَافِيه سَتوكس هِي مَعَادَلَات غَيْر خَطِيَّة ، هَذِهِ المَعَادَلَات مَعْرِفَةٌ بِمَجْمُوعَتَيْنِ هَمَا : الأَوَّلَى إِنْخَفَاض الكَمِيَّة فِي حَرَكَةِ السَّوَائِلِ وَ الثَّانِيَّةُ إِنْخَفَاض الكِتْلَةِ . نَظَرًا لَصُعُوبَةٍ وَجُودِ حَلِّ دَائِمٍ لِهَذِهِ المَعَادَلَاتِ خَاصَّةً فِي الفِضَاءِ ثَلَاثِي الأَبْعَادِ لَذَلِكَ نَلجَا إِلَى الطَّرِيقِ العَدِيدَةِ كَطَرِيقَةِ العَنَاصِرِ المَتَهِيَّةِ وَ الفُرُوقِ المَتَهِيَّةِ ...

إِنَّ تَقْسِيمَ مَعَادَلَاتِ نَافِيه سَتوكس بِالنَّسْبَةِ لِزَمَنِ مَن أَجْلِ الحِصُولِ عَلَى خَطِيَّةِ الحِزِّ الغَيْرِ خَطِيَّةٍ .  
**الكلمات المفتاحية :** مَعَادَلَات نَافِيه سَتوكس ، العَنَاصِرِ المَتَهِيَّةِ ، الفُرُوقِ المَتَهِيَّةِ ، التَقْسِيمِ ، غَيْرِ قَابِلِ لظَغَطٍ .

## Abstract :

Navier-Stokes equations are nonlinear equations, these equations are two groups : first the conservation of the quantity of fluid motion and the second the mass conservation . as to the difficulty of finding a permanent solution to these equations, especially in space in three dimensions, we resort to numerical methods like the method of finite element and finite difference...

The discretization of the Navier-Stokes equations in time and it is obtained by linearizing the nonlinear term.

**Key-words :** Navier-Stokes equations , finite elements, finite differences, discretization, incompressible.