UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA

Faculté des Mathématiques et sciences de la matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse numérique

Par : Bordji Meriem

Thème

Approximation numérique d'une inéquation variationnelle parabolique

Soutenu publiquement le : 21/05/2015

Devant le jury composé de :

Mr. Ghezal Abderrazek	M. A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Président
Mr. Merabet Smail	M. A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr. Bensayah Abdallah	M. A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Dédication

Je dédie ce travail :
A ma mère et mon père qui me sont le plus chers ou monde.
A mes frère et sœurs .
A mes oncle et mes tantes.
A tous la famille BORDJI.
A mes chers amis.
A tous mes amis de la promotion.
A tous mes professeurs.
A tous ceux qui m'ont aidé de près ou loin pour réaliser ce modeste travail.

Remerciement

Louange à Dieu qui ma donné la force, le courage, et l'espoir nécessaire Pour accomplir ce travail et surmonter l'ensemble des difficultés.

J'exprime ma gratitude, mes remerciements à mes parents qui ont fait de leur mieux pour m'aider.

Je tiens à remercier vivement :

- Mon encadreur Mr.Abdallah Bensayah qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils et ses dirigés du début à la fin de ce travail.
- A Mr. Chacha Djamel Ahmed, Mr. Merabet Smail, Mr. Ghezal Abderrazek qui ont bien voulu faire partie du jury.

Je remercie aussi les personnes qui m'ont aidé et encouragé le long de ce travail.

Notations et Préliminaires

- V : espace de Hilbert avec le produit scalaire (.,.) et la norme associée $\|.\|$.

- K : est un ensemble non vide convexe fermé de V.

- $a(.,.) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire, continue et V-elliptique sur $V \times V$
  continue :$\exists\, c > 0\ \forall u, v \in V\ \ |a(u,v)| \leq c\|u\|_V \|v\|_V$.
  coercive :$\exists\, \alpha > 0\, \forall u, \in V\ \ a(u,u) \geq \alpha \|u\|_V^2$.

- V' :l'espace dual de V.

- En général, nous ne supposons pas $a(.,.)$ symétrique, puisque dans certaines applications formes bilinéaires non symétriques peuvent se produire naturellement.

Table des matières

Introduction

Les inéquations variationnelles permettent souvent par une résolution approchée de proposer une modélisation des courants océaniques et des mouvements des masses d'air de l'atmosphère pour les météorologistes, la simulation numérique du comportement des gratte-ciel ou des ponts sous l'action du vent pour les architectes et ingénieurs et des plusieurs problèmes non linéaires en physique et en mécanique.
La théorie des inéquations variationnelles a établie à partir des résultats concernant les problèmes unilatéraux obtenus par Signorini ([11]) et Fichera([12]), la théorie mathématiques obtenus par Stampacchia([13]).Lions et Stampacchia([14]), et puis développés par Brézis([15]),([16]), Stampacchia([17]), Lions([18]), Masco([19]), Kinderlehrer et Stampacchia ([20]), et pour l'approximation des inéquations variationnelles on rappelle, les contributions de Masco ([21]), Glowinski, Lions et Trémolières ([22]) ou Glowinski([23]).
Ce mémoire est divisé en trois chapitres. On débute notre travail par un chapitre comprend, de façon générale , les définitions, et les résultats fondamentaux qui sont essentiels pour comprendre les chapitre qui suivent.
Le deuxième chapitre est consacré a l'étude d'approximation des inéquation variationnelles elliptiques.
Dans le dernier chapitre, on passe à l'étude d'approximation d'une inéquation variationnelle parabolique de première espèce et de deuxième espèce.
Enfin, une conclusion comportant quelques perspectives.

Chapitre 1

Préliminaires mathématiques

Dans ce chapitre, nous abordons certains concepts mathématiques qui sont essentiels pour comprendre les chapitre qui suivent.

1.1 Rappels

Définition 1 *Une fonction* $f : I \to \mathbb{R}$ *est dit convexe lorsque :*

$$\forall (x, y) \in I \quad \forall \lambda \in [0, 1] \qquad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Définition 2 *Une fonction* $f : I \to \mathbb{R}$ *est dit strictement convexe si :*

$$\forall (x, y) \in I \quad \forall \lambda \in [0, 1] \qquad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Définition 3 *Un ensemble* C *est dit convexe si :*

$$\forall (x, y) \in I \quad \forall \lambda \in [0, 1] \qquad \lambda x + (1 - \lambda)y \in C$$

Définition 4 $a(.,.) : V \times V \to \mathbb{R}$ *forme bilinéaire est dite continue si :*

$$\exists C > 0 \quad \forall\, u, v \in V \quad |a(u, v)| \leq C \,\|u\|\, \|v\|$$

Définition 5 $a(.,.) : V \times V \to \mathbb{R}$ *forme bilinéaire est dite coecive si :*

$$\exists C > 0 \quad \forall\, u \in V \quad a(u, u) \geq \alpha \,\|u\|^2$$

Définition 6 *Une fonction* J *de* V *dans* $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *est semi-continue inférieurement sur* V *si elle satisfait :*

$$Si\ v_h \rightharpoonup v \quad dans\ V\ alors \quad \liminf_{h \to 0} j_h(v_h) \geq j(v)$$

Définition 7 *Soit J une fonctionnelle de V dans* $\bar{\mathbb{R}}$ *,convexe et semi-continue inférieurement.Soit K un sous-ensemble convexe, non vide et fermé de V. J est propre c'est a-dire qu'il existe un élément* v_0 *de K tel que :*

$$J(v_0) < +\infty$$

Définition 8 *Une suite* $\{x\} \subset X$ *dans un espace normé converge fortement à* $x \in X$ *si* $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$ *comme* $n \longrightarrow \infty$

Définition 9 *Une suite* $\{x\} \subset X$ *dans un espace normé converge faiblement à* $x \in X$ *si pour tout* $f \in x_0$*, nous avons que* $|f(x_n) - f(x)| \longrightarrow 0$ *comme* $n \longrightarrow \infty$ *c'est la séquence* $\{f(x_n)\} \subset F$ *converge vers* $f(x) \in F$

Définition 10 *Soient* B_1 *et* B_2 *deux espaces de Banach, on dit que* B_1 *s'injecte d'une façon continue dans* B_2 *et on note* $B_1 \hookrightarrow B_2$ *si :*
-$B_1 \subset B_2$*.*
On dit que B_1 *s'injecte d'une façon compacte dans* B_2*,* $B_1 \hookrightarrow B_2$ *si :*
-L'image de tout borné de B_1 *est relativement compact dans* B_2*.*

Théorème 11 *(Rellich-Kondrochov) Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *à frontière Lipschitzienne* m, l *entiers* $0 \geq l < m$*,* $1 \geq p < +\infty$*, les injections suivantes sont compactes :*

(1)- $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^l_B(\Omega) = \left\{u \in C^l(\Omega)/D^\alpha u \text{ est borné sur } \Omega\ \forall |\alpha| \geq l \text{ si } ; (m-p)p < n\right\}$.

(2)- $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^l(\bar{\Omega})$ *si* $(m-p)p > n$.

(3)- $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{l,q}(\Omega)$ *si* $(m-p)p < p$ *et* $1 \leq q \leq \dfrac{np}{n-(m-l)p}$ *ou si* $(m-l)p = n$ *et* $1 \leq q \leq \infty$.

4- *si* $(m-l)p > n \geq (m-l-1)p$ *et* $0 < \lambda < m - l - \dfrac{n}{p}$ *alors :*
$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{l\lambda}(\bar{\Omega}) = \left\{u \in C^l(\bar{\Omega}); \exists\, k > 0,\ \forall\, |\alpha| \leq l;\ \forall x, y \in \Omega : |D^\alpha u(x) - D^\alpha(y)| \leq k|x-y|^\lambda\right\}$.

Preuve. voir([20]) ∎

1.2 Théorème de Stampacchia

Théorème 12 *Soit H un espace de Hilbert réel muni de son produit scalaire noté $< .,. >$, soit K une partie convexe fermée non vide de H, si $a(u,v)$ une forme bilinéaire qui soit :*

- *Continue sur $H \times H$: $\exists\ C > 0 \quad \forall u, v \in H$*

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|.\|v\| \tag{1.1}$$

- *Coercive sur H : $\exists\ \alpha > 0 \quad \forall\ u\ \in\ H$*

$$a(u,u) > \alpha\|u\|^2 \tag{1.2}$$

Si $L(.)$ une forme linéaire continue sur H.
Sous ces condition, il existe un unique u de K tel que :

$$\forall\ v \in\ K \qquad a(u,v) \geq L(v-u) \tag{1.3}$$

Si de plus la forme bilinéaire a est symétrique, alors u est l'unique élément de K qui minimise la fonctionnelle $J : H \to \mathbb{R}$ définie par :

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v) \tag{1.4}$$

pour tout v de K, en particulier :

$$\exists \quad u \in\ K \qquad J(v) = \min_{u \in K} J(u) \tag{1.5}$$

Preuve. voir([13]) ■

1.3 Théorème de représentation de Riez

Théorème 13 *Soit H un espace de Hilbert, pour tout $F\ \in\ H^*\quad (H^* = dual\ de\ H)$, il existe un unique $v \in\ H$ telle que :*

$$F(u) = (u,v) \qquad \forall\ u \in\ H \tag{1.6}$$

et en plus

$$\|F\|_{H^*} = \|v\|_H \tag{1.7}$$

Preuve. voir([3]) ■

1.4 Théorème de Eberlin-Smuljan

Théorème 14 *Soit B un Banach réflexif et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset B$ et $\|u_k\|_B \leq C$ Alors :*

1. *$\exists$ une suite extrait $u_{kj} \subset (u_k)$ et $u \subset B$ tel que :*

$$u_{kj} \rightharpoonup u \qquad dans\ B$$

2. *Si tout suit extraite (u_{kj}), convergent faiblement vers la même limite u alors :*

$$u_k \rightharpoonup u \qquad dans\ B$$

Preuve. voir([3]) ■

1.5 Les espaces fonctionnelle

1.5.1 Espace $L^P(0, T, X)$

Soit un intervalle $[0, T] \subset \mathbb{R}$ (en généralT $< +\infty$)et un espace de Banach X avec un norme $\|.\|_X$, on désigne par $L^P(0, T, X)$ l'espaces des classes de fonctions $t \longrightarrow f(t)$, qui sont mesurables à partir de $[0, T] \longrightarrow X$ pour la measeure dt, et telles que :

$$\|f\|_{L^p(0,T,X)} = (\int_0^T \|f(t)\|_X^p \, dx)^{\frac{1}{p}} < +\infty \qquad (p \neq +\infty)$$

$$\|f\|_{L^\infty(0,T,X)} = \sup_{t\in[0,T]} ess\, \|f(t)\|_X < +\infty$$

Les espaces$L^p(0, T, X)$sont des espaces de Banach pour la première norme si $p \neq +\infty$, et pour la deuxième norme si $p = +\infty$.
Si X est un espace de Hilbert équipée avec un produit scalaire $(,)_X$, alors l'espace $L^2(0, T, X)$ est aussi un espace de Hilbert pour la produit scalaire :

$$(f, g)_{L^2(0,T,X)} = \int_0^T (f, g)_X dx$$

1.5.2 Les Espaces L^p

Soit Ω est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$, pour P donné avec $1 < P < +\infty$ On désigne par $L^P(\Omega)$ l'espaces des classes de fonctions v mesurables sur Ω et telles que :

$$\|v\|_{L^P(\Omega)} = (\int_\Omega |v(x)|^P dx)^{\frac{1}{2}} < \infty \tag{1.8}$$

L'espace $L^P(\Omega)$ muni de la norme (1.8) est un espace de Banach (évidemment (1.8) n'est pas une norme si $0 < P < 1$), De plus, il est séparable et pour $1 < P < \infty$ réflexif.
Les éléments de L^P .Comme classes d'équivalence de fonctions mesurables, seront identifier si elles sont égales presque partout dans Ω .Mais, pour simplifier l'écriture, on note $v \in L^P(\Omega)$ pour tout v satisfaisant (1.8) et on fait la convention $v = 0$ dans $L^P(\Omega)$ si $v(x) = 0$ presque partout dans Ω.
Pour $p = 2, L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, le produit scalaire correspondante á la norme (1.8) étant donné par :

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx \tag{1.9}$$

On va identifier l'espace $L^P(\Omega)$ a son dual(ce qui n'est pas vrais dans d'autres cas, pour $P \neq 2$).
Pour $P = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des(classes de) fonction v mesurables et essentiellement bornées sur Ω i.e.il existe une constant C telle que $|v(x)| \leq C$ p.p sur Ω.C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess|v(x)| = \inf\{C; |v(x)| \leq C \quad p.p \ \ x \in \Omega\} \tag{1.10}$$

1.6 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Soit Ω est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$, c'est la définition de l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v, \quad D^\alpha v \in L^p(\Omega) \qquad \text{pour} \quad |\alpha| \leq m\} \tag{1.11}$$

Ou $D^\alpha v$ est la dérivé au sens des distributions pour tout $v \in L^p(\Omega)$.
L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = (\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}} \qquad \text{si} \qquad p \in [1, \infty[$$

$$\|v\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)}$$

De façon évident, on a $W_{m,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$, la semi-norme sur $W_{m,p}(\Omega)$ est définie par :

$$|v|_{W^{m,p}(\Omega)} = (\sum_{|\alpha|= m} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}} \qquad \text{si} \qquad p \in [1, \infty[$$

$$|v|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha|= m} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Dons le cas $p = 2$, on utilise la notation suivent :

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$$

Chapitre 2

Approximation Numérique d'une IVE

2.1 Inéquations variationnelles elliptique (IVE)

Soit V un espace de Hilbert sur le corps $\mathbb{R}$ des réels avec V' son dual.La produit scalaire dans V est noté $(.,.)$ et la norme associée$\|.\|$ soit K un ensemble non vide convexe fermé de V. Nous considérons la forme bilinéaire continue et coercive $a : V \times V \to \mathbb{R}$, donc vérifiant

$$\exists C > 0 \qquad a(u,v) \leq C\|u\|\|v\| \qquad \forall\, u,v \;\in V$$

et

$$\exists C > 0 \quad a(u,u) \geq C\|u\|^2 \qquad \forall u \in V$$

On donne une fonctionnelle $j : K \to \bar{\mathbb{R}}$ convexe semi-continue inférieurement et propre. Soit la forme linéaire et continue $f \in V'$

Définition 15 *On appelle inéquation variationnelle elliptique de premier espèce tout inéquation de la forme :*

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in K \text{ tel que} \\ a(u, v-u) \geq (f, v-u) \qquad \forall\, v \in K \end{cases} \tag{2.1}$$

Théorème 16 *Si $a(.,.) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ forme bilinéaire continue et coercive sur un espace vectoriel V $f(.) : V \longrightarrow \mathbb{R}$ forme linaire sur V est K sous ensemble convexe non vide de V alors l'inéquation variationnelle (2.1) admet une solution unique .*

Preuve. voir([17]) ■

2.2 Approximation interne de IVE de première espèce

Soit l'IVE de première espèce suivent :

$$(P)\begin{cases} u \in K \\ a(u, v-u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in K \end{cases} \tag{2.2}$$

K convexe non vide et fermé d'un espace de Hilbert V, $a(.,.)$ forme bilinéaire, continue et coercive sur $V \times V$ et $f \in V'$

Remarque 17 *D'après le théorème (16) le problème (2.2) admet une solution unique*

2.2.1 Approximation de$V$

Soit V_h, dim $V_h < \infty$ $h \in \mathbb{R}^n$ supposons que :
$\forall h \quad V_h \subset V$

$$\begin{cases} V_h \simeq V \quad \textit{dans le sens } \exists \nu \subset V \quad \bar{\nu} = V \quad \textit{tonne que} \\ \forall v \in \nu \quad \exists (v_h) \subset V_h \ \textit{avec } v_h \to v \textit{ dans } V \textit{ quand } h \to 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

2.2.2 Approximation de$K$

pour tout h, on considère un ensemble K_h tel que :

$$K_h = \quad \textit{convexe fermé de} \quad V_h \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} K_h \quad \textit{approxime} \quad K \quad \textit{dans le sens:} \\ \forall\ v\ \in\ K\ \ \exists\ (v_h) \subset\ K_h\ \ \textit{t.q } v_h \to v \textit{ dans } V \\ \textit{Si } u_h \in\ K_h \quad u_h \rightharpoonup u \quad \textit{dans } V \textit{ alors } u \in\ K \end{cases} \tag{2.5}$$

2.2.3 Approximation de problème (P)

On défini le problème suivent :

$$(P_h)\begin{cases} u_h \ \in\ K_h \\ a(u_h, v_h - u_h) \ \geqslant\ (f, v_h - u_h) \quad \forall\ v_h \ \in\ K_h \end{cases} \tag{2.6}$$

Si K_h et V_h définis par(2.3)-(2.5), notons que u_h existe et unique d'après théorème(12).

Théorème 18 *Sous les hypothèses sur K etK_h, on a :*

$$\lim_{h\to 0} \|u_h - u\| = 0$$

Avec u_h solution de (P_h) et u solution de (p)

Preuve.

Dans ce type de convergence nous divisons généralement la preuve en trois parts, premièrement nous obtenons des estimations apriori pour u_h deuxièmement la convergence faible de u_h et enfin avec l'aide de la convergence faible de u_h on preuve la convergence forte.

1. **Estimation apriori** :

   u_h solution de (P_h) alors :

   $$a(u_h, v_h - u_h) \geqslant (f, v_h - u_h) \quad \forall v_h \in K_h$$

   $$a(u_h, u_h) \leqslant a(u_h, v_h) - (f, v_h - u_h)$$

   D'après la coercivete de a on a :

   $$\alpha\|u_h\|^2 \leqslant a(u_h, u_h) \tag{2.7}$$

   D'après la continuité de a on a :

   $$a(u_h, v_h) \leqslant C\|u_h\|\|v_h\| \tag{2.8}$$

   D'après (2.7)et(2.8)on a :

   $$\alpha\|u_h\|^2 \leqslant a(u_h, u_h) \leqslant \|f\|_{V'}\|v_h\| + \|f\|_{V'}\|u_h\| + C\|u_h\|\|v_h\|$$

   $$\alpha\|u_h\|^2 \leqslant C_1 + C_2\|u_h\|$$

   $$\|u_h\|^2 \leqslant C_3 + C_4\|u_h\|$$

   $$\|u_h\|^2 \leqslant C(\|u_h\| + 1) \qquad C = max(C_3, C_4)$$

   $$\|u_h\| \leqslant C \qquad (C\text{indépendant de } h)$$

2. **Convergence faible** :
   $\|u_h\| \leqslant C$ alors on peut extraire une sous-suite notée u_h et un élément $w \in V$ tel que :
   $$u_h \rightharpoonup w \quad \text{dans } V$$
   On montre que w est solution de (p)
   On a :
   $$(P_h)\begin{cases} u_h \in K_h \\ a(u_h, v_h - u_h) \geqslant (f, v_h - u_h) \quad \forall\ v_h \in K_h \end{cases} \tag{2.9}$$
   D'après (2.5) on a :
   $$w \in K$$
   Soit $v \in K$ d'après (2.5) on a :
   $$\exists (v_h) \subset K_h \qquad \text{tel que} \quad v_h \to v \quad \text{dans } V$$
   par passage à la limite dans (2.9) on obtiennes :
   $$\liminf_{h>0} a(u_h, u_h) \leqslant a(w, v) - (f, v - w)$$
   On a $a(.,.)$positive alors :
   $$\liminf_{h>0} a(u_h, u_h) \geqslant a(w, w)$$
   Par conséquent w vérifie :
   $$\begin{cases} w \in K \\ a(w, v - w) \geqslant (f, v - w) \qquad \forall v \in K \end{cases} \tag{2.10}$$
   Alors w est solution de (P) puisque (P) admet une solution unique d'après théorème (12) on a $w = u$ par conséquent :
   $$u_h \rightharpoonup u \qquad \text{dans } V$$

3. **Convergence fort** :

D'après la coercivite de $a(.,.)$ on a :

$$\alpha\|u_h - u\|^2 \leqslant a(u_h - u, u_h - u)$$

$$\leqslant a(u_h, u_h) - a(u_h, u) - a(u, u_h) + a(u, u)$$

$$\leqslant a(u_h, v_h) - (f, v_h - u_h) - a(u_h, u) - a(u, u_h) + a(u, u)$$

$$\leqslant a(u_h, v_h - u) - (f, v_h - u_h) - a(u, u_h) + a(u, u)$$

$$\leqslant \lim_{h\to 0}[a(u_h, v_h - u) - (f, v_h - u_h) - a(u, u_h) + a(u, u)]$$

$$\leqslant a(u, v - u) - (f, v - u)$$

On prend $v = u$ on a :

$$\leqslant a(u, v - u) - (f, v - u) \leqslant 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{h\to 0} \|u_h - u\|^2 \leq 0$$

Donc

$$\lim_{h\to 0} \|u_h - u\| = 0 \quad \Longrightarrow u_h \longrightarrow u \quad \text{dans } V$$

■

2.3 Inéquation variationnelles elliptique de deuxième espèce

Définition 19 *On appelle inéquation variationnelle elliptique de deuxième espèce toute inéquation de la forme suivent :*

$$\begin{cases} Trouver\ u \in V \\ a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq (f, v - u) \qquad \forall v \in V \end{cases} \tag{2.11}$$

Théorème 20 *Soient V un espèce de Hilbert, K convexe fermé de V non vide, $j : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ propre convexe et semi continue inférieurement, $a(.,.)V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ forme bilinéaire continue et coercive $f \in V'$. Alors l'inéquation variationnelle(2.11) admet une solution unique.*

Preuve. voir([22]) ■

2.4 Approximation interne des IVE de deuxième espèce

Soit IVE de deuxième espèce suivent :

$$(P)\begin{cases} u \in V \\ a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in V \end{cases} \tag{2.12}$$

- V un espace de Hilbert
- $j : V \to \bar{\mathbb{R}}$ convexe semi continue inférieurement et propre
- $f \in V'$
- $a(.,.)$ forme bilinéaire continue et coercive

Théorème 21 *Si V un espace de Hilbert $a(.,.)$ forme bilinéaire continue et coercive , $j : V \to \bar{\mathbb{R}}$ convexe semi continue inférieurement et propre et $f \in V'$. Alors IVE (2.12) admet une solution unique u*

2.4.1 Approximation de V

Soit (V_h) une suit d'espace vérifient :

(i) $\exists U \subset V$ tel que $\bar{U} = V$ et un application $r_h : U \to V_h$ vérifient :

$$\lim_{h\to 0} r_h v \to v \quad \text{dans } V \qquad \forall\ v \in U$$

2.4.2 Approximation de j

On approximé la fonction j par (j_h) $\forall h$ j_h satisfait :

$$\begin{cases} j_h : V_h \to \bar{\mathbb{R}} \\ j_h \text{ convexe,semi continue infrieurement} \\ \text{et uniformément propre par rapport à } h \end{cases} \tag{2.13}$$

La fonction (j_h) est dite uniformément propre par rapport à h si :

$$\begin{cases} \exists\ \lambda \in V^* \quad \text{et } \mu \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \\ j_h(v_h) \geqslant (\lambda, v_h) + \mu \qquad \forall v_h \in V_h \ \ \forall h \end{cases} \tag{2.14}$$

On suppose que j_h vérifient :

$$\text{Si } v_h \rightharpoonup v \quad \text{dans } V \text{ alors} \quad \liminf_{h\to 0} j_h(v_h) \geq j(v) \tag{2.15}$$

$$\lim_{h\to 0} j_h(r_h v) = j(v) \qquad \forall v \in U \tag{2.16}$$

Remarques

1. si j est continue, on peut toujours construire des fonctions contiens ,j_h vérifient (2.15)et(2.16)

2. Dans les cas ou $j_h(v_h) = j(v_h) \quad \forall\, v_h \in\ V_h$ donc(2.15)et(2.16) seront vérifiées

2.4.3 Approximation de (P)

On approximé (P) par :

$$P_h \begin{cases} u_h \in V_h \\ a(u_h, v_h - u_h) + j_h(v_h) - j_h(u_h) \geqslant (f, v_h - u_h) \qquad \forall v_h \in V_h \end{cases} \tag{2.17}$$

problème (P_h) admet une solution unique d'après la théorème(20)

Théorème 22 *Sous les hypothèses sur V_h et j_h on a :*

$$\begin{cases} \lim_{h\to 0} \|u_h - u\| = 0 \\ \lim_{h\to 0} j_h(u_h) = j(u) \end{cases} \tag{2.18}$$

Preuve.
Comme la preuve de théorème(18), nous divisons la preuve en trois parties.

1. **Estimation a priori** :

   u_h solution de P_h alors :

   $$\alpha\|u_h\|^2 \leqslant a(u_h, u_h) \leqslant a(u_h, v_h) + j_h(v_h) - j_h(u_h) - (f, v_h - u_h)$$

   On utilise(2.7),(2.8)et(2.14)on a :

$\alpha\|u_h\|^2 \leqslant C\|u_h\|.\|v_h\| + j_h(v_h) - (\lambda, u_h) - \mu - (f, v_h - u_h)$

$\leq C\|u_h\|.\|v_h\| + |j_h(v_h)| + \|\lambda\|_{V'}.\|u_h\| + |\mu| + \|f\|_{V'}.\|v_h\| + \|f\|_{V'}.\|u_h\|$

Soit $v_0 \in U$ et $v_h = r_h v_0$ .On utilise(i)et(2.16) on obtiens :

$$\|v_h\| \leq C \text{ et } |j_h(v_h)| \leq C$$

$$\|u_h\|^2 \leq \frac{1}{\alpha}(\|\lambda\|_{V'} + C + \|f\|_{V'})\|u_h\| + \frac{C}{\alpha}(1 + \|f\|_{V'}) + \frac{|\mu|}{\alpha}$$

$$\|u_h\|^2 \leq C_1\|u_h\| + C_2$$

$$C_1 = \frac{1}{\alpha}(\|\lambda\|_{V'} + C + \|f\|_{V'})$$
$$C_2 = \frac{C}{\alpha}(1 + \|f\|_{V'}) + \frac{|\mu|}{\alpha}$$

D'où :

$$\|u_h\| \leq C \qquad (C \text{ constante indépendant de } h) \tag{2.19}$$

2. **Convergence faible** :
D'après(2.19), on peut extraire une sous-suite notée u_h et un élément $u^* \in V$tel que :

$$u_h \rightharpoonup u^\star \text{ dans} V$$

On montre que $u^\star$ est solution de (p) :
Comme u_h solution de P_h et $v_h = r_h v \in V_h \quad \forall h$
$a(u_h, u_h) \leq a(u_h, r_h v) + j_h(r_h v) - j_h(u_h) - (f, r_h v - u_h) \quad \forall v \in U$
On utilise (2.16)et(2.19) on a :

$$\liminf_{h\to 0}[a(u_h, u_h) + j_h(u_h)] \leq a(u^\star, v) + j(v) - (f, v - u^\star) \quad \forall v \in U \tag{2.20}$$

On a :

$$\begin{cases} a(.,.) \text{ positive} \\ \text{alors} \quad \liminf_{h\to 0} a(u_h,u_h) \geq a(u^\star,u^\star) \end{cases} \tag{2.21}$$

On a :

$$\begin{cases} \text{Si } \ v_h \rightharpoonup v \quad \text{dans } \ V \\ \text{alors} \quad \liminf_{h\to 0} j_h(v_h) \geq j(v) \end{cases} \tag{2.22}$$

D'après (2.21)et(2.22) donc on obtient :

$$j(u^\star) + a(u^\star,u^\star) \leq \liminf_{h\to 0}[a(u_h,u_h) + j_h(u_h)] \tag{2.23}$$

On utilise (2.23),(2.20) et la densité de U dans V on obtiens :

$$a(u^\star, v-u^\star) + j(v) - j(u^\star) \geq (f, v-u) \qquad \forall v \in V \tag{2.24}$$

Alors $u^\star$ est solution de (P) puisque (P) admet une solution unique on a :
$u^\star = u$ par conséquent $u_h \rightharpoonup u$ dans V

3. **Convergent fort** :
D'après la coercivite de $a(.,.)$ on a :

$$\alpha\|u_h - u\|^2 + j_h(u_h) \leq a(u_h-u, u_h-u) + j_h(u_h)$$

$$\leq a(u_h,u_h) - a(u_h,u) - a(u,u_h) + a(u,u) + j_h(u_h)$$

$$\leq a(u_h, r_h v) + j_h(r_h v) + (\delta u_{h,k}, r_h v - u) - j_h(u_h) - (f, r_h v - u_h) - a(u_h,u) - a(u,u_h) + a(u,u) \qquad \forall\, v \in U$$

$$\Longrightarrow \liminf_{h\to 0} j_h(u_h) \leq \liminf_{h\to 0}[\alpha\|u_h-u\|^2 + j_h(u_h)]$$

$$\leq \limsup_{h\to 0}[\alpha\|u_h-u\|^2 + j_h(u_h)] \leq a(u, v-u) + j(v) - (f, v-u) \qquad \forall\, v \in U$$

On utilise la densité de U dans V On a :

$$\Longrightarrow \liminf_{h\to 0} j_h(u_h) \leq \limsup_{h\to 0}[\alpha\|u_h - u\|^2 + j_h(u_h)]$$

$$\leq a(u, v-u) + j(v) - (f, v-u) \qquad \forall\, v \in V$$

On prend $v = u$ et on utilise la relation (2.15) on a :

$$j(u) \leq \liminf_{h\to 0} j_h(u_h)$$

$$\leq \limsup_{h\to 0}[\alpha\left\|u_h - u\right\|^2 + j_h(u_h)] \leq j(u)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{h\to 0} j_h(u_h) = j(u) \\ \lim_{h\to 0}\left\|u_h - u\right\| = 0 \end{cases}$$

■

Chapitre 3

Approximation Numérique d'une IVP

L'objet de ce chapitre est l'approximation numérique de la solution d'une inéquation variationnelle parabolique de première et deuxième type.

3.1 Approximation Numérique d'une IVP de première espèce

3.1.1 La formulation de problème

Soit H et V deux espaces de Hilbert réels telle que $V \subset H$, V danse dans H en admet que $H = H'$ on a :

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^{'}$$

Le produit scalaire dans H (reps dans V)et les normes correspondantes sont désignées par $(.,.), |.|(resp((.,.)), \|.\|)$, nous introduisons maintenant :

- un intervalle de temps$[0,T]$avec $0 < T < \infty$
- $a : V \times V \to \mathbb{R}$, une forme bilinéaire, continue et coercive
- $f \in L^2(0,T,V')$, $u^0 \in H$
- K convexe, fermée non vide sous ensemble de V

Alors on considère l'inéquation variationnelle parabolique de première type suivant :

$$(P)\begin{cases}\text{Trouver} \quad u(t)\in L^2(0,T,V)\\ \int_0^T(\frac{\partial u}{\partial t},v-u)dt+\int_0^T a(u,v-u)dt\geq\int_0^T(f,v-u)dt \qquad \forall v\in K\\ u(0)=u_0 \qquad \text{tel que} \quad t\in]0,T[\end{cases} \tag{3.1}$$

Théorème 23 *Sous des hypothèses appropriées sur* u_0 *et* K *notons que(3.1)admet une solution unique dans* $L^2(0,T,V)\bigcap C^0([0,T],H)$

Preuve.
voir([17]) ■

Remarque 24 *Si* $K = V$ *,Alors (3.1) se réduisent à l'équation variationnelle parabolique standard suivent :*

$$\begin{cases}\textit{trouver} \quad u(t)\in L^2(O,T,V)\\ \int_0^T(\frac{\partial u}{\partial t},v)dt+\int_0^T a(u,v)dt=\int_0^T(f,v)dt \qquad \forall v\in V\\ u(0)=u_0 \qquad \textit{tel que} \quad t\in]0,T[\end{cases} \tag{3.2}$$

3.1.2 Approximation de V

Soit V_h ,*dim* $V_h<\infty$ $h\in\mathbb{R}^n$ supposons que :
$\forall h \quad V_h\subset V$

$$\begin{cases}V_h\simeq V \quad \text{dans le sens } \exists\nu\subset V \quad \bar{\nu}=V \text{ tonne que}\\ \forall v\in\nu \qquad \exists(v_h)\subset V_h \text{ avec } v_h\to v \text{ dans } L^2(0,T,V) \text{ quand } h\to 0\end{cases} \tag{3.3}$$

3.1.3 Approximation de K

Pour tout h ,on considère un ensemble K_h tel que :

$$K_h = \quad \text{convexe fermé de} \quad V_h \tag{3.4}$$

$$\begin{cases}K_h \quad \text{approxime} \quad K \quad \text{dans le sens:}\\ \forall\ v\ \in\ K\ \ \exists\ (v_h)\subset\ K_h \ \ \text{t.q } v_h\to v \text{ dans } L^2(0,T,V)\\ \text{Si } u_h\in\ K_h \quad u_h\rightharpoonup u \ \text{ dans } L^2(0,T,V) \text{ alors } u\in\ K\end{cases} \tag{3.5}$$

3.1.4 Approximation sur $[0, T]$

On subdivise $[0, T]$ en N intervalles de longueur K
On approche l'opérateur $u \to u' = \dfrac{du}{dt}$ par :

$$\delta u_{h,k} = \frac{u_{h,k}(t) - u_{h,k}(t-1)}{k} \tag{3.6}$$

et on suppose que :

$$\delta u_{h,k} \to u' \qquad \text{dans } L^2(0, T, H) \tag{3.7}$$

3.1.5 Approximation du problème (P)

On approximé le problème (P) par le problème suivent :

$$(P_h) \begin{cases} \text{Trouver} \qquad u_{h,k} = \sum_{i=0}^{n} u_h^i \chi_k^i \in K_h \\ \\ \int_0^T (\delta u_{h,k}, v_h - u_{h,k})dt + \int_0^T a(u_{h,k}, v_h - u_{h,k})dt \geq \int_0^T (f, v_h - u_{h,k})dt \qquad \forall v_h \in K_h \end{cases} \tag{3.8}$$

On peut écrire (3.8) sous la forme suivent :

$$(P_h) \begin{cases} \text{Trouver } u_h^{i+1} \\ \\ \int_0^T (\frac{u_h^{i+1} - u_h^i}{k}, v_h - u_h^{i+1})dt + \int_0^T a(u_h^{i+1}, v_h - u_h^{i+1})dt \geq \int_0^T (f, v_h - u_h^{i+1})dt \qquad \forall v_h \in K_h \end{cases} \tag{3.9}$$

Théorème 25 *Sous les hypothèses sur V_h et K_h on a :*

$$\lim_{k,h \to 0} u_{h,k} \to u \qquad \text{dans} \quad L^2(0, T, V) \tag{3.10}$$

Ou $u_{h,k}$ solution de $P(h)$ et u solution de (P).

Preuve.

Comme la preuve de théorème(18), nous divisons la preuve en trois parties.

1. **Estimation a priori**

Comme u_h^{i+1} solution de (p_h) on obtiennes :

$$\int_0^T \frac{1}{k}(u_h^{i+1}, v_h - u_h^{i+1})dt + \int_0^T a(u_h^{i+1}, v_h - u_h^{i+1})dt \geq \int_0^T (f, v_h - u_h^{i+1})dt \qquad \forall v_h \in K_h$$

On pose :

$$\tilde{a}(u_h^{i+1}, v_h - u_h^{i+1}) = a(u_h^{i+1}, v_h - u_h^{i+1}) + \frac{1}{k}(u_h^{i+1}, v_h - u_h^{i+1}) \tag{3.11}$$

et

$$(\tilde{f}, v_h - u_h^{i+1}) = (f, v_h - u_h^{i+1}) + \frac{1}{k}(u_h^i, v_h - u_h^{i+1}) \tag{3.12}$$

D'après(3.12et3.11), on écrire le problème (p_h) sous la forme suivent :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h^{i+1} \\ \int_0^T \tilde{a}(u_h^{i+1}, v_h - u_h^{i+1})dt \geq \int_0^T (\tilde{f}, v_h - u_h^{i+1})dt \qquad \forall v_h \in K_h \end{cases} \tag{3.13}$$

D'après la coercivité de $\tilde{a}(.,.)$ on a :

$$\alpha \left\|u_h^{i+1}\right\|^2 \leq \tilde{a}(u_h^{i+1}, u_h^{i+1}) \leq \tilde{a}(u_h^{i+1}, v_h) + (\tilde{f}, v_h - u_h^{i+1})$$

D'après la contineité de $\tilde{a}(.,.)$ on a :

$$\alpha \left\|u_h^{i+1}\right\| \leq C \left\|u_h^{i+1}\right\| \|v_h\| + \left\|\tilde{f}\right\| \|v_h\| + \left\|\tilde{f}\right\| \left\|u_h^{i+1}\right\|$$

$$\alpha \left\|u_h^{i+1}\right\|^2 \leq C_1 \left\|u_h^{i+1}\right\| + C_2$$

$$\left\|u_h^{i+1}\right\| \leq C$$

$$\Longrightarrow u_h^{i+1} \in L^\infty(0, T, V)$$

D'après

$$L^\infty(0, T, V) \hookrightarrow L^2(0, T, V)$$

On a :

$$\left\|u_h^{i+1}\right\|_{L^2(0,T,V)} \leq C$$

$$\Longrightarrow \|u_{h,k}\|_{L^2(0,T,V)} \leq C \qquad \text{avec } C \text{ constant independant de } k \text{ et } h \tag{3.14}$$

2. **Convergence faible**

D'après la relation (3.14), on peut extraire une sous- suite notée $u_{h,k}$ et un élément $\omega \in L^2(0,T,V)$ telle-que :

$$u_{h,k} \rightharpoonup \omega \qquad \text{dans } L^2(0,T,V) \tag{3.15}$$

Par passage à la limite dans (3.8) on obtiens :

$$\lim_{h,k\longrightarrow 0}[\int_0^T (\delta u_{h,k}, v_h - u_{h,k})dt + \int_0^T a(u_{h,k}, v_h - u_{h,k})dt] \geq \lim_{h,k\longrightarrow 0}\int_0^T (f, v_h - u_{h,k})dt \qquad \forall v_h \in K_h$$

D'après la relation3.7 et la relation (3.15)on a :

$$\int_0^T (u', v-\omega)dt + \int_0^T a(\omega, v)dt - \int_0^T (f, v-\omega)dt \geq \liminf_{h,k\to 0} \int_0^T a(u_{h,k}, u_{h,k})dt$$

On a :

$$\begin{cases} a(.,.)\text{positive} \\ \text{Si } u_{h,k} \rightharpoonup u \quad \text{Alors} \quad \liminf_{h,k\to 0} a(u_{h,k}, u_{h,k}) \geq a(u,u) \end{cases} \tag{3.16}$$

D'après (3.16) on a :

$$\liminf_{h,k\to 0} \int_0^T a(u_{h,k}, u_{h,k})dt \geq \int_0^T a(\omega,\omega)dt$$

Donc

$$\int_0^T (u', v-\omega)dt + \int_0^T a(\omega, v)dt - \int_0^T (f, v-\omega)dt \geq \int_0^T a(\omega,\omega)dt \tag{3.17}$$

Par conséquent (ω) vérifie :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \omega \in K \quad \text{tel que} \\ \\ \int_0^T (u', v-\omega)dt + \int_0^T a(u, v-\omega)dt \geq \int_0^T (f, v-\omega)dt \quad \forall v \in K \end{cases} \tag{3.18}$$

Alors ω est solution de (P) puisque (P) admet une solution unique d'après théorème(23)on a $(\omega = u)$ par conséquent :

$$u_{h,k} \rightharpoonup u \qquad \text{dans } L^2(0,T,V) \tag{3.19}$$

3. **Convergence fort**

   D'après la coercivité de $a(.,.)$ on a :

   $$\alpha \|u_{h,k} - u\|^2 \leq a(u_{h,k} - u, u_{h,k} - u) = a(u_{h,k}, u_{h,k}) - a(u_{h,k}, u) - a(u, u_{h,k}) + a(u,u)$$

   $$\leq \lim_{h,k\to 0}[(\delta u_{h,k}, v_h - u_{h,k}) + a(u_{h,k}, v_h) - (f, v_h - u_{h,k}) - a(u_{h,k}, v_h) - a(u, u_{h,k}) + a(u,u)]$$

   D'après la relation(3.7) et (3.19) on a :

   $$\Longrightarrow \lim_{h,k\longrightarrow 0} \alpha \|u_{h,k} - u\|^2 \leq (u', v-u) + a(u,v) - (f, v-u) - a(u,v) - a(u,u) + a(u,u)$$

   $$\Longrightarrow \lim_{h,k\longrightarrow 0} \alpha \int_0^T \|u_{h,k} - u\|^2 \leq \int_0^T (u', v-u)dt + \int_0^T a(u, v-u)dt - \int_0^T (f, v-u)dt$$

   $$\Longrightarrow \lim_{h,k\longrightarrow 0} \alpha \|u_{h,k} - u\|^2_{L^2(0,T,V)} \leq \int_0^T (u', v-u)dt + \int_0^T a(u, v-u)dt - \int_0^T (f, v-u)dt$$

   Si on prend $v = u$ on a :

   $$\|u_{h,k} - u\|^2_{L^2(0,T,V)} \leq 0$$

   $$\Longrightarrow \|u_{h,k} - u\|_{L^2(0,T,V)} = 0$$

   Alors :

   $$\lim_{h,k\to 0} u_{h,k} \to u \quad \text{dans} \qquad L^2(0,T,V) \tag{3.20}$$

■

3.2 Approximation Numérique d'une IVP de deuxième espèce

3.2.1 La formulation de problème

Soit H et V deux espaces de Hilbert réels telle que $V \subset H$, V danse dans H en admet que $H = H'$ on a :

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$$

Le produit scalaire dans H (reps dans V)et les normes correspondantes sont désignées par $(.,.),|.|(resp((.,.)),\|.\|)$,nous introduisons maintenant :

- un intervalle de temps$[0,T]$avec $0<T<\infty$
- $j : V \to \bar{\mathbb{R}}$ convexe semi continue inférieurement et propre.
- $a : V \times V \to \mathbb{R}$, une forme bilinéaire, continue et coercive.
- $f \in L^2(0,T,V'),\quad u^0 \in H$
- K convexe, fermée non vide sous ensemble de V. Alors on considère l'inéquation variationnelle parabolique de deuxième type suivant :

$$(P)\begin{cases}\text{Trouver } \ u(t) \in L^2(0,T,V) \\ \int_0^T(\frac{\partial u}{\partial t},v-u)dt+\int_0^T a(u,v-u)dt+\int_0^T j(v)dt-\int_0^T j(u)dt \geq \int_0^T(f,v-u)dt \qquad \forall v \in V \\ u(0)=u_0 \qquad \text{tel que } \ t \in]0,T[\end{cases} \tag{3.21}$$

Théorème 26 *Sous des hypothèses appropriées sur u_0 et$V$ notons que(3.21)admet une solution unique dans $L^2(0,T,V)\bigcap C^0([0,T],H)$*

Preuve.
voir([22]) ∎

3.2.2 Approximation de V

Soit (V_h) une suit d'espace vérifient :

(i) $\exists U \subset V$ tel que $\bar{U}=V$ et un application $r_h : U \to V_h$ vérifient :

$$\lim_{h\to 0} r_h v \to v \quad \text{dans } L^2(0,T,V) \qquad \forall \ v \in U \tag{3.22}$$

3.2.3 Approximation de j

On approximé la fonction j par (j_h) $\forall h$ j_h satisfait :

$$\begin{cases} j_h : V_h \to \bar{\mathbb{R}} \\ j_h \text{ convexe,semi continue infrieurement} \\ \text{et uniformément propre par rapport à } h \end{cases} \tag{3.23}$$

$$\begin{cases} \exists\ \lambda \in V^{'}, \quad \text{et } \ \mu \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \\ j_h(v_h)dt \geqslant (\lambda, v_h) + \mu \qquad \forall v_h \in V_h \ \ \forall h \end{cases} \tag{3.24}$$

On suppose que j_h vérifient :

$$\text{Si } v_h \rightharpoonup v \quad \text{dans } L^2(0,T,V) \text{ alors } \quad \liminf_{h\to 0} \int_0^T j_h(v_h) \geq \int_0^T j(v) \tag{3.25}$$

$$\lim_{h\to 0} j_h(r_h v) = j(v) \qquad \forall v \in U \tag{3.26}$$

Alors on approximé (P) par le problème suivent :

$$(P_h) \begin{cases} \text{Trouver } u_{h,k} = \sum_{i=1}^{N-1} u_h^i \chi_k^i \in L^2(0,T,V_h) \\ \\ \int_0^T (\delta u_{h,k}, v_h - u_{h,k})dt + \int_0^T a(u_{h,k}, v_h - u_{h,k})dt \\ \\ + \int_0^T j_h(v_h)dt - \int_0^T j_h(u_{h,k})dt \geq \int_0^T (f, v_h - u_{h,k})dt \qquad \forall v_h \in V_h \end{cases} \tag{3.27}$$

On peut écrire le problème (3.27) sous la forme suivent :

$$(P_h) \begin{cases} \text{Trouver } u_h^{i+1} \in L^2(0,T,V_h) \\ \\ \int_0^T (\dfrac{(u_h^{i+1} - u_h^i)}{k}, v_h - u_h^{i+1})dt + \int_0^T a(u_h^{i+1}, v_h - u_h^{i+1})dt \\ \\ + \int_0^T j_h(v_h)dt - \int_0^T j_h(u_h^{i+1})dt \geq \int_0^T (f, v_h - u_h^{i+1})dt \qquad \forall v_h \in V_h \end{cases} \tag{3.28}$$

Théorème 27 *Sous les hypothèses sur V_h et j_h on a :*

$$\begin{cases} \lim_{h,k\to 0} u_{h,k} \to u \quad \textit{dans} \quad L^2(0,T,V) \\ \lim_{h,k\longrightarrow 0} \int_0^T j_h(u_{h,k})dt = \int_0^T j(u)dt \end{cases} \tag{3.29}$$

Ou $u_{h,k}$ solution de $P(h)$ et u solution de (P).

Preuve.

1. **Estimation a priori** :

   Comme u_h^{i+1} solution de P_h on a :

$$(P_h)\begin{cases}\text{Trouver}\, u_h^{i+1} \in L^2(0,T,V_h) \\ \int_0^T (\dfrac{(u_h^{i+1}-u_h^i)}{k}, v_h - u_h^{i+1})dt + \int_0^T a(u_h^{i+1}, v_h - u_h^{i+1})dt \\ + \int_0^T j_h(v_h)dt - \int_0^T j_h(u_h^{i+1})dt \geq \int_0^T (f, v_h - u_h^{i+1})dt \qquad \forall v_h \in V_h \end{cases} \tag{3.30}$$

   On pose :

$$\tilde{a}(u_h^{i+1}, v_h - u_h^{i+1}) = a(u_h^{i+1}, v_h - u_h^{i+1}) + \frac{1}{k}(u_h^{i+1}, v_h - u_h^{i+1}) \tag{3.31}$$

   et

$$(\tilde{f}, v_h - u_h^{i+1}) = (f, v_h - u_h^{i+1}) + \frac{1}{k}(u_h^i, v_h - u_h^{i+1}) \tag{3.32}$$

   D'après(3.32et3.31), on écrire le problème (P_h) sous la forme suivent :

$$(P_h)\begin{cases}\text{Trouver}\, u_h^{i+1} \in V_h \\ \int_0^T \tilde{a}(u_h^{i+1}, v_h - u_h^{i+1})dt + \int_0^T j_h(v_h)dt - \int_0^T j_h(u_h^{i+1})dt \geq \int_0^T (\tilde{f}, v_h - u_h^{i+1})dt \qquad \forall v_h \in V_h \end{cases} \tag{3.33}$$

   D'après la coercivité de $\tilde{a}(.,.)$ on a :

$$\alpha \left\| u_h^{i+1} \right\|^2 \leq \tilde{a}(u_h^{i+1}, u_h^{i+1}) \leq \tilde{a}(u_h^{i+1}, v_h) + j_h(v_h) - j_h(u_h^{i+1}) - (\tilde{f}, v_h - u_h^{i+1})$$

   D'après la continuité de $\tilde{a}(.,.)$ on a :

$$\alpha \left\| u_h^{i+1} \right\| \leq C \left\| u_h^{i+1} \right\| \|v_h\| + \left\| \tilde{f} \right\| \|v_h\| + \left\| \tilde{f} \right\| \left\| u_h^{i+1} \right\| + |j_h(v_h)| - (\lambda, u_h^{i+1}) - \mu$$

$$\leq C \left\| u_h^{i+1} \right\| \|v_h\| + \left\| \tilde{f} \right\| \|v_h\| + \left\| \tilde{f} \right\| \left\| u_h^{i+1} \right\| + |j_h(v_h)| + \|\lambda\|_{V'} \left\| u_h^{i+1} \right\| + |\mu|$$

$$\|u_h^{i+1}\|^2 \leq C' \|u_h^{i+1}\| + C''$$

$$\Longrightarrow \|u_h^{i+1}\| \leq C$$

$$\Longrightarrow u^{i+1} \in L^\infty(0,T,V)$$

D'après :

$$L^\infty(0,T,V) \hookrightarrow L^2(0,T,V)$$

On a :

$$\|u_h^{i+1}\|_{L^2(0,T,V)} \leq C \qquad (\text{avec}\, C\, \text{constant independant de} \quad h\, \text{et}\, k) \tag{3.34}$$

$$\Longrightarrow \|u_{h,k}\|_{L^2(0,T,V)} \leq C \qquad (\text{avec}\, C\, \text{constant independant de} \quad h\, \text{et}\, k) \tag{3.35}$$

2. **Convergence faible** :

D'après(3.35), on peut extraire une sous-suite notée $u_{h,k}$ et un élément $u^* \in L^2(0,T,V)$ tel que :

$$u_{h,k} \rightharpoonup u^* \text{ dans } L^2(0,T,V) \tag{3.36}$$

On montre que u^* est solution de (P) :
Comme $u_{h,k}$ est solution de (P_h) et $v_h = r_h v \in V_h$ on a :

$$\int_0^T (\delta u_{h,k}, r_h v - u_{h,k})dt + \int_0^T a(u_{h,k}, r_h v - u_{h,k})dt + \int_0^T j_h(r_h v)dt - \int_0^T j_h(u_{h,k})dt$$
$$\geq \int_0^T (f, r_h v - u_{h,k})dt \qquad \forall v \in U$$

D'après la relation (3.36) et (3.22)et (3.7), on peut passe la limite dans (3.27) donc on a :

$$\liminf_{h,k\longrightarrow 0}[\int_0^T a(u_{h,k}, u_{h,k})dt + \int_0^T j_h(u_{h,k})dt] \leq \int_0^T (u', v - u^*)dt + \int_0^T a(u^*, v)dt + \int_0^T j(v)dt$$
$$- \int_0^T (f, v - u^*)dt \qquad \forall v \in U$$

On a :

$$\begin{cases} a(.,.) \text{ positive} \\ \text{alors} \quad \liminf_{h,k\to 0} \int_0^T a(u_{h,k}, u_{h,k}) \geq \int_0^T a(u^*, u^*) \end{cases} \tag{3.37}$$

On a :

$$\begin{cases} \text{Si } \ v_{h,k} \rightharpoonup v \quad \text{dans } \ L^2(0,T,V) \\ \text{alors} \quad \liminf_{h,\to 0} \int_0^T j_h(v_{h,k}) \geq \int_0^T j(v) \end{cases} \tag{3.38}$$

D'après (3.37)et(3.38) donc on obtient :

$$\int_0^T j(u^*) + a(u^*, u^*) \leq \liminf_{h,k\to 0} \int_0^T [a(u_{h,k}, u_{h,k}) + j_h(u_{h,k})] \tag{3.39}$$

On utilise (3.39),(2.20) et la densité de U dans V on obtiens :

$$\int_0^T j(u^*) + a(u^*, u^*) \leq \liminf_{h,k\to 0} \int_0^T [a(u_h^{i+1}, u_h^{i+1}) + j_h(u_h^{i+1})]$$

$$\leq \int_0^T a(u^*, v) - (f, v - u^*) + j(v)$$

$$\Longrightarrow \int_0^T j(u^*)dt + \int_0^T a(u^*, u^*)dt \leq \int_0^T (u', v-u)dt + \int_0^T a(u^*, v)dt - \int_0^T (f, v-u^*)dt \qquad \forall v \in V$$

$$\Longrightarrow \int_0^T (u', v-u)dt + \int_0^T a(u^*, v-u^*)dt + \int_0^T j(v)dt - \int_0^T j(u^*)dt \leq \int_0^T (f, v-u^*)dt \qquad \forall v \in V$$

Alors u^* est solution de (P) puisque (P) admet une solution unique d'après théorème(23)on a $(u^* = u)$ par conséquent :

$$u_{h,k} \rightharpoonup u \qquad \text{dans } L^2(0,T,V) \tag{3.40}$$

3. **Convergence forte**

D'après la coercivite de $a(.,.)$ on a :

$$\alpha\|u_{h,k}-u\|^2+j_h(u_{h,k})\leq a(u_{h,k}-u,u_{h,k}-u)+j_h(u_{h,k})$$

$$\leq a(u_{h,k},u_{h,k})-a(u_{h,k},u)-a(u,u_{h,k})+a(u,u)+j_h(u_{h,k})$$

$$\leq(\delta u_{h,k},r_hv-u)+a(u_{h,k},r_hv)+j_h(r_hv)-j_h(u_{h,k})-(f,r_hv-u_{h,k})-a(u_{h,k},u)$$

$$-a(u,u_{h,k})+a(u,u)\qquad\forall\, v\in U$$

$$\Longrightarrow\liminf_{h,k\to0}j_h(u_{h,h})\leq\liminf_{h,k\to0}[\alpha\|u_{h,k}-u\|^2+j_h(u_{h,k})]$$

$$\Longrightarrow\int_0^T\liminf_{h,k\to0}j_h(u_{h,k})dt\leq\int_0^T\liminf_{h,k\to0}[\alpha\|u_{h,k}-u\|^2+j_h(u_{h,k})]dt$$

$$\leq\int_0^T\limsup_{h,k\to0}[\alpha\|u_{h,k}-u\|^2+j_h(u_{h,k})]dt\leq\int_0^T(u',v-u)dt+\int_0^T a(u,v-u)dt$$

$$+\int_0^T j(v)dt-\int_0^T(f,v-u)dt\qquad\forall\, v\in U$$

On utilise la densité de U dans V On a :

$$\Longrightarrow\int_0^T\liminf_{h,k\to0}j_h(u_{h,k})dt\leq\int_0^T\limsup_{h,k\to0}[\alpha\|u_{h,k}-u\|^2+j_h(u_{h,k})]dt$$

$$\leq\int_0^T(u',v-u)dt+\int_0^T a(u,v-u)dt+\int_0^T j(v)dt-\int_0^T(f,v-u)dt\qquad\forall\, v\in V$$

On prend $v=u$ et on utilise la relation (2.15) on a :

$$\int_0^T j(u)dt\leq\int_0^T\liminf_{h\to0}j_h(u_{h,k})dt$$

$$\leq\int_0^T\limsup_{h,k\to0}[\alpha\,\|u_{h,k}-u\|^2+j_h(u_{h,k})]dt\leq\int_0^T j(u)dt$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lim_{h,k\to0}\int_0^T j_h(u_{h,k})dt=\int_0^T j(u)dt\\ \lim_{h,k\to0}\|u_{h,k}-u\|_{L^2(0,T,V)}=0\end{cases}$$

■

Conclusion

Le résulta de ce travail, on a établi l'approximation interne d'IVE de première et deuxième espèce en plus l'approximation interne d'IVP de première et deuxième espèce .
Pour les perspectives, il serait intéressant de trouver la approximations d'IV hyperbolique et passer aux testes numériques pour des modèles d'IVP et hyperboliques.

Bibliographie

[1] R.Glowinski, introduction to the approximation of variational inequalities, Raport 76006, Laboratoire d'analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, 1976.

[2] Matthew Rudd and Klaus Schmitt, variational inequalities of elliptic and parabolic, Department of Mathematics.155 South 1400 East University of Utah Salt Lake City,Utah 84 112 0090.(May 20,2002).

[3] H.Brezis, analyse fonctionnelle théories et applications.Dunod 1999.

[4] H.Brezis, équations et inéquations non linéires dans les espaces vectoriels en dualité,Ann,Inst, Fourier, Grenonble,18,1,115-175,1968.

[5] M.Sofonea, A.Matei, variational inequalities with applications, A study of Antiplane Frictional Contact Problems, Advances in Mechanics,Vol 18,234P,Springer,2009.

[6] Anca Capatina, inéquations variationnelles et problèmes de contract avec frottement,2011.

[7] Masco.U,Scarpini.F, complementariy systems and approximation of variational inequalities,Rev,Franc,Autom,Inf,Rech,Op,Anal,Num,p83-104,1975.

[8] J.L.Lions, quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod 2002.

[9] Néčas, Jarušek et Haslinger, on the solution of the variational inequality to the signorini problem with small friction, Boll. U.M.I. 5(17B), 796-811 (1980).

[10] N. Kikuchi, J. T. Oden, contact problems in elasticity, a study of variaional inéqualities and finit element methods, SIAM, Studies in applied mathematics, (1988).

[11] A.Signorini,Sopra alcune questioni di elastostatica, Atii Societa Italianna per il Progresso della Scienze, 1933.

[12] G. Fichera, probleme elastostatici con vincoli unilaterali , il problema di Signorini con ambigue condizioni al contoro, Mem. Accad. Naz. dei Lincei , VIII(7), 91-140, 1964.

[13] G. Stampacchia, formes bilinéaires coercives sur les ensembles convexes, C. R. Acad. Sci. Paris, 258, 1964.

[14] J. L. Lions, G. Stampacchia, variational inequalities, Comm. Pure Appl. Math., XX, 493-519, 1967.

[15] H. Brézis, problèmes unilatéraux, J. Math. Pures Appl., 51, 1, 1-168, 1972.

[16] H. Brézis, équations et inéquations non linéires dans les espaces vectoriels en dualité, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 18, 1, 115-175, 1968.

[17] G. Stampacchia, Variational inequalities, theory and application of monotone operators, Proceedings of a NATO Advanced Study Institute, Venice, Italy, 1968.

[18] J. L. Lions, quelques methodes de résolution des problèmes aux limites non linéair Dunod, Paris, 1969.

[19] U. Mosco, implicit variational problems and quasi-variational inequalities, Lect. Notes in Math., 543, 83-156, 1975.

[20] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, an introduction to variational inequalities an their Applications, Academic Press, New York, 1980.

[21] U. Mosco, an introduction to the approximate solution of variational inequalities, constructive aspects of functional analysis, Erice 1971, 497-684, Ed. Cremonese, 1973.

[22] R. Glowinski, J. L. Lions, R. Trémolières, numerical analysis of variational inequalities, Amsterdam : North-Holland, 1981.

[23] R. Glowinski, numerical methods for nonlinear variational problems, Berlin Heidel-berg New York, Springer, 1984.

Résumé

L'objet de ce mémoire est l'approximation numérique de la solution d'une inéquation variationnelle parabolique de première et deuxième espèce.

Les mots clé : Inéquation variationnalle, parabolique , approximation.

ملخص

إن هدف هذا البحث هو تقريب حل المتراجحات التغيرية من نوع قطع مكافئ من الدرجة الأولى و الثانية

الكلمات المفتاحية : قطع مكافئ , تقريب ,المتراجحات التغيرية

Abstract

This memory is dedicated to the internal approximation of parabolic inequalities of first kinde and second kind .

Key word : Variational inequalities, parabolic , approximation .