



**UNIVERSITE KASDI MERBAH  
OUARGLA**

Faculté des mathématiques et sciences de la  
matière

N° d'ordre :  
N° de série :

**DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

**Master**

**Spécialité: Mathématiques**

**Option: Modélisation et Analyse Numérique**

**Par: Karima BEN AMARA**

**Thème**

**QUELQUES MÉTHODES POUR LA RÉOLUTION DES  
ÉQUATIONS INTÉGRÉ-DIFFÉRENTIELLES**

**Version de: 03/06/2015**

**Devant le jury composé de:**

Mr. Moustafa ASSILA	M.A UKMO universit - Ouargla	Président
Mr. Mohamed Said SAID	M.A UKMO universit - Ouargla	Examineur
Mr. Amara GUERFI	M.A UKMO universit - Ouargla	Rapporteur

# Dedicace

Merci **Allah** (mon dieu) de m'avoir donné la capacité d'écrire et de réfléchir, la force d'y croire, la patience d'aller jusqu'au bout du rêve et le bonheur de lever mes mains vers le ciel et de dire " Al hamdo li ALLAH "

Je dédie ce modeste travail à celle qui m'a donné la vie, le symbole de tendresse, qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite, à ma mère

A mon père, école de mon enfance, qui a été mon ombre durant toutes les années des études, et qui a veillé tout au long de ma vie à encouragement, à me donner l'aide et à me protéger.

A mes adorables Sours

A mes frères

A toute la grande familles **BEN AMARA**

A mes amies

A tous ceux qui me sont chères

A tous ceux qui m'aiment

A tous ceux que j'aime

Je dédie ce travail

# Remerciements

Avant toute considération, je remercie le GRAND DIEU le tout puissant qui, m'a aidé pour acheiver ce travail.

Je remercie premièrement mon directeur de recherche, Monsieur **GUERFI AMARA**, pour son soutien scientifique, ainsi que pour sa compétence et les bonnes orientations, ses précieux conseils mais aussi ses encouragements. Je lui exprime toute ma gratitude.

Je remercie messieurs les membres de jury : qui ont accepté de participer au jury de soutenance.

Je souhaite présenter mes remerciements à mes enseignants **M.SAID MOHAMED SAID** et **M.ASSILA MOUSTAFA** pour leurs aides.

je tiens aussi remercier **M.SAID BELOUL** université de Oued.

Enfin, je remercie toute personne ayant participé à réaliser ce travail.

# Rappelles

## Espace $L_2(a, b)$

i) On dit qu'une fonction  $f(x)$  est de carré intégrable sur  $[a, b]$  si l'intégral

$$\int_a^b f^2(x) dx$$

existe (est finie). L'ensemble de tout les fonction de carré intégrable sur  $[a, b]$  sera noté  $L_2(a, b)$  ou  $L_2$ .

ii) le produit scalaire de deux fonction  $f \in L_2, g \in L_2$  est le nombre

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

iii) On définit la norme d'une fonction  $f \in L_2$  le nombre le non négatif

$$\| f \| = \sqrt{\int_a^b | f(x) |^2}$$

iv) Soient  $T_1, T_2$  deux opérateurs intégraux sur  $L^p(E)$  associés aux noyaux  $K_1, K_2$  respectivement, alors

a) Si  $K$  est le noyau de  $T_1 \circ T_2$  alors

$$K(x, y) = \int_E K_1(x, z) K_2(z, y) dz$$

b) Si est le noyau de  $T^n = T \circ T \circ \dots \circ T$  alors

$$K_n(x, y) = \int_E K(x, z)K_{n-1}(z, y)dz$$

$K_n$  est noyau intéré à l'orde  $n$  de  $K$

c) Pour chaque  $p, q \in N^*$  , si  $E = [a, b]$ , alors on a

$$K_{p+q}(x, y) = \int_a^b K_p(x, z)K_q(z, y)dz$$

d) Les polynômes de Legendre qui sont donnés par

$$p_n(x) = \frac{1}{n!2^n} * \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n = 2^{-n} \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m C_n^m C_{2n-2m}^m x^{n-2m}$$

. Sont orthogonaux sur l'intervalle  $[-1, +1]$

$$\int_{-1}^{+1} p_j(s).p_k(s)ds = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ \frac{2}{2k+1} & \text{si } j = k \end{cases}$$

vi) Le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré  $n$  associé à  $f$  et aux points  $x_0, x_1, \dots, x_n$  est :

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)l_i(x)$$

ou  $l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x-x_j)}{x_i-x_j}$   $0 \leq i \leq n$  sont les polynômes de Lagrange de base de degré  $n$ . associés à  $x_0, x_1, \dots, x_n$  telles que

$$\begin{cases} l_i(x_i) = 1 \\ l_i(x_j) = 0 \text{ si } j \neq i \end{cases}$$

vii) Soit  $F$  une fonction  $n$  fois intégrable sur  $[a, b]$ , et  $s \in [a, b]$ , alors on a l'identité

$$\int_a^s \int_a^{s_n} \dots \int_a^{s_2} F(s_1)ds_1ds_2\dots ds_{n-1}ds_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^s (s-t)^{n-1}F(t)dt$$

## La règle de Leibniz

Soit  $g$  de fonction différentiable en  $y$ . Est donnée la règle de Leibniz par la formule

$$\frac{d}{dy} \int_a^b g(t, y) dt = \int_a^b \frac{dg(t, y)}{dy} dt$$

en cas général

$$\frac{d}{dt} \int_{A(t)}^{B(t)} f(t, s) ds = \int_{A(t)}^{B(t)} \frac{\delta f(t, s)}{\delta t} ds + f(t, B(t)) \frac{dB}{dt} - f(t, A(t)) \frac{dA(t)}{dt}$$

# Table des matières

<b>Dedicace</b>	<b>i</b>
<b>Remerciements</b>	<b>ii</b>
<b>Rappelles</b>	<b>iii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduction à la théorie des Équations Intégrales</b>	<b>2</b>
1.1 Opérateur intégrale linéaire . . . . .	2
1.1.1 Opérateur compact . . . . .	2
1.2 Théorème de Riesz . . . . .	3
1.3 Équations intégrales linéaire et leurs classification . . . . .	4
1.3.1 Équations intégrales de Volterra . . . . .	4
1.3.2 Équations intégrales de Fredholm . . . . .	5
1.3.3 Équations intégrales différentielles . . . . .	6
1.3.4 Équations intégrales singulier . . . . .	6
1.4 Équations intégrales différentielles linéaire et leurs classification . . . . .	7
1.4.1 Équations intégrales différentielles de Fredholm . . . . .	7
1.4.2 Équations intégrales différentielles de Volterra . . . . .	7
1.4.3 Équations intégrales différentielles de Volterra-Fredholm . . . . .	8
<b>2 Résolution analytique des équations intégrales différentielles</b>	<b>9</b>
2.1 Équations intégrales différentielles de Volterra linéaire la deuxième type . . . . .	9
2.1.1 La méthode de solution sous forme série . . . . .	10

2.1.2	La méthode de décomposition de Adomian . . . . .	12
2.1.3	La méthode de transformation de Laplace . . . . .	15
2.2	Équations intégro-différentielles de Fredholm linéaire de deuxième type . . .	17
2.2.1	La méthode de calcul direct . . . . .	17
2.2.2	La méthode de décomposition Adomian . . . . .	19
2.2.3	La méthode solution sous forme séries . . . . .	21
2.3	Équations intégro-différentielles de Volterra non linéaire la deuxième type .	23
2.3.1	Le combiné Laplace Transform-Méthode de décomposition Adomian .	24
2.3.2	La méthode de solution sous forme série . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Méthodes de résolution approchées des équations intégro-différentielles</b>	<b>30</b>
3.1	Remplacement du noyau d'une équation integro- différentielle par un noyau dégénéré . . . . .	30
3.1.1	Principe de la méthode . . . . .	30
3.2	Méthode des approximation successives . . . . .	34
3.2.1	Principe de méthode . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Méthodes de résolution numérique des équations intégro-différentielles</b>	<b>35</b>
4.1	Rappel Integration Numérique . . . . .	35
4.2	Méthode des trapèzes . . . . .	35
4.3	La méthode de Simpson . . . . .	36
4.4	La méthode des fonctions de Haar rationalisées . . . . .	37
4.4.1	Les fonctions de Haar . . . . .	37
4.4.2	Les fonctions de Haar rationalisées . . . . .	38
	<b>Conclusion</b>	<b>44</b>



# Introduction

Parmi les branches les plus importantes en mathématiques, dans les temps anciens et récemment type des Équations différentielle et des Équations Intégrale qui sont considérés comme l'épine dorsale de la majeure partie de la science actuelle si pas tous.

Est apparu une autre branche d'équations embrasser différentielle et Intégrale dans la même équation , à été introduit par Volterra par la première fois en 1900, il a appelé les Équations intégral-différentielles .

Où nous trouvons un grand nombre de questions dans le domaine de l'ingénierie et les sciences physiques et sociales sont formulées mathématiquement sous la forme d'équations intégral-différentielles.

Ainsi notre mémoire se compose de quatre chapitres :

**Le premier chapitre** aborde des notion sur les équations intégrales, définition et classification des équations integro-différentielles

**Le deuxième chapitre** est consacré à l'étude les méthodes analytique de résolution exacte de l'équation integro-différentielle de Volterra et Fredholm linéaire et non linéaire, avec des exemples

**Le troisième chapitre** est consacré aux méthodes approchées .

**Le quatrième chapitre** est consacré aux méthodes de résolution numérique où nous avons utilisés les méthodes des Trapèzes et la methode de simpson et la méthode des fonctions de Haar rationalisées.

# Chapitre 1

## Introduction à la théorie des Équations Intégrales

### 1.1 Opérateur intégrale linéaire

**Définition 1.1** soit  $k : C[a, b] \times C[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue l'opérateur intégrale linéaire sur  $C[a, b]$  par définit par  $\varphi \in C[a, b] \longrightarrow A\varphi \in C[a, b]$ , tel que,

$$(A\varphi)(x) = \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt \quad (1.1)$$

ou la fonction  $k(x, t)$  s'appelle le noyau de  $A$ .

#### 1.1.1 Opérateur compact

**Définition 1.2** Soit  $E$  et  $F$  deux espace normés,  $A$  un opérateur linéaire de  $E$  dans  $F$ , on dit que  $A$  est un opérateur compact si l'image de la boule unité  $B(0,1)$  de  $E$  (par  $A$ ) est relativement compacte dans  $F$ , i.e. si  $A(B(0,1))$  est compacte. Autrement dit,  $A$  est compacte si pour tout suite  $(\phi_n)$  de  $B(0,1)$  de  $E$ , on peut extraire une sous suite  $(\phi_{n_k})$  que transforme  $A$  en une suite convergente  $(A(\phi_{n_k}))$  dans  $F$ .

**Proposition 1.1** soit  $X, Y$  deux espace normés

- 1) l'ensemble des opérateur compacte de  $X$  dans  $Y$  est un sous espace vectoriel de l'espace des opérateur linéaire  $L(x, y)$ .

2) le produit  $A_1 A_2$  de deux opérateurs bornés  $A_1$  et  $A_2$  est compact si l'un des opérateurs  $A_1$  ou  $A_2$  est compacte.

3) Si  $A$  un opérateur borné de  $X$  dans  $Y$  à image  $A(x)$  de dimension finie alors  $A$  est compacte.

**Théorème 1.1** Soit  $X$  un espace normé et  $Y$  un espace de Banach et soit  $\{A_n\}$  une suite d'opérateurs compacts, si  $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ , alors  $A$  est compacte.

**Théorème 1.2** l'opérateur intégral  $A$  de  $C(G)$  dans  $C(G)$  à noyau continu est un opérateur compact.

**Preuve.** Soit  $E$  un ensemble borné de  $C(G)$  alors, on a  $\|A\varphi\| \leq M |G| \max |k(x, y)|$ ,  $\forall x, y \in G$  et  $\forall \varphi \in E$

cela veut dire que  $A(E)$  est borné. l'opérateur  $k$  est uniformément continu sur le compacte  $G \times G$ , d'où

$\forall \varepsilon \geq 0 \exists \delta \geq 0, \forall x, y, z \in G |x - y| < \delta \implies$

$|k(x, z) - k(y, z)| < \frac{\varepsilon}{M|G|}$ , d'où

$|A\varphi(x) - A\varphi(y)| < \varepsilon$  pour tout  $\varphi \in E$  et  $x, y \in G$  avec  $|x - y| < \varepsilon$ , ceci exprime que l'ensemble  $A(E)$  est équicontinu, d'où  $A(E)$  est relativement

compact d'après le théorème d'Arzelà-Ascoli alors  $A$  est compact ■

## 1.2 Théorème de Riesz

**Théorème 1.3** Soit un opérateur compact  $A : E \rightarrow E$  tel que  $E$  est un espace normé. Alors l'opérateur  $L = I - A$ , (l'opérateur étudié dans le cadre des équation intégral) a les propriétés suivantes :

-  $\text{Ker}(L)$  est de dimension finie.

-  $\text{Im}(L)$  est fermé, et de codimension finie.

- Il existe un unique  $r \in \mathbb{N}$  appelé nombre de Riesz de l'opérateur  $A$ ,

tel que :  $\{0\} = Ker(L^0) \subset Ker(L^1) \subset \dots \subset Ker(L^r) = Ker(L^{r+1}) = \dots$

$E = Im(L^0) \supset Im(L^1) \supset \dots \supset Im(L^r) = Im(L^{r+1}) = \dots$

Et on a la somme directe  $E = Ker(L^r) \oplus im(L^r)$  .

De plus ,on a l'alternative de Fredholm :

$Im(L) = Ker(L^*)^\perp$  , ou  $L^*$  est l'opérateur de adjoint de  $L$ .

les inclusion énoncés ci-dessus sont strictes.

## 1.3 Équations intégrales linéaire et leurs classification

Nous savons l'équation intégrales dans ce formulaire :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x, t)u(t)dt \quad (1.2)$$

où  $K(x, t)$  est appelée le noyau de l'équation intégrale (1.2),  $\alpha(x)$  et  $\beta(x)$  c'est à sont les limites de l'intégration. On peut facilement observer que la fonction inconnue  $u(x)$  apparaît sous le signe de l'intégrale. Il est à noter ici que le noyau  $K(x, t)$  et la fonction  $f(x)$  dans l'équation (1.2) sont des fonctions donné, et  $\lambda$  est une constante paramètre. L'objectif principal de ce texte est de déterminer la fonction inconnue  $u(x)$  qui va satisfaire l'équation (1.2) en utilisant un certain nombre de techniques de solutions. Nous doit consacrer des effort considérables dans l'exploration de ces méthodes pour trouver des solutions de la fonction inconnue.

### 1.3.1 Équations intégrales de Volterra

La forme la plus classique de Volterra linéaires équations intégrales est de la forme

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt \quad (1.3)$$

où les limites de l'intégration sont fonction de  $x$  et la fonction inconnue  $u(x)$  apparaît linéairement sous le signe. Si la fonction  $\phi(x) = 1$ , alors l'équation (1.3) devient tout simplement

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt \quad (1.4)$$

et cette équation est connue comme l'équation intégrale de Volterra du second type ; considérant que si  $\phi(x) = 0$ , alors l'équation (1.3) devient

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt = 0 \quad (1.5)$$

qui est connu comme l'équation de Volterra du premier type.

### 1.3.2 Équations intégrales de Fredholm

La forme plus standard de linéaires équations intégrales de Fredholm est donnée par la formule

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt \quad (1.6)$$

où les limites de l'intégration  $a$  et  $b$  sont des constantes et la fonction inconnue  $u$  apparaît de façon linéaire sous le signe intégral. Si la fonction  $\phi(x) = 1$ , alors (1.6) devient simplement.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt \quad (1.7)$$

Cette équation est appelée équation intégrale de Fredholm du second type ; considérant que si  $\phi(x) = 0$ , alors (1.6) rendements.

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt = 0 \quad (1.8)$$

qui s'appelle l'équation intégrale de Fredholm de première espèce.

#### Remarque

$F(u(x)) = u^n(x), n \neq 1$ , ou  $\sin u(x)$  etc...puis de Volterra et équations intégrales de Fredholm sont classés comme des équations intégrales non-linéaires. Comme pour les exemples, les éléments suivants équations intégrales sont équations intégrales non-linéaires :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u^2(t)dt$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\sin(u(t))dt$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\ln(u(t))dt$$

Ensuite, si nous définissons  $f(x) = 0$ , de Volterra ou équations intégrales de Fredholm, puis la suite équation est appelée une équation intégrale homogène, dans le cas contraire, il est appelé équation intégrale non homogène.

### 1.3.3 Équations intégro-différentielles

Dans le début des années 1900, Vito Volterra a étudié le phénomène de croissance de la population, et nouveaux types d'équations développées et nommés comme équations intégro-différentielles. Dans ce type d'équations, la fonction inconnue  $u(x)$  apparaît comme la combinaison du dérivé ordinaire et sous le signe intégral.

Dans l'électrique problème d'ingénierie, le courant  $I(t)$  circulant dans un circuit fermé puisse être obtenu en la forme de l'équation intégro-différentielle suivante sont classés comme les équations intégrales singulier.

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int_0^1 I(\tau) d\tau = f(t), \quad I(0) = I_0 \quad (1.9)$$

où  $L$  est l'inductance,  $R$  est la résistance,  $C$  la capacitance et  $f(t)$  l'applique tension. Des exemples similaires peuvent être cités comme suit :

$$u''(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x-t)u(t)dt, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1 \quad (1.10)$$

$$u'(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K(xt)u(t)dt, \quad u(0) = 1 \quad (1.11)$$

Équations (1.9) et (1.10) sont des équations intégro-différentielles de Volterra type, considérant qu'équations intégro-différentielles d'équation (1.11) Fredholm type. Ces terminologies ont été conclus en raison de la présence de durée indéterminée et déterminée intégrales.

### 1.3.4 Équations intégrales singulier

Une équation intégrale du singulier est définie comme une intégrale avec les limites infinies ou lorsque le noyau de l'intégrale devienne non lié à un certain moment dans l'intervalle. Comme pour obtenir des exemples,

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)dt \\ f(x) &= \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t)dt, \quad 0 < \alpha < 1 \end{aligned} \quad (1.12)$$

## 1.4 Équations intégral-différentielles linéaire et leurs classification

Soit l'équation intégral-différentielle linéaire

$$\varphi^{(n)}(x) + a_1\varphi^{(n-1)}(x) \dots a_n\varphi(x) + \sum_{m=0}^s \int_0^x k_m(x,t)\varphi^{(m)}(t)dt = f(x), \quad (1.13)$$

où  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sont des constantes,  $f(x), k_m(x)$  ( $m = 0, 1, \dots, s$ ) des fonctions données,  $\varphi(x)$  la fonction cherchée.

La fonction  $\varphi(x)$  est assujettie à des condition initiales de la forme

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \varphi'(0) = \varphi'_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(0) = \varphi_0^{(n-1)} \quad (1.14)$$

### 1.4.1 Équations intégral-différentielles de Fredholm

L'équation intégral-différentielle de Fredholm apparaît dans la forme :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt, \quad (1.15)$$

où  $u^{(n)}$  indique la dérivée n-ième de  $u(x)$ . Autres dérivés de l'ordre de moins peuvent apparaître avec  $u^{(n)}$  sur le côté gauche. Des exemples de Fredholm intégral-différentielles

$$u'(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \int_0^1 xu(t)dt, \quad u(0) = 0 \quad (1.16)$$

et

$$u''(x) + u'(x) = x - \sin x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xt u(t)dt, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1 \quad (1.17)$$

### 1.4.2 Équations intégral-différentielles de Volterra

L'équation intégral-différentielle de Volterra apparaît dans la forme :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)u(t)dt, \quad (1.18)$$

où  $u^{(n)}$  indique la dérivée de  $u(x)$ . Autres dérivés de l'ordre de moins peuvent apparaître avec  $u^{(n)}$  sur le côté gauche. Exemples de équations l'integro-différentielle de Volterra sont données par

$$u'(x) = -1 + \frac{1}{2}x^2 - xe^x - \int_0^x tu(t)dt, \quad u(0) = 0, \quad (1.19)$$

et

$$u''(x) + u'(x) = 1 - x - (\sin x + \cos x) - \int_0^x tu(t)dt, \quad u(0) = -1, \quad u'(0) = 1. \quad (1.20)$$

### 1.4.3 Équations intégral-différentielles de Volterra-Fredholm

Équations intégral-différentielles de Volterra-Fredholm apparaissent dans la littérature sous deux formes, à savoir

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t)u(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t)u(t)dt, \quad (1.21)$$

et

$$u^{(n)}(x, t) = f(x, t) + \lambda \int_0^t \int_{\Omega} F(x, t, \xi, \tau, u(\xi, \tau))d\xi d\tau, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (1.22)$$

où  $f(x, t)$  et  $F(x, t, \xi, \tau, u(\xi, \tau))$  sont des fonctions analytiques sur  $D = \Omega \times [0, T]$ , et  $\Omega$  est une partie fermée de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 1, 2, 3$ . Il est intéressant de noter que (1.21) contient disjoints équations intégrales de Volterra et Fredholm, alors (1.22) contient mixtes intégrales. Autres dérivés du moins commander peuvent apparaître ainsi. En outre, les fonctions inconnues  $u(x)$  et vous  $u(x, t)$  apparaissent à l'intérieur et à l'extérieur des signes d'intégrale. Il s'agit d'un trait caractéristique d'une sorte de deuxième partie intégrante équation. Si les fonctions inconnues apparaissent uniquement à l'intérieur des signes d'intégrale, d'équations résultantes sont de première espèce. Il faudrait des conditions initiales pour déterminer la solution particulière. Des exemples des deux types sont donnés par

$$u'(x) = 24x + x^4 + 3 - \int_0^x (x - t)u(t)dt - \int_0^1 tu(t)dt, \quad u(0) = 0, \quad (1.23)$$

et

$$u'(x, t) = 1 + t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \int_0^t \int_0^1 (\tau - \xi)d\xi d\tau, \quad u(0, t) = t^3. \quad (1.24)$$



## Chapitre 2

# Résolution analytique des équations intégral-différentielles

### 2.1 Équations intégral-différentielles de Volterra linéaire la deuxième type

**Définition 2.1** les équations intégral-différentielles de Volterra linéaire la deuxième type soit données sous la forme :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u(t)dt \quad (2.1)$$

Où  $u^{(n)}(x) = \frac{d^n u}{dx^n}$ . Parce que l'équation a entraîné dans (2.1) combine les opérateur différentiel et l'opérateur intégral, alors il est nécessaire de définir les conditions initiales  $u(0), u'(0), \dots, u^{(n-1)}(0)$  pour la détermination de la  $u(x)$  solution particulière de l'équation intégral-différentielle de Volterra (2.1). Toute équation intégral-différentielle de Volterra se caractérise par l'existence de une ou plusieurs des dérivés  $u'(x), u''(x), \dots$  dehors le signe intégral. Le on peuvent observer des équations intégral-différentielles de Volterra lorsque nous convertissons un problème de valeur initiale à une équation intégrale à l'aide de la règle de Leibnitz .

Les conditions initiales sont nécessaires pour déterminer la solution exacte.

### 2.1.1 La méthode de solution sous forme série

Le fonction  $u(x)$  est appelé analytique si elle a des dérivés de tous les ordres tels que la série de Taylor à n'importe quel point  $b$  dans son domaine

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{(n)}(b)}{n!} (x - b)^n \quad (2.2)$$

converge vers  $u(x)$  dans un quartier de  $b$ . Pour plus de simplicité, la forme générique de Séries de Taylor à  $x = 0$  peut s'écrire sous

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2.3)$$

Dans cette section, nous allons appliquer la méthode de solution sous forme série pour la résolution équations intégrales de Volterra du second type. Nous supposons que la solution  $u(x)$  de l'équation intégrale de Volterra est sous la forme :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) u(t) dt, \quad u^{(k)}(0) = k! a_k, \quad 0 \leq k \leq (n - 1) \quad (2.4)$$

est analytique et possède donc par série de Taylor de la forme donnée un développement en (2.3), où les coefficients  $a_n$  seront déterminés par récurrence. Les premiers coefficients  $a_k$  peuvent être déterminés en utilisant les conditions initiales et alors

$$a_0 = u(0), a_1 = u'(0), a_2 = \frac{1}{2!} u''(0), a_3 = \frac{1}{3!} u'''(0) \quad (2.5)$$

et ainsi de suite. Pour déterminer en appliquant les coefficients  $a_k$  restants de (2.3) serrent déterminés par l'application la méthode de solution de série à l'équation intégrale de Volterra (2.4). Substitution (2.3) dans les deux côtés de la donne (2.4)

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)^{(n)} = T(f(x)) + \int_0^x K(x, t) \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) dt \quad (2.6)$$

ou pour plus de simplicité, nous utilisons

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)^{(n)} = T(f(x)) + \lambda \int_0^x K(x, t) (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) dt \quad (2.7)$$

où  $T(f(x))$  est la série de Taylor de  $f(x)$ . L'équation intégrale (2.4) sera converti en une intégrale traditionnelle dans (2.6) ou (2.7) où à la place d'intégrer la fonction inconnue  $u(x)$  termes de la forme  $t^n$ ,  $n \geq 0$  sera intégrée. Notez que parce que nous cherchons

la solution de la série, puis si  $f(x)$  inclut des fonctions élémentaires comme les fonctions trigonométriques, fonctions exponentielles, etc, puis Taylor expansions pour fonctions impliquées dans  $f(x)$  doit être utilisé.

Nous intégrons tout d'abord la partie droite de l'intégrale dans (2.6) ou (2.7), et collecter les coefficients de comme puissances de  $x$ . Nous assimilons ensuite les coefficients d'aime les puissances de  $x$  dans les deux côtés de l'équation pour déterminer un relation de récurrence dans  $a_j, j \geq 0$ . Résoudre la relation de récurrence conduira à une détermination complète des coefficients  $a_j, j \geq 0$  où certains d'entre eux coefficients seront utilisés à partir des conditions initiales. Après avoir déterminé la coefficients  $a_j, j \geq 0$ , la solution de série suit immédiatement à son remplacement par les coefficients dérivés en (2.3). La solution exacte peut être obtenue si une telle solution exacte existe. Si une solution exacte ne est pas obtenue, puis la série obtenu peut être utilisé à des fins numériques. Dans ce cas, le plus termes nous évaluons, le niveau de précision plus élevé nous atteignons.

**Exemple 2.1** *Utilisez la méthode de solution sous forme série pour résoudre l'équation intégral-différentielle de Volterra*

$$u'(x) = 1 + \int_0^x u(t)dt \quad (2.8)$$

**solution**

*Son remplacement par  $u(x)$  de la série*

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2.9)$$

*dans les deux côtés de l'équation (2.8) conduit à*

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = 1 + \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt \quad (2.10)$$

*Différencier le côté gauche une fois par rapport à  $x$ , et l'évaluation de l'intégrale sur le côté droit, nous trouvons*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n-1} x^n \quad (2.11)$$

qui peut être réécrite sous la forme

$$a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}a_{n-1}x^n \quad (2.12)$$

où nous avons unifié l'exposant de  $x$  les deux côtés et utilisé  $a_0 = 0$  de la condition initiale donnée. Assimiler les coefficients de puissances comme de  $x$  à la fois côtés de (2.12) donne la relation de récurrence

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}a_{n-1} \geq 1 \quad (2.13)$$

où ce résultat donne

$$a_{2n} = 0, a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!} \quad (2.14)$$

Pour  $n \geq 0$ . Par substitution de ce résultat dans (2.9) donne la solution de série

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (2.15)$$

qui converge vers la solution exacte

$$u(x) = \sinh x \quad (2.16)$$

### 2.1.2 La méthode de décomposition de Adomian

La méthode de décomposition de Adomian [5] donne la solution dans un infini série de composants qui peuvent être déterminés de façon récurrente. La série obtenue peut donner la solution exacte, si une telle solution existe. Dans le cas contraire, la série donne une approximation de la solution qui donne le niveau de précision élevé. Sans perte de généralité, on peut supposer un'équation intégrale-différentielle de Volterra du second type donnée par

$$u''(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)u(t)dt, \quad u(0) = a_0, \quad u'(0) = a_1 \quad (2.17)$$

Intégration des deux côtés (2.17) de 0 à  $x$  deux fois conduit à

$$u(x) = a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1} \left( \int_0^x K(x,t)u(t)dt \right) \quad (2.18)$$

où les conditions initiales  $u(0)$  et  $u'(0)$  sont utilisés, et  $L^{-1}$  est une fois deux opérateur intégral. Nous utilisons ensuite la série de décomposition

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \quad (2.19)$$

dans les deux côtés de (2.18) pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1} \left( \int_0^x K(x,t) \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt \right) \quad (2.20)$$

ou de façon équivalente

$$\begin{aligned} u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots &= a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)), \\ +L^{-1} \left( \int_0^x K(x,t)u_0(t)dt \right) + L^{-1} \left( \int_0^x K(x,t)u_1(t)dt \right), & \\ +L^{-1} \left( \int_0^x K(x,t)u_2(t)dt \right) + \dots, & \end{aligned} \quad (2.21)$$

Pour déterminer les composants  $u_0(x), u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots$  de la solution  $u(x)$ , Nous avons mis la relation de récurrence

$$\begin{aligned} u_0(x) &= a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)), \\ u_{k+1}(x) &= L^{-1} \left( \int_0^x K(x,t)u_k(t)dt \right), \quad k \geq 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

où le zéro élément  $u_0(x)$  est défini par tous les termes non inclus à l'intérieur le signe intégral (2.21). Après avoir déterminé les composants  $u_i(x), i \geq 0$ , la solution  $u(x)$  de (2.17) est alors obtenu sous forme de série. En utilisant (2.19), la série obtenue converge vers la solution exacte, si une telle solution existe. Cependant, pour des problèmes concrets, une série tronquée  $\sum_{n=0}^n u_k(x)$  est généralement utilisé rapprochant la solution  $u(x)$  qui peut être utilisé à des fins numériques.

### Remarques

1. La méthode de décomposition de Adomian a été présentée avant de gérer une deuxième équations intégral-différentielles d'ordre Volterra. Pour les autres commandes, nous pouvons suivre la même approche, telle que présentée. Cela sera expliqué plus loin dans les détails en examinant les exemples illustratifs, où le premier ordre, deuxième ordre, troisième ordre, et les équations intégral-différentielles de quatrième ordre Volterra seront étudiées.

2. La méthode de décomposition modifiées que nous avons utilisé avant peut être utilisée pour le traitement des équations intégral-différentielles Volterra de n'importe quel ordre.
3. Le phénomène des termes bruit qui a été appliquée avant peut être utilisé ici si apparaissent des termes de bruit

**Exemple 2.2** *Utilisez la méthode Adomian pour résoudre l'équation intégral-différentielle de Volterra*

$$u'(x) = 1 - \int_0^x u(t)dt, u(0) = 0. \quad (2.23)$$

**solution**

*Application de l'opérateur intégral  $L^{-1}$  définie par*

$$L^{-1}(\cdot) = 1 - \int_0^x (\cdot)dx, \quad (2.24)$$

*des deux côtés de (2.23), ce est à dire intégrant les deux côtés de (2.23) une fois de 0 à x, et en utilisant la condition initiale donnée nous obtenons*

$$u(x) = x - L^{-1} \left( \int_0^x u(t)dt \right). \quad (2.25)$$

*Utilisation de la série de décomposition (2.19), et en utilisant la relation de récurrence (2.22) on obtient*

$$\begin{aligned} u_0(x) &= x, \\ u_1(x) &= -L^{-1} \left( \int_0^x u_0(t)dt \right) = -\frac{1}{3!}x^3, \\ u_2(x) &= L^{-1} \left( \int_0^x u_1(t)dt \right) = \frac{1}{5!}x^5, \\ u_3(x) &= L^{-1} \left( \int_0^x u_2(t)dt \right) = -\frac{1}{7!}x^7, \end{aligned} \quad (2.26)$$

*et ainsi de suite. Cela donne la solution sous forme de série*

$$u(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots, \quad (2.27)$$

*et par conséquent la solution exacte est donnée par*

$$u(x) = \sin x \quad (2.28)$$

### 2.1.3 La méthode de transformation de Laplace

La méthode de transformation de Laplace a été utilisée avant pour résoudre Volterra intégrante équations du premier et du deuxième type. Les détails et propriétés Procédé de la transformée de Laplace est présent dans différentielle ordinaire équations textes.

Dans la transformation de Laplace théorème de convolution, il a été dit que, si le noyau  $K(x, t)$  de l'équation intégrale

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u(t)dt, \quad (2.29)$$

dépend de la différence  $x - t$ , il est alors appelé un noyau de différence. L'équation intégrale-différentielle peut donc être exprimée comme

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x - t)u(t)dt, \quad (2.30)$$

Considérons deux fonctions  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$  qui possèdent les conditions nécessaires de l'existence de transformée de Laplace pour chacun. Que les transformées de Laplace pour les fonctions  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$  est donnée par

$$L\{f_1(x)\} = F_1(s), \quad L\{f_2(x)\} = F_2(s) \quad (2.31)$$

Le produit de convolution de Laplace ces deux fonctions est définie par

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_0^x f_1(x - t)f_2(t)dt \quad (2.32)$$

ou

$$(f_2 * f_1)(x) = \int_0^x f_2(x - t)f_1(t)dt \quad (2.33)$$

Rappelons que

$$(f_1 * f_2)(x) = (f_2 * f_1)(x) \quad (2.34)$$

On peut montrer facilement que la transformée de Laplace de la produit de convolution  $(f_1 * f_2)(x)$  est donnée par

$$L\{(f_1 * f_2)(x)\} = L\left\{\int_0^x f_1(x - t)f_2(t)dt\right\} = F_1(s)F_2(s). \quad (2.35)$$

Pour résoudre les équations intégré-différentielles de Volterra en utilisant la méthode de transformée de Laplace, il est essentiel d'utiliser les transformations de Laplace des dérivés de  $u(x)$ . Nous pouvons facilement montrer que

$$L\{u^{(n)}(x)\} = s^n L\{u(x)\} - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \dots - u^{(n-1)}(0). \quad (2.36)$$

Cela donne tout simplement

$$\begin{aligned} L\{u'(x)\} &= sL\{u(x)\} - u(0) \\ &= sU(s) - u(0), \\ L\{u''(x)\} &= s^2L\{u(x)\} - su(0) - u'(0) \\ &= s^2U(s) - su(0) - u'(0), \\ L\{u'''(x)\} &= s^3L\{u(x)\} - s^2u(0) - su'(0) - u''(0) \\ &= s^3U(s) - s^3u(0) - su'(0) - u''(0), \\ L\{u^{(4)}(x)\} &= s^4L\{u(x)\} - s^3u(0) - s^2u'(0) - su''(0) - u'''(0) \\ &= s^4U(s) - s^3u(0) - s^2u'(0) - su''(0) - u'''(0), \end{aligned} \quad (2.37)$$

et ainsi de suite pour les dérivées d'ordre supérieur.

Nous appliquons d'abord la transformée de Laplace à deux côtés de (2.30), utilisons la transformée de Laplace bon pour le dérivé de  $u(x)$ , puis résolvons pour  $U(s)$ . Nous utilisons ensuite la transformée inverse de Laplace des deux côtés de l'équation résultante pour obtenir la solution  $u(x)$  de l'équation.

**Exemple 2.3** *Utilisez la méthode de transformation de Laplace pour résoudre l'équation intégré-différentielles de Volterra*

$$u'(x) = 1 + \int_0^x u(t)dt, u(0) = 1. \quad (2.38)$$

**solution**

Notez que le noyau  $K(x-t) = 1$ . Prenant la transformée de Laplace de part et d'autre de (2.38) donne

$$L(u'(x)) = L(1) + L(1 * u(x)), \quad (2.39)$$

Et alors

$$sU(s) - u(0) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}U(s) \quad (2.40)$$



obtenu à l'aide de (2.37). En utilisant la condition initiale donnée et en résolvant  $U(s)$  nous trouvons

$$U(s) = \frac{1}{s-1} \quad (2.41)$$

En prenant la transformée de Laplace inverse des deux côtés de (2.41), solution l'exacte est donnée par

$$u(x) = e^x. \quad (2.42)$$

## 2.2 Équations intégral-différentielles de Fredholm linéaire de deuxième type

**Définition 2.2** Soit équations intégral-différentielles de Fredholm linéaire donnée sous la forme

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt, \quad u^{(k)}(0) = b_k, \quad 0 \leq k \leq n-1 \quad (2.43)$$

où  $u^{(n)}(x) = \frac{d^n u}{dx^n}$ . Étant donné que l'équation entraîné (2.43) combine l'opérateur différentiel et l'opérateur intégral est alors nécessaire de définir conditions initiales  $u(0), u'(0), \dots, u^{(n-1)}(0)$  pour la détermination de la solution particulière  $u(x)$  de l'équation (2.43). Toute équation intégral-différentielle de Fredholm est caractérisé par l'existence d'une ou de plusieurs des dérivés  $u'(x), u''(x), \dots$  en dehors du signe de l'intégrale.

Nous allons nous concentrer notre étude sur les équations qui impliquent séparables noyaux où le noyau  $K(x,t)$  peut être exprimée comme une somme finie de la forme

$$k(x,t) = \sum_{k=1}^n g_k(x)h_k(t). \quad (2.44)$$

Sans perte de généralité, nous allons faire notre analyse sur un noyau d'un terme  $k(x,t)$  de la forme

$$k(x,t) = g(x)h(t). \quad (2.45)$$

### 2.2.1 La méthode de calcul direct

Le format standard de l'équation intégral-différentielle de Fredholm est donné près

$$u^{(n)}(x) = \int_a^b k(x,t)u(t)dt, \quad u^{(k)}(0) = b_k, \quad 0 \leq k \leq n-1. \quad (2.46)$$

où  $u^{(n)}(x)$  indique le dérivé n-ième de  $u(x)$  par rapport à  $x$  et  $b_k$  les conditions initiales. En substituant (2.45) dans (2.46) donne

$$u^{(n)}(x) = f(x) + g(x) \int_a^b h(t)u(t)dt, \quad u^{(k)}(0) = b_k, \quad 0 \leq k \leq n - 1. \quad (2.47)$$

Nous pouvons facilement constater que l'intégrale définie dans le intégro-différentielle l'équation (2.47) implique une intégrand qui dépend entièrement de la variable  $t$ . Cela signifie que l'intégrale définie sur le côté droit de (2.47) est équivalent à  $a$  une constante  $\alpha$ . En d'autres termes, nous avons mis en

$$\alpha = \int_a^b h(t)u(t)dt. \quad (2.48)$$

Par conséquent, l'équation. (2.47) devient

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \alpha g(x). \quad (2.49)$$

L'intégration des deux côtés de (2.49)  $n$  fois à partir de 0 à  $x$ , et en utilisant conditions initiales, nous pouvons trouver une expression pour  $u(x)$  qui implique la constante  $\alpha$  en plus de la variable  $x$  Cela signifie que nous pouvons écrire

$$u(x) = v(x; \alpha). \quad (2.50)$$

En substituant (2.50) dans le côté droit de (2.48), l'évaluation de l'intégrale, et résolution de l'équation résultante, nous déterminons  $a$  valeur numérique de la constante  $\alpha$  Cela conduit à la solution exacte  $u(x)$  obtenu par la substitution la valeur résultante de  $\alpha$  en (2.50). Il est important de rappeler que cette méthode conduit toujours à la solution exacte et pas aux composants de série.

**Exemple 2.4** Résoudre l'équation intégro-différentielle de Fredholm à l'adresse suivante

$$u'(x) = 3 + 6x + x \int_0^1 tu(t)dt \quad u(0) = 0. \quad (2.51)$$

**solution**

Cette équation peut être écrite comme

$$u'(x) = 3 + 6x + \alpha x \quad u(0) = 0. \quad (2.52)$$

obtenu en définissant

$$\alpha = \int_0^1 tu(t)dt. \quad (2.53)$$

Intégrant les deux côtés du (2.52) de 0 à  $x$  et en utilisant la donnée initiale condition que nous obtenons

$$u(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2}\alpha x^2. \quad (2.54)$$

En substituant dans (2.53) et évaluer le rendement intégrale

$$\alpha = \int_0^1 tu(t)dt = \frac{7}{4} + \frac{1}{8}\alpha. \quad (2.55)$$

C'est pourquoi nous trouvons  $\alpha = 2$  La solution exacte est donnée par

$$u(x) = 3x + 4x^2. \quad (2.56)$$

## 2.2.2 La méthode de décomposition Adomian

On peut supposer un second ordre de Fredholm équation intégrale-différentielle donnée par

$$u''(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)u(t)dt, \quad u(0) = a_0, \quad u'(0) = a_1. \quad (2.57)$$

Intégration des deux côtés de (2.57) de 0 à  $x$  deux fois donne

$$u(x) = a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_a^b k(x,t)u(t)dt\right), \quad (2.58)$$

Lorsque les conditions initiales  $u(0) = a_0$ . Et  $u'(0) = a_1$ . Sont utilisés, et  $L^{-1}$  double opérateur intégral. La méthode de décomposition de Adomian admet la utilisation de la série de décomposition

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \quad (2.59)$$

dans les deux côtés de (2.58) pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)dt\right), \quad (2.60)$$

ou de façon équivalente

$$\begin{aligned}
u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots &= a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) \\
+ L^{-1} \left( \int_a^b k(x, t) u_0(t) dt \right) &+ L^{-1} \left( \int_a^b k(x, t) u_1(t) dt \right) \\
+ L^{-1} \left( \int_a^b k(x, t) u_2(t) dt \right) &+ \dots .
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Par conséquent, pour déterminer les composants  $u_0(x), u_1(x), u_2(x), u_3(x)$  de la solution  $u(x)$ , nous avons mis la relation de récurrence

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)), \\
u_{k+1}(x) &= L^{-1} \left( \int_a^b k(x, t) u_k(t) dt \right), \quad k \geq 0,
\end{aligned} \tag{2.62}$$

où le zéro élément  $u_0(x)$  est défini par tous les termes non inclus à l'intérieur le signe intégral de (2.61) . Après avoir déterminé les composants,  $u_i(x), i \geq 0$  le solution  $u(x)$  de (2.61) est ensuite obtenu sous forme de série En utilisant (2.59), la série obtenue converge vers la solution exacte si une telle solution existe.

**Exemple 2.5** *Utilisez la méthode de décomposition de Adomian pour résoudre l'équation integro-differential de Fredholm*

$$u'(x) = 36x^2 + \int_0^1 u(t)dt, \quad u(0) = 1 \tag{2.63}$$

**solution**

*Rappelons que l'intégrale sur le côté droit est équivalente à une constante parce que Cela dépend uniquement de la variable  $t$  avec limites constantes d'intégration pour  $t$ . Intégration des deux côtés de l'équation (2.63) de 0 à  $x$  donne*

$$u(x) - u(0) = 12x^3 + x \left( \int_0^1 u(t)dt \right). \tag{2.64}$$

*ce qui donne à l'utilisation de la condition initiale*

$$u(x) = 1 + 12x^3 + x \left( \int_0^1 u(t)dt \right). \tag{2.65}$$

*Son remplacement par l'hypothèse de la série*

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \tag{2.66}$$

dans les deux côtés de la donne (2.65)

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = 1 + 12x^3 + x \left( \int_0^1 u_n(t) dt \right). \quad (2.67)$$

Les composants  $u_j(x)$ ,  $j \geq 0$  de  $u(x)$  peut être déterminé en utilisant la récurrence Relation

$$u_0(x) = 1 + 12x^3, \quad u_{k+1}(x) = x \int_0^1 u_{k+1}(t) dt \quad k \geq 0. \quad (2.68)$$

Cela donne à son tour

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1 + 12x^3, & u_1(x) &= x \int_0^1 k(x, t) u_0(t) dt = 4x \\ u_2(x) &= x \int_0^1 k(x, t) u_1(t) dt = 2x & u_3(x) &= x \int_0^1 k(x, t) u_2(t) dt = x, \\ & & & \vdots \end{aligned} \quad (2.69)$$

La solution sous forme de série est donnée par

$$u(x) = 1 + 12x^3 + 4\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right), \quad (2.70)$$

qui donne la solution exacte

$$u(x) = 1 + 8x + 12x^3, \quad (2.71)$$

obtenue, évaluer la somme de la série géométrique infinie.

### 2.2.3 La méthode solution sous forme séries

La méthode de solution de série a été utilisée avant, où la forme générique de Taylor série pour une solution analytique d' $u$  à  $x = 0$

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (2.72)$$

Le série solution méthode sera utilisée pour résoudre Fredholm intégro-différentielles équations. Nous supposons que  $u(x)$  de la solution d'équation l'integro-differential de Fredholm

$$u^{(k)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt, \quad u^{(j)}(0) = a_j, \quad 0 \leq j \leq (k - 1), \quad (2.73)$$

est analytique et possède donc une série de Taylor de la forme donnée dans (2.72), où les coefficients an volonté être déterminé de façon récurrente. Son remplacement (2.72) deux côtés (2.73) donne

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^{(k)} = T(f(x)) + \lambda \int_a^b K(x, t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt, \quad (2.74)$$

ou pour plus de simplicité, nous utilisons

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)^{(k)} = T(f(x)) + \lambda \int_a^b K(x, t) (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) dt, \quad (2.75)$$

où  $T(f(x))$  est la série de Taylor de  $f(x)$ . La volonté de l'équation intégrale (2.73) être convertie en une intégrale traditionnelle dans (2.74) ou (2.75) où au lieu de intégrant la fonction inconnue  $u(x)$ , les termes forme  $t^n, n \geq 0$  sera intégré. Notez que parce que nous cherchons la solution de série, puis si  $f(x)$  inclut des fonctions élémentaires comme les fonctions trigonométriques, exponentielles fonctions, etc. Puis de développements de Taylor pour les fonctions impliquées dans  $f(x)$  doit être utilisé. En outre, les équations initiales données devraient être utilisées dans la série polyeuse (2.72).

Nous intégrons d'abord le côté droit de l'intégrale ou (2.75), et recueillir les coefficients de puissances comme de  $x$ . Nous assimilons côté les coefficients de comme puissances de  $x$  dans les deux côtés de l'équation résultant pour obtenir une récursive relation dans  $a_j, j \geq 0$ . Résoudre la relation de récurrence va conduire à une complète détermination des coefficients  $a_j, j \geq 0$ . Après avoir déterminé les coefficients  $a_j, j \geq 0$ , La solution de série suit immédiatement après son remplacement par le dérivé coefficients dans (2.72). La solution exacte peut être obtenue que si une telle solution exacte existe. Si une solution exacte ne peut être obtenu, alors le obtenue série peut être utilisé à des fins numériques. Dans ce cas, les termes plus nous évaluer le niveau de précision plus élevé que nous obtenons.

**Exemple 2.6** Résoudre l'équation intégrale-différentielle de Fredholm en utilisant la méthode solution sous forme série

$$u'(x) = 4 + 4x + \int_{-1}^1 (1 - xt)u(t)dt, u(0) = 1. \quad (2.76)$$

En substituant  $u(x)$  de la série

$$u'(x) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)', \quad (2.77)$$

dans les deux côtés de l'équation.(2.76) conduit à

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 4 + 4x + \int_{-1}^1 (1 - xt) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt. \quad (2.78)$$

Notez que  $a_0 = 1$  à partir des conditions initiales données. Évaluation de l'intégrale sur le côté droit donne

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots \\ = 6 + \frac{2}{3} a_2 + \frac{2}{5} a_4 + \frac{2}{7} a_6 + \frac{2}{9} a_8 + \left( 4 - \frac{2}{3} a_1 - \frac{2}{5} a_3 - \frac{2}{7} a_5 - \frac{2}{9} a_7 \right) x. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Assimiler les coefficients des puissances comme de  $x$  dans les deux côtés de (2.79) donne

$$a_1 = 6, a_n = 0, n \geq 2. \quad (2.80)$$

La solution exacte est donnée par

$$u(x) = 1 + 6x, \quad (2.81)$$

où nous avons utilisé  $a_0 = 1$  à partir de l'état initial.

## 2.3 Équations intégrro-différentielles de Volterra non linéaire la deuxième type

Soit l'équation non linéaire d'intégrro-différentielles de Volterra du second type lectures

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t) F(u(t)) dt, \quad (2.82)$$

et la forme standard de l'équation intégrro-différentielle non linéaire Volterra [10],[8] du premier type est donné par

$$\int_0^x K_1(x, t) F(u(t)) dt + \int_0^x K_2(x, t) u^n(t) dt = f(x), K_2(x, x) \neq 0, \quad (2.83)$$

Où  $u^{(n)}(x)$  est le  $n$  dérivé de  $u(x)$  Pour ces équations, les noyau  $K(x, t)$ ,  $K_1(x, t)$  et  $K_2(x, t)$ , et de fonction  $f(x)$  sont donnés valeurs réelles fonctions. La fonction  $F(u(x))$  est une fonction non linéaire de  $u(x)$  tels que  $u^2(x)$ ,  $\sin(u(x))$ , et  $e^{u(x)}$ . L'équation intégral-différentielles linéaire de Volterra [4],[7] où les deux différentielles et opérateurs intégraux apparaissent ensemble dans la même équation. La Volterra non linéaire équation intégral-différentielles du second type lire

$$u^{(i)}(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t)F(u(t))dt, \quad (2.84)$$

Où  $u^{(i)}(x) = \frac{d^i u}{dx^i}$  et  $F(u(x))$  est une fonction non linéaire de  $u(x)$  Parce que l'équation (2.84) moissonneuses-batteuses l'opérateur différentiel et l'intégrale opérateur, Ensuite, il est nécessaire de définir les conditions initiales pour déterminer de la solution particulière  $u(x)$  de la non linéaire Volterra intégral-différentielles équation.

L'équation intégral-différentielles de Volterra non linéaire [10], [8] est apparu après sa mise en place de Volterra. Il apparaît dans de nombreuses applications de physiques comme formant des verre processus, transfert de chaleur, processus de diffusion, engénéral, neutron diffusion et biologiques des espèces coexistant avec augmentation et baisse du taux de production. Plus de détails sur les sources où ces équations se posent peut être trouvée en physique, biologie et ouvrages de génie applications.

### 2.3.1 Le combiné Laplace Transform-Méthode de décomposition Adomian

Nous examinerons le noyau  $K(x, t)$  de (2.84) comme la différence noyau qui dépend de la différence  $x - t$  comme  $e^{x-t}$ ,  $\cosh(x - t)$  et  $\sin(x - t)$ . L'équation non linéaire du intégral-différentielles Volterra (2.84) peut donc être exprimé en

$$u^{(i)}(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t)F(u(t))dt, \quad (2.85)$$

Pour résoudre les équations intégral-différentielles de Volterra à l'adresse non linéaires en utilisant la méthode de transformée de Laplace, il est essentiel d'utiliser les transformations de Laplace de les dérivés de  $u(x)$ . Nous pouvons facilement montrer que

$$L\{u^{(i)}(x)\} = s^i L\{u(x)\} - s^{i-1}u(0) - s^{i-2}u'(0) - \dots - u^{(i-1)}(0). \quad (2.86)$$



Cela donne tout simplement voir (2.37) et ainsi de suite pour les dérivés d'ordre supérieur, où  $U(s) = L\{u(x)\}$ . L'application de la transformée de Laplace à deux côtés de (2.85) donne

$$s^i L\{u(x)\} - s^{i-1}u(0) - s^i u'(0) - \dots - u^{(i-1)}(0) = L\{f(x)\} + L\{K(x-t)\}L\{F(u(t))\}, \quad (2.87)$$

Cela donne tout simplement

$$\begin{aligned} u_0(x) &= x, \\ u_1(x) &= -L^{-1}\left(\int_0^x u_0(t)dt\right) = -\frac{1}{3!}x^3, \\ u_2(x) &= L^{-1}\left(\int_0^x u_1(t)dt\right) = \frac{1}{5!}x^5, \\ u_3(x) &= L^{-1}\left(\int_0^x u_2(t)dt\right) = -\frac{1}{7!}x^7, \\ L\{u(x)\} &= \frac{1}{s}u(0) + \frac{1}{s^2}u'(0) + \dots + u^{(i-1)}(0) \\ &+ \frac{1}{s^i} + L\{f(x)\} + L\{K(x-t)\}L\{F(u(t))\}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Pour surmonter la difficulté du terme non linéaire  $F(u(x))$ , nous appliquons la Adomian méthode de décomposition de manutention (2.89). Pour atteindre cet objectif, nous représenter d'abord le terme linéaire  $u(x)$  sur le côté gauche par une série infinie de composants donnée par

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \quad (2.90)$$

où les composants  $u_n(x), n \geq 0$  sera déterminé de manière récursive. Cependant, le terme non linéaire  $F(u(x))$  sur le côté droit de (2.89) seront représentés par une série infinie de la Adomian polynômes  $A_n$  un sous la forme

$$F(u(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x), A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[ F\left(\sum_{i=0}^n \lambda^i u_i\right) \right]_{\lambda=0}, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.91)$$

Où  $A_n, n \geq 0$  peut être obtenue pour toutes les formes de non-linéarité. En substituant (2.90) et (2.91) dans (2.89) conduit à

$$L\left\{\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\right\} = \frac{1}{s}u(0) + \frac{1}{s^2}u'(0) + \dots + \frac{1}{s^i}u^{(i-1)}(0) + \frac{1}{s^i}Lf(x) + \frac{1}{s^i}Lk(x-t)L\left\{\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)\right\}, \quad (2.92)$$

La méthode de décomposition de Adomian admet l'utilisation de la récursive suivante relation

$$\begin{aligned} L\{u_0(x)\} &= \frac{1}{s}u(0) + \frac{1}{s^2}u'(0) + \dots + \frac{1}{s^i}u^{(i-1)}(0) + \frac{1}{s^i}L\{f(x)\}, \\ L\{U_{k+1}(x)\} &= \frac{1}{s^i}L\{k(x-t)\}L\{A_k(x)\}, k \geq 0 \end{aligned} \quad (2.93)$$

Les conditions nécessaires présentées pour transformée de Laplace Procédé concernant la limite que  $s \rightarrow \infty$ , devrait être satisfait ici pour un succès utilisation de cette méthode. L'application de la transformée de Laplace inverse à la première partie (2.93) donne  $u_0(x)$ , qui définira  $A_0$ . Ce à son tour conduire à la détermination complète des composants de  $u_{k+1}, k \geq 0$  à l'aide de la deuxième partie de (2.93). Le Laplace combinée transformer méthode Adomian décomposition pour Volterra résoudre des équations intégral-différentielles non linéaires du deuxième type cela sera illustré par l'étude des exemple suivant.

**Exemple 2.7** Résoudre l'équation intégral-différentielle non linéaire Volterra en utilisant le combiné Laplace méthode de décomposition transformer Adomian-

$$u'(x) = \frac{9}{4} - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - 3e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \int_0^x (x-t)u^2(t)dt, u(0) = 2 \quad (2.94)$$

**solution**

Notez que le noyau  $k(x,t) = (x-t)$  Prenant transformée de Laplace à la fois côtés (2.94) donne

$$L\{u'(x)\} = L\left\{\frac{9}{4} - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - 3e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right\} + L\{(x-t) * u^2(x)\} \quad (2.95)$$

Et alors

$$sU(s) - u(0) = \frac{9}{4s} - \frac{5}{2s^2} - \frac{1}{s^3} - \frac{3}{s+1} - \frac{1}{4(s+2)} + \frac{1}{s^2}L\{u^2(x)\} \quad (2.96)$$

ou de façon équivalente

$$U(s) = \frac{2}{s} + \frac{9}{4s^2} - \frac{5}{2s^3} - \frac{1}{s^4} - \frac{3}{s(s+1)} - \frac{1}{4(s+2)} + \frac{1}{s^3}L\{u^2(x)\} \quad (2.97)$$

Son remplacement par l'hypothèse de la série pour élémentaire  $u(s)$  et les polynômes de Adomian pour  $U^2(x)$  comme indiqué ci-dessus en (2.90) et (2.91) respectivement et à l'aide de la relation récursive (2.93) on obtient

$$\begin{aligned} U_0(s) &= \frac{2}{s} + \frac{9}{4s^2} - \frac{5}{2s^3} - \frac{1}{s^4} - \frac{3}{s(s+1)} - \frac{1}{4s(s+2)}, \\ L\{u_{k+1}(x)\} &= \frac{1}{s^3} + L\{A_k(x)\}, k \geq 0. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Rappelons que les polynômes Adomian pour  $F(u(x)) = u^2(x)$  sont donnés par

$$\begin{aligned} A_0 &= u_0^2, A_1 = 2u_0u_1, \\ A_2 &= 2u_0u_2 + u_1^2, \\ A_3 &= 2u_0u_3 + 2u_1u_2, \end{aligned} \tag{2.99}$$

Prendre l'inverse de Laplace des deux côtés de la première partie de (2.98), et en utilisant la relation récurrente (2.98) donne

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 2 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{24}x^3 + \frac{7}{120}x^5 + \dots, \\ u_1(x) &= \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{20}x^5 + \dots, \end{aligned} \tag{2.100}$$

En utilisant (2.90), la solution de la série est donc donnée par

$$u(x) = 2 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5 \dots, \tag{2.101}$$

qui converge vers la solution exacte

$$= 1 + e^{-x}. \tag{2.102}$$

### 2.3.2 La méthode de solution sous forme série

Procédé de solution de série [10],[7] et [3] a été effectivement utilisé dans ce texte pour gérer équations intégrales et intégral-différentielles. La méthode découle principalement de la Série de Taylor pour les fonctions analytiques. Une fonction réelle  $u(x)$  est appelée analytique si il a des dérivés de toutes les commandes de telle sorte que la série de Taylor à tout moment en  $b$  son domaine

$$u_k(x) = \sum_{n=0}^k \frac{u^{(n)}(b)}{n!} (x - b)^n, \tag{2.103}$$

converge vers  $u(x)$  dans un voisinage de  $b$ . Par souci de simplicité, la forme générique de série de Taylor à  $x = 0$  peut se écrire

$$u_x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{2.104}$$

La méthode de série de Taylor, ou tout simplement la méthode de solution de série servira dans cette section pour résoudre des équations intégral-différentielles Volterra non linéaires.

Nous supposons que  $u(x)$  de la solution de l'integro-differential de Volterra non linéaire équation

$$u^{(n)}x = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t)F(u(t))dt, u^{(k)}(0) = k!a_k, 0 \leq k \leq (n - 1), \quad (2.105)$$

est analytique et possède donc une série de Taylor de la forme donnée (2.104) où les coefficients  $a_n$  volonté être déterminé de façon récurrente . Les premiers coefficients  $a_k$  peu peuvent être déterminés en utilisant les conditions initiales et alors

$$a_0 = u(0), \quad a_1 = u'(0), \quad a_2 = \frac{1}{2!}u''(0), \quad a_3 = \frac{1}{3!}u'''(0), \quad (2.106)$$

et ainsi de suite. Les autres coefficients  $a_k$  de (2.104) sera déterminé par l'application la méthode de solution de série pour le non linéaire Volterra intégro-différentielles équation (2.105). Son remplacement (2.104) deux côtés dans (2.105) donne

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)^{(n)} = T(f(x)) + \int_0^x k(x, t)F \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) dt, \quad (2.107)$$

où  $T(f(x))$  est la série de Taylor de  $f(x)$ . L'équation intégro-différentielle (2.105) sera converti en une intégrale traditionnelle dans (2.107) où au lieu de intégrant la fonction inconnue  $F(u(x))$ , conditions du formulaire  $t^n, n \geq 0$  sera être intégrés. Notez que parce que nous cherchons la solution de la série, alors si  $f(x)$  inclut des fonctions élémentaires comme les fonctions trigonométriques, exponentielle fonctions, etc, puis de l'expansion de Taylor pour les fonctions impliquées dans  $f(x)$  doit être utilisé . Nous intégrons tout d'abord la partie droite de l'intégrale dans (2.107) , et recueillir les coefficients de comme puissances de  $x$ . Nous assimilons ensuite les coefficients de comme pouvoirs de  $x$  dans les deux côtés de l'équation pour déterminer une récurrence relation dans  $a_j, j \geq 0$  Résoudre la relation de récurrence conduira à une complète détermination des coefficients  $a_j, j \geq 0$  où certains de ces coefficients sera utilisé à partir des conditions initiales. Ayant déterminer les coefficients  $a_j, j \geq 0$  la solution de série suit immédiatement après son remplacement par la dérivée dans coefficients (2.104).

**Exemple 2.8** Résoudre l'équation intégro-différentielle de Volterra à l'adresse non linéaire à l'aide de la méthode de solution sous forme série

$$u'''(x) = 2 \sec^2 x(1 + 3 \tan^2 x) - \tan x + \int_0^x (1 + u^2(t))dt \quad (2.108)$$

avec des conditions initiales  $u(0) = u''(0) = 0, u'(0) = 1$ , Son remplacement par  $u(x)$  par la série

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2.109)$$

dans les deux côtés de l'équation (2.108), évaluer l'intégrale du côté droit, à l'aide  $a_0 = a_2 = 0, a_1 = 1$ . et procéder comme précédemment, nous trouvons

$$\begin{aligned} u_1 = 1, a_3 = \frac{1}{3}, a_5 = \frac{2}{15}, \\ u_7 = \frac{17}{315}, a_{2k} = 0, k \geq 0 \end{aligned} \quad (2.110)$$

Par conséquent, la solution de série est donnée par

$$u(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots, \quad (2.111)$$

qui converge vers la solution exacte

$$u(x) = \tan x. \quad (2.112)$$

# Chapitre 3

## Méthodes de résolution approchées des équations intégral-différentielles

### 3.1 Remplacement du noyau d'une équation intégral-différentielle par un noyau dégénéré

#### 3.1.1 Principe de la méthode

Soit donné l'équation intégral-différentielle

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt, \quad (3.1)$$

avec un noyau  $k(x, t)$  quelconque. On pense naturellement à remplacer de façon approchée le noyau  $k(x, t)$  donné par un noyau dégénéré  $L(x, t)$  et à accepter la solution  $\tilde{u}(x)$  de la nouvelle équation :

$$\tilde{u}^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\tilde{u}(t)dt, \quad (3.2)$$

Pour solution approchée de l'équation proposée (3.1) on peut prendre pour ce noyau dégénéré  $L(x, t)$ , une série partielle de Taylor de Fourier.

**Proposition** Soit l'équation intégral-différentielle :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt,$$

Et soit  $\tilde{u}(x)$  est la solution approchée :

$$\tilde{u}^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b L(x, t)\tilde{u}(t)dt,$$

Tel que  $L(x, t)$  noyau dégénéré tel que :

$$\lambda \int_a^b |K(x, t) - L(x, t)| \leq h$$

Et soit  $R_L(x, t, \lambda)$  la résolvante de l'équation à noyau  $L(x, t)$  vérifiant l'inégalité

$$\int_a^b |R_L(x, t, \lambda)| \leq R$$

Et que  $|f(x)| \leq \eta$  sous l'hypothèse

$$1 - |\lambda| h(1 + |\lambda| R) \geq 0$$

L'équation (3.1) possède alors une seule solution  $u(x)$  telle que :

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq \frac{N |\lambda| (1 + |\lambda| R)^2 h}{1 - |\lambda| (1 + |\lambda| R)} + \eta$$

Où  $N$  est la borne supérieure de  $|f(x)|$ .

**Preuve.**

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt$$

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b L(x, t)u(t)dt = f(x) + \lambda \int_a^b [K(x, t) - L(x, t)]dt = f^*(x)$$

$$|f^*(x)| = |f(x) + \lambda \int_a^b [K(x, t) - L(x, t)]dt|$$

$$\leq |f(x)| + |\lambda| M \int_a^b |K(x, t) - L(x, t)| dt$$

$$\leq N + |\lambda| Mh$$

Où  $M$  est la borne supérieure de  $|u(x)|$  on a

$$u^{(n)}(x) = f^*(x) + \lambda \int_a^b L(x, t)u(t)dt$$

donc

$$u^{(n)}(x) = f^*(x) + \lambda \int_a^b R_L(x, t, \lambda)f^*(t)dt$$

$$|u^{(n)}(x)| \leq |f^*(x)| + \lambda \int_a^b |R_L(x, t, \lambda) f^*(t)| dt$$

$$|u^{(n)}(x)| \leq N + |\lambda| Mh + |\lambda| R(N + |\lambda| Mh)$$

donc

$$M \leq N + |\lambda| Mh + |\lambda| R(N + |\lambda| Mh)$$

$$M \leq (N + |\lambda| R) + M(|\lambda| h(1 + |\lambda| R))$$

$$M(1 - |\lambda| h)(1 + |\lambda| R) \leq N(1 + |\lambda| R)$$

$$M \leq \frac{N(1 + |\lambda| R)}{1 - |\lambda| h(1 + |\lambda| R)}$$

On a l'hypothèse de  $1 - |\lambda| h(1 + |\lambda| R) \geq 0$  Soit

$$v(x) = u(x) - \tilde{u}(x)$$

Donc  $v(x)$  est une solution d'équation integro- différentielle.

$$v(x) - \lambda \int_a^b k(x, t)v(t)dt = f^*(x) - f_1(x)$$

$$|f^*(x) - f_1(x)| \leq |f^*(x) - f(x)| + |f(x) - f_1(x)|$$

$$\leq |\lambda| Mh + \eta$$

$$|u(x)| = |f^*(x) - f(x) + \lambda \int_a^b R_L(x, t, \lambda)[f^*(t) - f_1(t)]dt|$$

$$\leq |\lambda| Mh + \eta + |\lambda| R(|\lambda| Mh + \eta) = (|\lambda| Mh + \eta)$$

Donc :

$$|u(x)| \leq \frac{|\lambda| hN(1 + |\lambda| R)^2}{1 - |\lambda| h(1 + |\lambda| R)} \eta(1 + |\lambda| R)$$

Et l'écart entre  $u(x)$  et  $\tilde{u}(x)$  est :

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq \frac{|\lambda| hN(1 + |\lambda| R)^2}{1 - |\lambda| h(1 + |\lambda| R)} + \eta$$

■



**Exemple 3.1** Résoudre l'équation intégrale suivante :

$$u'(x) = 3 + 6x + \int_0^1 \sin xt u(t) dt, \quad u(0) = 0$$

**solution** par développement en série du noyau  $K(x, t) = \sin xt$ , obtenons

$$K(x, t) = xt - \frac{x^3 t^3}{3!} + \frac{x^5 t^5}{5!} + \dots$$

Prenons pour noyau dégénéré  $L(x, t)$  les la deuxième premiers termes du développement :

$$L(x, t) = xt - \frac{x^3 t^3}{3!}$$

Et proposons-nous de résoudre une nouvelle équation :

$$\tilde{u}'(x) = 3 + 6x + \int_0^1 \left( xt - \frac{x^3 t^3}{3!} \right) \tilde{u}(t) dt,$$

Celle-ci donne :

$$\tilde{u}'(x) = 3 + 6x + C_1 x + C_2 \frac{x^3}{6} \tag{3.3}$$

Où

$$C_1 = \int_0^1 t \tilde{u}(t) dt, \quad C_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 t^3 \tilde{u}(t) dt, \tag{3.4}$$

l'intégration les deux côtés de (3.3) 0 à  $x$  , et en utilisant la donnée initiale état nous obtenons

$$\tilde{u}(x) = 3x + 3x^2 + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 \frac{x^4}{24} \tag{3.5}$$

Le rapport de (3.4) dans (3.3) fournit un système pour déterminer  $C_1$  et  $C_2$ . Nous avons

$$C_1 = \int_0^1 \left[ t(3t + 3t^2 + \frac{t^2}{2} C_1 - \frac{t^4}{24} C_2) \right] dt = \frac{7}{4} + \frac{1}{8} C_1 - \frac{1}{144} C_2$$

$$C_2 = \int_0^1 \left[ t^3(3t + 3t^2 + \frac{t^2}{2} C_1 - \frac{t^4}{24} C_2) \right] dt = \frac{33}{30} + \frac{1}{12} C_1 - \frac{1}{192} C_2$$

Où

$$\frac{7}{8} C_1 + \frac{1}{144} C_2 = \frac{7}{4}$$

$$-\frac{1}{12} C_1 + \frac{193}{192} C_2 = \frac{33}{30}$$

Réolvons ce système :

$$C_1 \approx 1.75 \quad , \quad C_2 \approx 1.10,$$

Donc : suivante :

$$u(\tilde{x}) \approx 3x + 3x^2 + (1.75)\frac{x^2}{2} + (1.10)\frac{x^2}{24}.$$

## 3.2 Méthode des approximation successives

### 3.2.1 Principe de méthode

Soit l'équation Intégro-différentielles de Volterra de second espèce :

$$u'(x) = f(x) + \int_0^x k(x, t)u(t)dt. \quad (3.6)$$

$f(x)$  fonction continue dans  $[0, a]$  . $k(x, y)$  fonction continue pour  $0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq x$   
prenons une fonction  $u_0$  continue dans  $[0, a]$ . Remplaçons la à  $u(x)$  du second membre de l'équation (3.6)

$$u_1(x) = \int_0^x k(x, t)u_0(t)dt.$$

$$u_2(x) = \int_0^x k(x, t)u_1(t)dt.$$

En continuant le processus nous aboutissons à la suite

$$u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x).$$

Où

$$u_n(x) = \int_0^x k(x, t)u_{n-1}(t)dt.$$

Les fonction  $u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x)$  sont ainsi définie et continue elles aussi sur le segment  $[0, a]$  sur les hypothèses faite sur  $f(x)$  et  $k(x, y)$  et d'après la théorème de point fixe.  $u_n(x)$  converge pour  $n \rightarrow \infty$  vers la solution  $u(x)$  l'équation Intégro-différentielle.

# Chapitre 4

## Méthodes de résolution numérique des équations intégro-différentielles

### 4.1 Rappel Integration Numérique

Le but de ce rappel est donner des méthodes permettant de calculer la valeur approchée d'intégrale

$$\int_a^b f(t)dt. \quad (4.1)$$

Sur le plan pratique, pour obtenir une approximation lorsque les primitives de  $f$  ne sont pas calculables. Sur le plan théorique, de connaître des méthodes permettant d'obtenir des encadrements d'amplitude aussi petite que souhaitée. Lorsque la fonction  $f$  est de classe  $C^n$  sur l'intervalle réel  $I = [a, b]$ , on note :  $M_i = \max |f^{(i)}|; x \in [a, b], i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ , on subdivise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  intervalles  $n \in \mathbb{N}^*$  de même longueur  $h = (b - a)/n$  que l'on appelle le pas de la subdivision. Et pour tout  $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ ; on note  $x_i = a + ih$ .

### 4.2 Méthode des trapèzes

**Principe** On remplace la courbe représentative de  $f$ , sur chaque segment de la subdivision, par le segment qui joint  $(x_i, f(x_i))$  et  $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ . Cela revient donc à interpoler la fonction  $f$  sur le segment  $[x_i, x_{i+1}]$  par le polynôme de Lagrange de degré 1 aux points  $x_i$  et  $x_{i+1}$ .

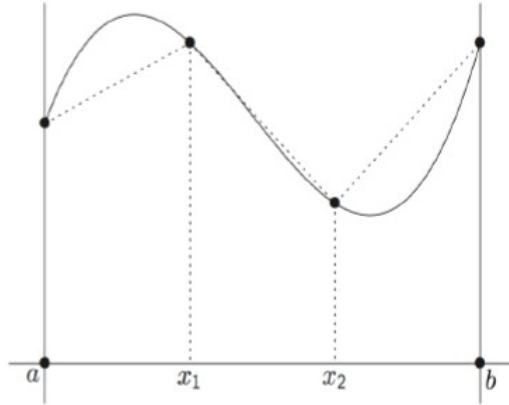


FIGURE 4.1 – méthode de Trapèze

**Proposition 4.1** *la valeur approchée de l'intégrale  $f$  sur  $I$  par le méthode des trapèzes est alor donnée par*

$$T_n = \frac{b-a}{n} \left( \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right). \quad (4.2)$$

**Preuve.** L'aire de trapèzes en base  $[x_i, x_{i+1}]$  est  $(x_{i+1} - x_i)(f(x_i) + f(x_{i+1}))/2 = h(f(x_i) + f(x_{i+1}))/2$

on déduit que

$$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} h(f(x_i) + f_{i+1})/2 = h \left( \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)$$

■

### 4.3 La méthode de Simpson

**Principe** On remplace  $f$ , sur chaque segment  $[x_i, x_{i+1}]$  de la subdivision, par la fonction polynômiale de degré inférieur ou égale a 2 qui prend les mêmes valeurs que  $f$  aux extrémités et au milieu  $\xi_i$  de ce segment. Cette méthode consiste à remplacer  $f$  sur le segment

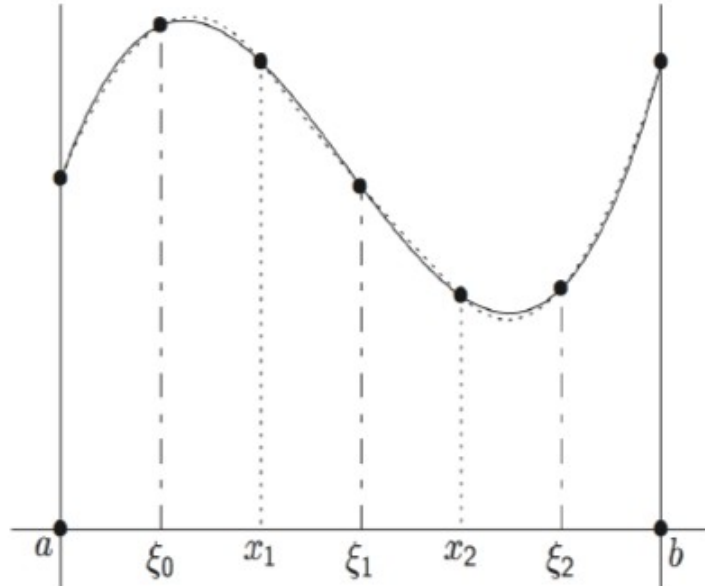


FIGURE 4.2 – méthode de Simpson

$[x_i, x_{i+1}]$  par son polynôme d'interpolation  $P_i$  de Lagrange de degré 2 ayant les mêmes valeurs que  $f$  aux bornes de l'intervalle et en son milieu.

## 4.4 La méthode des fonctions de Haar rationalisées

### 4.4.1 Les fonctions de Haar

**Définition 4.1** Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $0 < k \leq 2^n$ , les fonctions de Haar [12] est définie comme :

$$\Psi(t) = \begin{cases} 1; & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -1; & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\Psi_{n,k}(t) = \Psi(2^n t - k + 1)$$

Une autre façon [11]

$$\Psi_{n,k}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}} & \text{si } t \in \left[ \frac{2k-2}{2^{n+1}}, \frac{2k-1}{2^{n+1}} \right[ \\ -2^{\frac{n}{2}} & \text{si } t \in \left[ \frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}} \right[ \\ 0 & \text{si } t \notin [0, 1[ \end{cases}$$

pour  $n \geq 0$  et  $k = 1, 2, \dots, 2^n$

De manière analogue, définir la famille de l'extension des fonctions.

#### 4.4.2 Les fonctions de Haar rationalisées

**Définition 4.2** Les fonctions de Haar rationalisées sont composées [2] seulement de trois valeurs  $+1, -1$  et  $0$  et peuvent être définie sur l'intervalle  $[0, 1)$  comme

$$h_{i,j}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left[ \frac{j-1}{2^i}, \frac{2j-1}{2^{i+1}} \right[ \\ -1 & \text{si } t \in \left[ \frac{2j-1}{2^{i+1}}, \frac{j}{2^i} \right[ \\ 0 & \text{si } t \notin \left[ \frac{j-1}{2^i}, \frac{j}{2^i} \right[ \end{cases}$$

**Exemple 4.1** Considérons les équations intégro-différentielles suivant

$$\begin{cases} y'(t) = \int_0^1 e^{st} y(s) ds + y(t) + \frac{1-e^{t+1}}{t-1} \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (4.3)$$

La solution exacte de cette équation est  $y(t) = e^t$  : on va trouver la solution approchée  $y(t)$  de l'équation (4.3) par la méthode des fonctions de Haar rationalisées. Les résultats obtenus pour  $k = 8$   $k = 16$   $k = 32$  et  $k = 64$  On applique la méthode de Haar [2], et sont donnés dans le tableau.

<i>t</i>	<i>pour k=8</i>	<i>pour k=16</i>	<i>pour k=32</i>	<i>pour k=64</i>	<i>soultion exact</i>
<i>0.1</i>	<i>1.0688</i>	<i>1.0996</i>	<i>1.1159</i>	<i>1.1069</i>	<i>1.1052</i>
<i>0.2</i>	<i>1.2156</i>	<i>1.2471</i>	<i>1.2258</i>	<i>1.2349</i>	<i>1.2214</i>
<i>0.3</i>	<i>1.3823</i>	<i>1.3281</i>	<i>1.3465</i>	<i>1.3564</i>	<i>1.3499</i>
<i>0.4</i>	<i>1.5717</i>	<i>1.5062</i>	<i>1.5261</i>	<i>1.4897</i>	<i>1.4918</i>
<i>0.5</i>	<i>1.7868</i>	<i>1.7081</i>	<i>1.6763</i>	<i>1.6620</i>	<i>1.6487</i>
<i>0.6</i>	<i>1.7868</i>	<i>1.8189</i>	<i>1.8413</i>	<i>1.8254</i>	<i>1.8221</i>
<i>0.7</i>	<i>2.0309</i>	<i>2.0626</i>	<i>2.0226</i>	<i>2.0049</i>	<i>2.0138</i>
<i>0.8</i>	<i>2.3080</i>	<i>2.1964</i>	<i>2.2217</i>	<i>2.2367</i>	<i>2.2255</i>
<i>0.9</i>	<i>2.6227</i>	<i>2.4906</i>	<i>2.4403</i>	<i>2.4567</i>	<i>2.4596</i>
<i>1</i>	<i>2.6227</i>	<i>2.6521</i>	<i>2.6805</i>	<i>2.6982</i>	<i>2.7183</i>

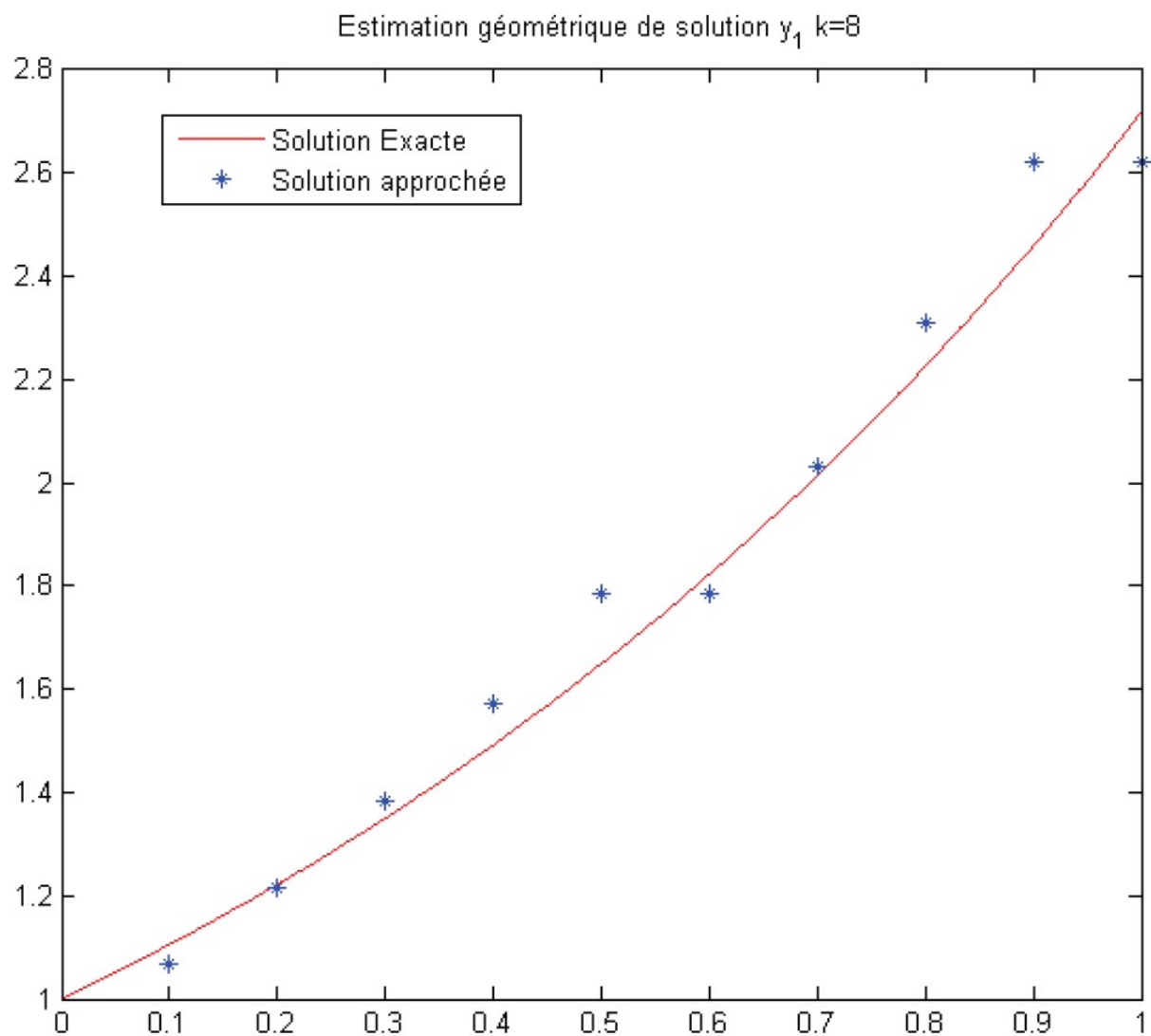


FIGURE 4.3 – Estimation gomtrique de la solution  $y$  pour  $k = 8$



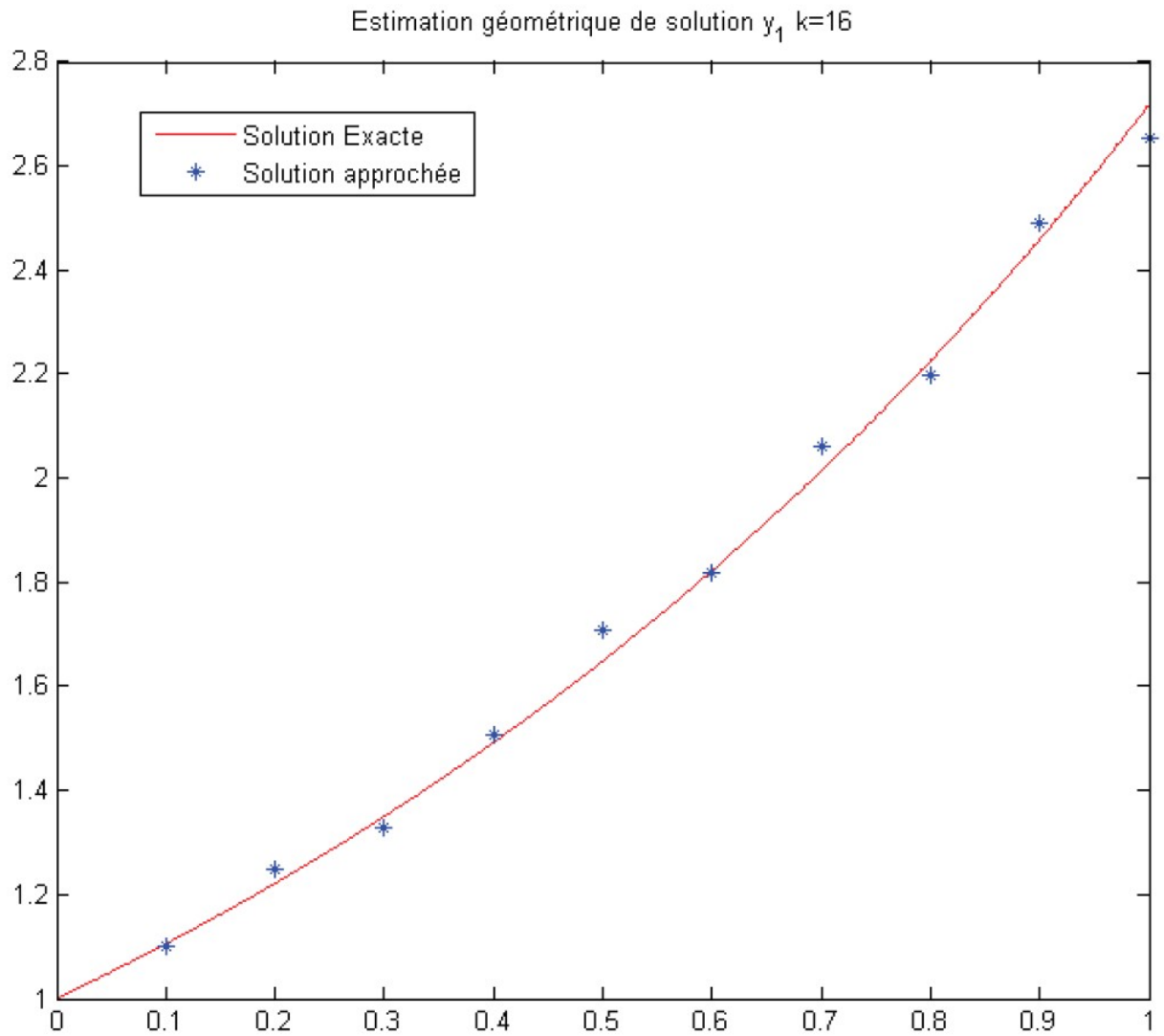


FIGURE 4.4 – Estimation gomtrique de la solution  $y$  pour  $k = 16$

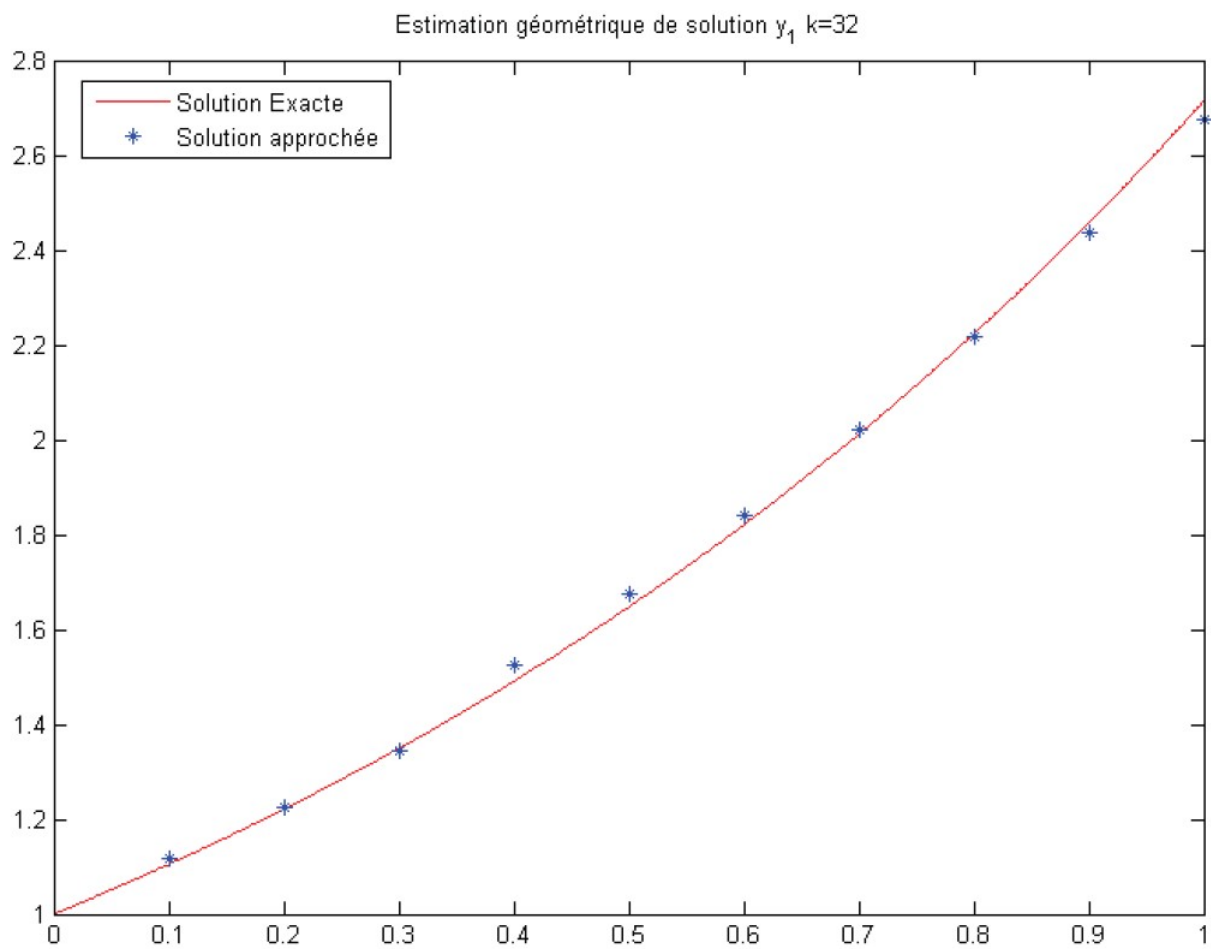


FIGURE 4.5 – Estimation gomtrique de la solution  $y$  pour  $k = 32$

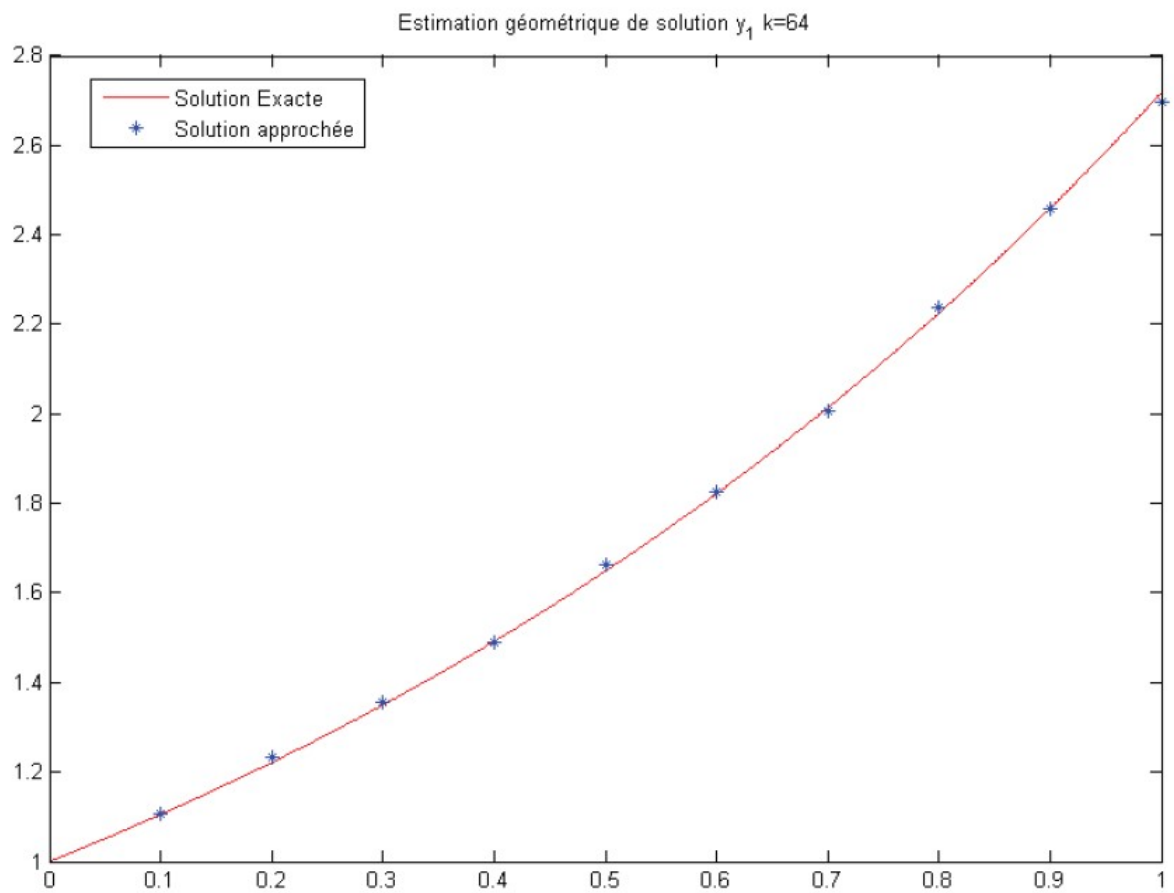


FIGURE 4.6 – Estimation gomtrique de la solution  $y$  pour  $k = 64$

# Conclusion

Nous avons présenté dans cette mémoire les divers méthodes pour trouver les solution des Équations intégro-différentielles , où on montre qu'on ne peut pas résoudre tout les types des Équation intégro-différentielles avec les méthodes analytique ( solution de série, décomposition de Adomian, Laplace, calcul direct, ...) ,aussi nous avons le besoin de chercher d'autre méthodes approchée (remplacement du noyau d'une équation intégro-différentielle par un noyau dégénéré , approximation successives, ...) ou appliquent les méthodes numérique (trapèzes, simpson, les fonctions de Haar rationalisées, ...).

# Bibliographie

- [1] A. M. Wazwaz, Linear and Nonlinear Integral Equations, New York, sans date.
- [2] A. Hocine, Résolution de système d'équations intégro-différentielles par la méthode des fonctions de Haar rationalisées,(mémoire de magister) universite kasdi merbah ouargla , 2011/2012.
- [3] A. Jerri, Introduction to Integral Equations with Applications, Wiley, New York, (1999).
- [4] C. Baker, The Numerical Treatment of Integral Equations, Oxford University Press, London, (1977).
- [5] G. Adomian, Nonlinear Stochastic Operator Equations, Academic Press, San Diego, (1986).
- [6] H. Brezis ; analyse fonctionnelle théorie et application dunoon, Paris, 1999.
- [7] H.T. Davis, Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations, Dover, Publications, New York, (1962).
- [8] K. Maleknejad and Y. Mahmoudi, Taylor polynomial solution of high-order nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equations, Appl. Math. Comput. 145 (2003) 641-653.

- [9] P. Linz, A simple approximation method for solving Volterra integro-differential equations of the first kind, *J. Inst. Math. Appl.*, 14 (1974) 211-215.
- [10] R.K. Miller, *Nonlinear Volterra Integral Equations*, W.A. Benjamin, Menlo Park, CA, (1967).
- [11] M. Rahman, *Mathematical Methods with Application*, WIT Press , Southampton, UK, pp. 456,2000.
- [12] S. Krasnov, A. Kissèlev, G.Makarenko, *équations intégrales ,problèmes et exercices*, éditions Mir, Moscou , Traduction française Editions Mir 1977.

### ملخص:

في هذه المذكرة قمنا بدراسة المعادلات تكامل – تفاضلية حيث عملنا على حلها بالطرق التحليلية, وهناك أنواع من هذه المعادلات لا نستطيع حلها بالطرق التحليلية فنلجأ إلى الطرق التقريبية أو العددية.

### الكلمات المفتاحية:

المعادلات تكامل-تفاضليه, المعادلات تكامل-تفاضليه لفولتيرا, المعادلات تكامل-تفاضليه لفريدهولم, طريقة الحلول على شكل سلسلة, طريقة التحلل أدوميان

### Abstract:

In this work, we studied the Integro-Differential Equations . Where we worked to resolve them in ways analytical, there are kinds of these equations can't be solved analytically ,we go then to proximate methods or numerical methods .

**Key words :** { Integro-Differential Equations, Volterra Integro-Differential Equations, Fredholm Integro-Differential Equations, Series Solution Method , Adomian Decomposition Method . }

### Résumé:

Dans ce mémoire nous avons étudié Équations Intégro-Différentielles où nous avans travaillons sur la résolutions par les méthodes analytiques.

Il ya des types de ces équations ne peuvent pas être résolues analytiquement, nous passons ensuite aux méthodes approchées ou méthodes numériques.

**Mots clés :** { Équations Intégro-Différentielles, Équations intégro-différentielles de Volterra, Équations intégro-différentielles de Fredholm, méthode de solution sous forme série, méthode de décomposition de Adomian. }