UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des sciences de la matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par : Hachef Imane

Thème

Méthode de Kikuchi pour les équations de Marguerre-von Kármán

Soutenu publiquement le : 21/05/2015

Devant le jury composé de :

Mr. Bensayah Abdallah	M. C. université de KASDI Merbah - Ouargla	Président
Mr. Merabet Ismail	M. C. université de KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr. Ghezal Abderrazek	M. C. université de KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Table des matières

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier ALLAH (mon Dieu), en suite mes parents, mes frères Abbes, Akram, et mes soeurs Maha, Youssra, qui m'ont soutenu tout le long de ce projet.

Mes plus intenses remerciements vont à Mr. Ghezal Abderrazek qui à d'encadrer mon travail.

Je tiens à remercier aussi mon professeur Amara Gurfi et voudrais également remercier tous les membres du département de mathématiques et tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin pour achever ce travail.

Je tiens à exprimer ma gratitude aux membres du jury pour avoir accepter de juger mon travail.

Merci, en fin à toutes mes amies Naziha, Mebarka et à toutes celles qui m'ont aidé ou soutenu au cours de ce travail en particulier.

Notation

$\Delta^2\zeta$: l'opérateur bilaplacienne.

ϕ : Fonction de d'Airy.

ζ : Le déplacement.

λ : Valeur propre.

$\omega \subset \mathbb{R}^2$: Un ouvert borné.

Γ : La frontière de ω.

$\theta \in H^2(\omega)$: est une fonction définie La surface moyenne de la coque .

$L^p(\omega)$: Les espaces de Lebesgue pour $1 \leqq p \leqq +\infty$.

$H^m(\omega)$: Les espaces de Sobolev .

$|.|_{0,p,\omega}$: La norme dans $L^p(\omega)$ et $|.|_{0,\omega}$: La norme dans $L^2(\omega)$.

$\|.\|_{m,\omega}$ et $|.|_{m,\omega}$: La norme et la semi norme habituelles dans $H^m(\omega)$.

B opérateur bilinéaire.

C opérateur non-linéaire.

L_1, L_2 opérateurs linéaires.

Δ^2 opérateur biharmonique.

.

Introduction

Les équations de von Kàrmàn, qui constituent un système d'équations non-linéaires de quatriéme ordre, ont été proposées par von Kàrmàn en 1910 [10] pour modéliser les plaques minces.

Les équations classiques de Marguerre-von Kármán pour les coques peu profondes non-linéarement élastique, soumis à des conditions aux limites analogues à celles d'une plaque de von Kàrmàn. Ils ont été initialement proposé par Marguerre [6] et von Kármán et Tsien [9], et justifié plus tard par Ciarlet et Paumier [4] au moyen d'une analyse asymptotique formelle.

Dans ce travail, on étend l'étude de Kesavan [7] pour les équations de von Kàrmàn au cas des équations de Marguerre-von Kàrmàn

Dans le premièr chapitre,on donne une forme canonique pour les équation de Marguerre-von Kármán.

Dans le deuxième chapitre,nous étudions le problème de la bifurcation pour les équation de Marguerre-von Kàrmàn, dans les deux cas continu et discret, en adaptent une méthode de Kikuchi [5].

Au dernier chapitre, on donne des estimations d'erreur.

Chapitre 1

Les équations de Marguerre-von Kármán

1.1 Position du problème

Soit ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière γ est suffisamment régulière, soit ζ le déplacement dans la direction verticale et soit λg la fonction d'Airy de contraintes en l'absence de déformation, soit ψ l'accroissement de la fonction d'Airy en cours de déformation (donc $\phi + \lambda g$ est la fonction d'Airy dont les dérivées secondes nous permettent de calculer les composantes du tenseur des contraintes de la coque peu-profonde déformée). Alors les équations de Marguerre-von Kármán s'écrivent :

$$\begin{cases} \Delta^2\xi = [\phi, \xi + \theta] + \lambda[g, \xi + \theta] + f & \text{dans } \omega, \\ \Delta^2\phi = -[\xi, \xi + 2\theta] & \text{dans } \omega, \\ \xi = \partial_\nu\xi = \phi = \partial_\nu\phi & \text{sur } \gamma, \end{cases} \tag{1.1}$$

$\theta \in H_0^2(\omega)$ définit la surface moyenne de la coque,
f le a moyenne la force volume verticale sur la coque,
où Δ^2 est l'opérateur biharmonique et les crochets [.,.] sont définis par

$$[\eta, \xi] = \frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2\xi}{\partial x_1\partial x_2}. \tag{1.2}$$

On a les conditions aux limites sur ζ grâce à la plaque est encastrée :

$$\xi = \partial_\nu \xi = 0 \text{ sur } \gamma, \tag{1.3}$$

telle que ν la normale extérieure de sur Γ en autre face des considérations on a comme les conditions aux limites sur ϕ

$$\phi = \partial_\nu \phi = 0 \text{ sur } \gamma. \tag{1.4}$$

La formulation faible de ce problème est donnée par : trouver $(\xi, \phi) \in H_0^2(\omega) \times H_0^2(\omega)$ tel que

$$\forall \eta \in H_0^2(\omega), \int_\omega \Delta\phi\Delta\eta dx = -\int_\omega [\xi, \xi + 2\theta]\eta dx \tag{1.5}$$

$$\forall \eta \in H_0^2(\omega), \int_\omega \Delta\xi\Delta\eta dx = \int_\omega [\phi, \xi + \theta]\eta dx + \int_\omega (\lambda[g, \xi + \theta] + f)\eta dx. \tag{1.6}$$

Remarque 1 *: Si $\eta \in H_0^2(\omega)$, on a priori $\eta \in L^1(\omega)$. Mais l'intégrale $[\eta, \zeta]\xi$ a un sens $\forall \xi \in H_0^2(\omega)$ a cause de $H_0^2(\omega) \subset C^0(\overline{\omega})$. alors les équations (1.5) et (1.6) ont un sens.*

On va maintenant étudier des opérateurs linéaires et non linéaires de $H_0^2(\omega)$ dans lui-même, et éliminant ϕ, écrire (1.5) - (1.6) sous forme d'une seule équation en ζ. On suite de Berger [2]. On considère dans $H_0^2(\omega)$ le produit scalaire soit défini par

$$((\xi, \eta)) = \int_\omega \Delta\xi\Delta\eta dx, \tag{1.7}$$

cette norme de produit scalaire (notée par $\|.\|$) équivalente aux normes habituelles $\|.\|_{2,\omega}$ ou $|.|_{2,\omega}$ sur $H_0^2(\omega)$.
On définit deux opérateurs :
$B : H_0^2(\omega) \times H_0^2(\omega) \to H_0^2(\omega)$ par :

$$\forall \varsigma \in H_0^2(\omega), ((B(\xi, \eta), \varsigma)) = \int_\omega [\xi, \eta]\varsigma dx. \tag{1.8}$$

$C : H_0^2(\omega) \to H_0^2(\omega)$ par

$$C(\xi) = B(\xi, B(\xi, \xi)). \tag{1.9}$$

telle que :

B : un opérateur bilinéaire.

C : un opérateur non-linéaire.

A la fin on définit deux opérateurs linéaires :

$L_1 : H_0^2(\omega) \to H_0^2(\omega)$ par

$$L_1(\xi) = B(\xi, B(\theta, \theta)) \tag{1.10}$$

$L_2 : H_0^2(\omega) \to H_0^2(\omega)$ par

$$\forall \eta \in H_0^2(\omega),\ ((L_2(\xi), \eta)) = \int_\omega [g, \xi]\eta, \tag{1.11}$$

et il existe une fonction unique F tel que

$$\begin{cases} \Delta^2 F = f & \text{dans } \omega. \\ F \in H_0^2(\omega). \end{cases} \tag{1.12}$$

Soit

$$\zeta = \xi + \theta. \tag{1.13}$$

Donc, les équations de Marguerre-von Kármán sont réduites à :

$$(\zeta, \lambda) \in H_0^2(\omega) \times \mathbb{R},\ \zeta - \lambda L_2(\zeta) - L_1(\zeta) + C(\zeta) = F + \theta \tag{1.14}$$

$$\phi = -B(\zeta, \zeta + 2\theta). \tag{1.15}$$

Ces résultats détaillés dans [8]

Remarque 2 *Sous la forme (1.14) - (1.15) on a effectivement ((séparé les inconnues)). Une fois ζ calculé, (1.15) donne ϕ directement. Donc nous nous bornons à l'étude des solutions de l'équation (1.14).*

L'opérateur linéaire L_2 est compact et auto-adjoint (voir Berger [2]).

Propriétés

(de l'opérateur non-linéaire$C$)

(P_1) C est compact,

$(P_2)\forall t \in \mathbb{R}, C(t\zeta) = t^3 C(\zeta)$, donc en particulier $C(0) = 0$.

$(P_3)(C(\zeta), \zeta) \geq 0, > 0$ si $\zeta \neq 0$.

(P_4) Il existe une constante $c > 0$ tell que si

$$\|\zeta\| \leq r, \|\eta\| \leq r,$$

alors :

$$\|C(\zeta) - C(\eta)\| \leq c r^2 \|\zeta - \eta\|, \tag{1.16}$$

pour plus détails. Voir Breger[2].

Hypothèses

Soit L_2 L'opérateur linéaire :

(H_1) La fonction g appartient à l'espace $W^{2,\infty}(\omega)$.

(H_2) L'opérateur L_2 est défini positif.

D'après (H_1), on a $[g, \zeta]$ est dans $L^2(\omega)$ pour $\zeta \in H_0^2(\omega)$.

1.2 Problème linéarisé

Le problème linéarisé consiste à trouver $(\phi, \lambda) \in H_0^2(\omega) \times \mathbb{R}$ tel que

$$\phi = \lambda L_2 \phi, \tag{1.17}$$

donc

$$\forall \eta \in H_0^2(\omega), \int_\omega \Delta\phi \Delta\xi dx = \lambda \int_\omega [g, \phi + \theta]\eta dx. \tag{1.18}$$

D'après (H_2), Il existe des valeurs propres λ_i tel que :

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \to +\infty. \tag{1.19}$$

On donné comme condition de normalisation de vecteurs propres

$$((L\phi_i, \phi_j)) = \delta_{ij}, \tag{1.20}$$

tel que ϕ_i est un vecteur propre associé à λ_i.

Soit λ_0 une valeur propre simple du problème linéarisé et soit ϕ_0 un vecteur propre associé à λ_0, normalisé par

$$((L_2\phi_0, \phi_0)) = 1 \tag{1.21}$$

Chapitre 2

Méthode de Kikuchi pour les équations de Marguerre-von Kármán

2.1 Problème continu

On s'intéresse aux solutions (ζ, λ) de l'équation non-linéaire(1.14).
On suppose que $F = -\theta$, dans ce cas on obtient :

$$\zeta - \lambda L_2(\zeta) - L_1(\zeta) + C(\zeta) = 0 \tag{2.1}$$

Le principe de la méthode Kikuchi [5] est de chercher les solutions ζ de la forme

$$\zeta = \varepsilon\phi_0 + \eta \tag{2.2}$$

avec ε un paramètre positif qui tend vers zéro, η un élément dans le sous-espace de $H_0^2(\omega)$ orthogonal à ϕ_0, on a :

$$S_\varepsilon : H_0^2(\omega) \to H_0^2(\omega)$$

défini par :

$$S_\varepsilon\varsigma = \frac{1}{\varepsilon}((C(\varsigma) - L_1(\varsigma)), \phi_0))L_2\varsigma - C(\varsigma) + L_1(\varsigma)$$

et la solution unique du problème est défini par le sous-espace

$$Q : H_0^2(\omega) \to \{\phi_0\}^\perp,$$

orthogonal à ϕ_0, et on a le problème

$$Q\varsigma \in \{\phi_0\}^{\perp},\ (I - \lambda_0 L_2)Q\varsigma = P_0\varsigma, \tag{2.3}$$

P_0 la projection orthogonale de $H_0^2(\omega)$ sur $\{\phi_0\}^{\perp}$ pour le produit scalaire $((.,.))$. D'après cela, on a

Théorème 3 *Soit $\varepsilon > 0$ et $(\zeta, \lambda) \in H_0^2(\omega) \times \mathbb{R}$, avec*

$$\zeta = \varepsilon\phi_0 + \eta,\ \eta \in \{\phi_0\}^{\perp} \tag{2.4}$$

Alors (ζ, λ) est solution de l'équation (2.1) si et seulement si

$$\eta = QS_\varepsilon(\varepsilon\phi_0 + \eta) \tag{2.5}$$

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{1}{\varepsilon}((C(\varepsilon\phi_0 + \eta) - L_1(\varepsilon\phi_0 + \eta), \phi_0)) \tag{2.6}$$

.

Preuve.

(i) Soit (λ, ζ) solution de l'équation :

$$\zeta - \lambda L_2\zeta - L_1(\zeta) + C(\zeta) = 0,$$

avec

$$\zeta = \varepsilon\phi_0 + \eta.$$

Donc

$$\varepsilon\lambda_0 L_2\phi_0 + \eta - \lambda L_2\zeta - L_1(\zeta) + C(\zeta) = 0$$

$$\eta + \lambda_0 L_2\eta = (\lambda - \lambda_0)L_2\zeta + L_1(\zeta) - C(\zeta) \tag{2.7}$$

$\zeta = \varepsilon\phi_0 + \eta \Rightarrow \zeta - \eta = \varepsilon\phi_0$

$$\begin{aligned}
\eta + \lambda_0 L_2(\zeta - \eta) &= \lambda L_2\zeta + L_1(\zeta) - C(\zeta) \\
\eta + \lambda_0 L_2\zeta - \lambda_0 L_2\eta &= \lambda L_2\zeta + L_1(\zeta) - C(\zeta) \\
\eta + \lambda_0 L_2\eta &= \lambda L_2\zeta - \lambda_0 L_2\zeta + L_1(\zeta) - C(\zeta) \\
&= (\lambda - \lambda_0)L_2\zeta + L_1(\zeta) - C(\zeta) \\
\eta(I - \lambda_0 L_2\zeta) &= (\lambda - \lambda_0)L_2\zeta + L_1(\zeta) - C(\zeta)
\end{aligned}$$

$$(\lambda - \lambda_0)L_2\zeta + L_1(\zeta) - C(\zeta) = 0.$$

Lorsque $\eta \in \{\phi_0\}^\perp$ donc

$$(\lambda - \lambda_0)(L_2\zeta, \phi_0) + (L_1(\zeta), \phi_0) - (C(\zeta), \phi_0) = 0.$$

Mais on note que

$$\begin{aligned}
(L_2\zeta, \phi_0) &= (L_2(\varepsilon\phi_0 + \eta), \phi_0) \\
&= (L_2\varepsilon\phi_0, \phi_0) + (L_2\eta, \phi_0) \\
&= (L_2\varepsilon\phi_0, \phi_0) = \varepsilon \neq 0.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\lambda - \lambda_0) &= (C(\zeta), \phi_0) - (L_1(\zeta)), \phi_0) \\
(\lambda - \lambda_0) &= \frac{1}{\varepsilon}(C(\zeta), \phi_0) - \frac{1}{\varepsilon}(L_1(\zeta), \phi_0) \\
\lambda &= \lambda_0 + \frac{1}{\varepsilon}(C(\zeta) - L_1(\zeta), \phi_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda - \lambda_0 &= \frac{1}{\varepsilon}(C(\zeta) - L_1(\zeta), \phi_0) \\
\eta - \lambda_0 L_2\eta &= \frac{1}{\varepsilon}(C(\zeta) - L_1(\zeta), \phi_0) - C(\zeta) + L_1(\zeta) \\
&= S_\varepsilon\zeta.
\end{aligned}$$

Or le calcul de λ montre que

$$((S_\varepsilon \zeta, \phi_0)) = 0$$

ou également

$$P_0(S_\varepsilon \zeta) = S_\varepsilon \zeta.$$

Donc η est donné par :

$$\eta = QS_\varepsilon(\zeta) \tag{2.8}$$

ce qui définit la relation(2.5)

(ii) Réciproquement, soit η, λ donnés par (2.5) et (2.6). On montre que $\varepsilon\phi_0 + \eta$ est solution de l'équation (2.1), on pose

$$\zeta = \varepsilon\phi_0 + \eta,$$

on a

$$((\frac{1}{\varepsilon}(C\zeta - L_1(\zeta), \phi_0)L_2\zeta - C(\zeta) + L_1(\zeta), \phi_0)) = 0.$$

et tel que

$$\begin{aligned}
\eta - \lambda_0 L_2 \eta &= \frac{1}{\varepsilon}(C(\zeta) - L_1(\zeta), \phi_0) - C\zeta + L_1(\zeta) \\
&= (\lambda - \lambda_0)L_2\zeta - C(\zeta) + L_1(\zeta) \\
&= (\lambda - \lambda_0)L_2(\varepsilon\phi_0 + \eta) - C(\zeta) + L_1(\zeta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta - \lambda_0 L_2 \eta + \lambda_0 L_2 \zeta - \lambda L_2 \zeta - C(\zeta) + L_1(\zeta) &= \eta - \lambda_0 L_2 \varepsilon_0 \phi_0 - \lambda L_2 \zeta - C(\zeta) + L_1(\zeta) \\
&= \varepsilon\phi_0 + \eta - \lambda L_2 \zeta - C(\zeta) + L_1(\zeta) \\
&= 0
\end{aligned}$$

donc

$$\zeta - \lambda L_2 \zeta + L_1(\zeta) - C(\zeta) = 0.$$

■

On définit l'application

$$T_\varepsilon : \eta \in H_0^2(\Omega) \to T_\varepsilon \eta = Q.S_\varepsilon(\varepsilon\phi_0 + \eta)\varepsilon{\phi_0}^{\perp}, \tag{2.9}$$

on définit l'opérateur $\Lambda_\varepsilon : H_0^2(\omega) \to \mathbb{R}$

$$\Lambda_\varepsilon \varsigma = \lambda_0 + \frac{1}{\varepsilon}((C(\varsigma) - L_1(\varsigma), \phi_0)) \tag{2.10}$$

tel que :

$$\forall \varsigma \in H_0^2(\omega),\ S_\varepsilon \varsigma = (\Lambda_\varepsilon \varsigma - \lambda_0) L_2 \varsigma - C(\varsigma) + L_1(\varsigma). \tag{2.11}$$

Lemme 1 *On pose*

$$V_\varepsilon = \{\eta \in H_0^2(\omega) |\ \|\eta\| \leq \varepsilon\} \tag{2.12}$$

$$U_\varepsilon = \{\varepsilon \phi_0 + \eta |\ \eta \in V_\varepsilon\}. \tag{2.13}$$

On suppose que $\|\theta\| \leq c\varepsilon$. Donc il existe une constante c positive indépendante de ε telle que

$$\forall \varsigma \in H_0^2(\omega),\ \|Q\varsigma\| \leq c\|\varsigma\|, \tag{2.14}$$

$$\forall \zeta_i \in U_\varepsilon,\ \|L_1(\zeta_1) - L_1(\zeta_2)\| \leq c\varepsilon^2 \|\zeta_1 - \zeta_2\|, \tag{2.15}$$

$$\forall \zeta \in V_\varepsilon,\ |\Lambda_\varepsilon \zeta - \lambda_0| \leq c\varepsilon^2, \tag{2.16}$$

$$\forall \zeta_i \in U_\varepsilon, i = 1, 2,\ |\Lambda_\varepsilon \zeta_1 - \Lambda_\varepsilon \zeta_2| \leq c\varepsilon \|\zeta_1 - \zeta_2|, \tag{2.17}$$

$$\forall \zeta \in U_\varepsilon,\ \|S_\varepsilon \zeta\| \leq c\varepsilon^3, \tag{2.18}$$

$$\forall \zeta_i \in \zeta_\varepsilon,\ i = 1, 2,\ \|S_\varepsilon \zeta_1 - S_\varepsilon \zeta_2\| \leq c\varepsilon^2 \|\zeta_1 - \zeta_2\|. \tag{2.19}$$

Preuve.

(i) : Puisque le continuité de l'opérateur $(I - \lambda_0 L_2)$ sur $\{\phi_0\}^\perp$, est l'inégalité (2.14) en effet si l'inégalité est fausse on obtient une suite $\varsigma_n \to 0$ dans $H_0^2(\omega)$ avec $\|Q\varsigma_n\| = 1$. Posons $\mu_n = Q\varsigma_n$. Donc

$$\mu_n - \lambda_0 L_2 \mu_n = P_0 \varsigma_n + L_1(\zeta). \tag{2.20}$$

lorsque $\|\mu_n\| = 1$, il existe une sous-suite $\mu_n \to \mu$ dans $H_0^2(\omega)$ faible. Parce que L_2 est compact, on a $L_2\mu_n \to L_2\mu$ dans $H_0^2(\omega)$ fort, on a aussi $P_0\varsigma \to 0$ dans $H_0^2(\omega)$ fort alors

$$\mu = \lambda_0 L_2 \mu. \tag{2.21}$$

d'après la relation on passant la limite

$$((\mu_n, \phi_0)) = 0 \tag{2.22}$$

(ii) : Pour tout $\eta \in H_0^2(\omega)$ d'après le théorème 3 tel que

$$\begin{aligned}
(L_1(\zeta_1) - L_1(\zeta_2), \eta) &= (B(\zeta_1, B(\theta, \theta)) - B(\zeta_2, B(\theta, \theta), \eta) \\
&= (B(\zeta_1, \zeta_2, \eta), B(\theta, \theta)) \\
&\leq c\varepsilon^2 \|\zeta_1 - \zeta_2\|.
\end{aligned}$$

De plus $\|\zeta\| \leq c\varepsilon$, donc

$$\begin{aligned}
\|C(\zeta)\| &= \|C(\zeta) - C(0)\| \\
&\leq c\varepsilon^2 \|\zeta\| \\
&\leq c\varepsilon^3.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|L_1(\zeta)\| &= \|L_1(\zeta) - L_1(0)\| \\
&\leq c\varepsilon^2 \|\zeta\| \\
&\leq c\varepsilon^3.
\end{aligned}$$

(iii) : $\forall \zeta \in U_\varepsilon$ tel que

$$\begin{aligned}
|\Lambda_\varepsilon \zeta - \lambda_0| &= \frac{1}{\varepsilon} |((C(\zeta) - L_1(\zeta), \phi_0))| \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon} (\|C(\zeta)\| + \|L_1(\zeta)\|) \|\phi_0\| \\
&\leq c\varepsilon^2
\end{aligned}$$

Une combinaison de ces inégalités nous donne (2.16).

(iv) : $\forall \zeta_i \in U_\varepsilon$, tel que

$$\begin{aligned}
|\Lambda_\varepsilon \zeta_1 - \Lambda_\varepsilon \zeta_2| &= \frac{1}{\varepsilon} |((C(\zeta_1) - L_1(\zeta_1) - C(\zeta_2) + L_1(\zeta_2), \phi_0))| \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon} \|C(\zeta_1) - C(\zeta_2)\| + \|L_1(\zeta_2) - L_1(\zeta_1)\| \|\phi_0\| \\
&\leq c\varepsilon \|\zeta_1 - \zeta_2\|
\end{aligned}$$

on a l'inégalité (2.17)

(v) : $\forall \zeta \in U_\varepsilon$ d'après (iii) tel que

$$\begin{aligned}\|S_\varepsilon\zeta\| &= \|(\Lambda_\varepsilon\zeta - \lambda_0)L_2\zeta - C(\zeta_1) + L_1(\zeta_1)\| \\ &\leq |\Lambda_\varepsilon\zeta - \lambda_0|\|L_2\zeta\| + \|C(\zeta)\| + \|L_1(\zeta)\| \\ &\leq c\varepsilon^3\end{aligned}$$

(vi) : $\forall \zeta_i \in U_\varepsilon$ d'après (iii)et (iv) tel que

$$\begin{aligned}\|S_\varepsilon\zeta_1 - S_\varepsilon\zeta_2\| &= \|(\Lambda_\varepsilon\zeta_1 - \lambda_0)L_2\zeta_1 - C(\zeta_1) + L_1(\zeta_1) - (\Lambda_\varepsilon\zeta_2 - \lambda_0)L_2\zeta_2 + C(\zeta_2) - L_1(\zeta_2)\| \\ &\leq |(\Lambda_\varepsilon\zeta - \lambda_0)|\|L_2(\zeta_1 - \zeta_2)\| + |(\Lambda_\varepsilon\zeta_1 - \Lambda_\varepsilon\zeta_2)|\|L_2\zeta_2\| \\ &+ \|C(\zeta_1) - C(\zeta_2)\| + \|L_1(\zeta_1) - L_1(\zeta_2)\| \\ &\leq c\varepsilon^2\|\zeta_1 - \zeta_2\|\end{aligned}$$

■

Théorème 4 *Pour ε assez petit, l'application T_ε est une contraction de la boule V_ε (2.12) dans elle-méme.*

Preuve. On a $T_\varepsilon : H_0^2(\omega) \to {\phi_0}^\perp$ par définition :

$$\begin{aligned}T_\varepsilon\eta &= QS_\varepsilon(\varepsilon\phi_0 + \eta) \\ \|T_\varepsilon\eta\| &\leqq c\|S_\varepsilon(\varepsilon\phi_0 + \eta)\| \\ &\leqq c^2\varepsilon^2 (2.14)\ (2.18)\end{aligned}$$

on choisit ε donc $c^2\varepsilon^2 < 1$, on a $T_\varepsilon : V_\varepsilon \to V_\varepsilon$.

$$\begin{aligned}\|T_\varepsilon\eta_1 - T_\varepsilon\eta_2\| &= \|QS_\varepsilon(\varepsilon\phi_0 + \eta_1) - QS_\varepsilon(\varepsilon\phi_0 + \eta_2)\| \\ &\leqq c\|S_\varepsilon(\varepsilon\phi_0 + \eta_1) - S_\varepsilon(\varepsilon\phi_0 + \eta_2)\| \\ &\leqq c^2\varepsilon^2\|\zeta_1 - \zeta_2\|\end{aligned}$$

si $c^2\varepsilon^2 < 1$ alors T_ε est une contraction. ■

Théorème 5 *Pour ε assez petit, il existe une solution unique de la forme $\varepsilon\phi_0 + \eta$ assez petit, avec $\eta \in \{\phi_0\}^\perp \cap V_\varepsilon$ de l'équation*

$$\zeta - \lambda L_2\zeta - L_1(\zeta) + C(\zeta) = 0.$$

Cette solution vérifie

$$\zeta \neq 0, \|\zeta\| = O(\varepsilon), |\lambda - \lambda_0| = O(\varepsilon^2).$$

Preuve.

Si ε est assez petit, T_ε possède un point fixe unique dans la boule de rayonε. Soit η point fixe. Alors $(\varepsilon\phi_0 + \eta, \Lambda_\varepsilon(\varepsilon\phi_0 + \eta))$ est de solution de l'équation (1.14). Les estimations découlent directement du lemme 1. Il est évident que $\zeta \neq 0$, lorsque $\eta \in {\phi_0}^\perp$. ■

Pour approcher le point fixe η on utilise la méthode itérative

$$\eta^{(i+1)} = T_\varepsilon\eta^i. \tag{2.23}$$

On a l'explicite :

(i) : On choisit η^0 dans V_ε (exemple : $\eta^0 = 0$).

(ii) : Si η^i connu, on pose

$$\zeta^i = \varepsilon\phi_0 + \eta^i \tag{2.24}$$

(iii) : On calcule

$$\lambda^{(i+1)} = \lambda_0 + \frac{1}{\varepsilon}(C(\zeta^i) - L_1(\zeta^i), \phi_0) \tag{2.25}$$

(iv) :

$$S_\varepsilon\zeta^i = (\lambda^{(i+1)} - \lambda_0)L_2\zeta^i - C(\zeta^i) + L_1(\zeta^i),$$

(v) :

$$\eta^{(i+1)} = QS_\varepsilon\zeta^i.$$

2.1.1 Quelques résultats de régularité

On donne ici un résultat de régularité avec des hypothèses moins fortes sur ω.

Hypothèses

(H_3) Le domaine ω satisfait à la condition du cône (voir Adams [1]).
(H_4) Si $k \in L^2(\omega)$, alors la solution du problème

$$\varsigma \in H_0^2(\omega),\ \Delta^2\varsigma = k \text{ dans } D'(\omega), \tag{2.26}$$

vérifie

$$\varsigma \in H^3(\omega) \cap H_0^2(\omega) \text{ avec } \|\varsigma\|_{3,\omega} \leq c|k|_{0,\omega}. \tag{2.27}$$

Lemme 2 *On suppose que $g \in W^{2,\infty}(\omega)$et que les hypothèse (H_3) et (H_4) ont lieu. Alors si $(\zeta, \lambda) \in H_0^2(\omega) \times \mathbb{R}$ est solution de l'équation(2.1) on a*

$$\zeta \in H^3(\omega) \cap H_0^2(\omega) \tag{2.28}$$

Lemme 3 *Soit $\zeta \in H^3(\omega) \cap H_0^2(\omega), \eta \in H_0^2(\omega)$. Si les hypothèses (H_3) et (H_4) sont vérifiée alors on a*

$$B(\zeta, \eta) \in H^{5/2}(\omega), \tag{2.29}$$

$$C(\zeta) \in H^3(\omega). \tag{2.30}$$

De plus, on a les estimations

$$\|B(\zeta, \eta)\|_{5/2,\omega} \leq c\|\zeta\|_{3,\omega}\|\|\eta\|, \tag{2.31}$$

$$\|C(\zeta)\|_{3,\omega} \leq c\|\zeta\|_{3,\omega}^2\|\zeta\|. \tag{2.32}$$

Lemme 4 *Si $\chi = B(\theta, \theta)$, avec $\chi \in W^{2,\infty}$ et $\zeta \in H_0^2(\omega)$, on a :*

$$L_1\zeta \in H^3(\omega),\ \|L_1\zeta\| \leq c\|\zeta\|, \tag{2.33}$$

Lemme 5 *Si $g \in W^{2,\infty}, \zeta \in H_0^2(\omega)$ et si l 'hypothèse (H_4) est vérifiée, alors $L_2\zeta \in H^3(\omega)$ et on a*

$$\|L_2\zeta\|_{3,\omega} \leq c\|\zeta\| \tag{2.34}$$

Lemme 6 *Sous les hypothèses du lemme 5, si $\zeta \in U_\varepsilon \cap H^3(\omega)$, on a $S_\varepsilon\zeta \in H^3(\omega)$*

$$\|S_\varepsilon\zeta\|_{3,\omega} \leq c\varepsilon^3 + c\varepsilon\|\zeta\|_{3,\omega}^2. \tag{2.35}$$

Preuve. On utilise le résultat des lemmes 3, 4 et 5. On démontre la rélation (2.35). ■

2.2 Méthode d'éléments finis conformes

Pour approcher le problème continu, on utilise une méthode d'éléments finis conformes Kesavan [7] d'après les hypothèses d'approximation on obtient les estimations d'erreur sur les problèmes linéarisés. On approche $V = H_0^2(\omega)$ par des sous-espaces V_h telle que h est un paramètre qui tend vers zéro. On a :
(H_5) Hypothèse d'approximation, $r_h : (H^3(\omega) \cap H_0^2(\omega) \to V_h)$

On suppose qu'il existe un opérateur linéaire r_h tel que :

$$\forall \eta \in H^{m+1}(\omega) \cap H_0^2(\omega), \|\eta - r_h\eta\| \leq ch^{m-1}\|\eta\|_{m+1}, \omega, \ 2 \leq m \leq l, \tag{2.36}$$

avec $c > 0$ est une constante indépendante de h. cette hypothèse implique en particulier que

$$\forall \eta \in H_0^2(\omega), \lim_{h\to 0}(\inf_{\eta \in V_h \to 0}\|\eta - \eta_h\|) = 0. \tag{2.37}$$

Á partir de l'inégalité (2.36) on peut avoir des estimations dans des espaces de Sobolev fractionnaires. Par exemple on a le résultat suivant :

Lemme 7 *Soit $\eta \in H^{5/2}(\omega)$, alors il existe une constante $c > 0$, indépendante de h tell que*

$$\inf_{\eta_h \in V_h}\|\eta - \eta_h\| \leq ch^{1/2}\|\eta\|_{5/2}, \omega \tag{2.38}$$

Preuve.

On note par ρ_h la projection orthogonale de $H_0^2(\omega)$ sur V_h et soit I l'identité dans $H_0^2(\omega)$. Donc

$$I - \rho_h \in \mathfrak{L}(H_0^2(\omega), H_0^2(\omega) \cap \mathfrak{L}(H^3(\omega) \cap H_0^2(\omega), H_0^2(\omega)) \tag{2.39}$$

et on a

$$\|I - \rho_h\|_{\mathfrak{L}(H_0^2(\omega), H_0^2(\omega))} \leq c, \tag{2.40}$$

$$\|I - \rho_h\|_{\mathfrak{L}(H^3(\omega) \cap H_0^2(\omega), H_0^2(\omega))} \leq ch, \tag{2.41}$$

Donc on a $I - \rho_h \in \mathfrak{L}((H^{5/2}(\omega) \cap H_0^2(\omega), H_0^2(\omega))$ et

$$\|I - \rho_h\|_{\mathfrak{L}(H^{5/2}(\omega) \cap H_0^2(\omega), H_0^2(\omega))} \leq ch^{1/2}, \tag{2.42}$$

on obtient (2.38) ■

On a le problème linéarisé discret, trouver $(\phi_h, \lambda_h) \in V_h \times \mathbb{R}$

$$\forall \varsigma_h \in V_h, ((\phi_h, \varsigma_h)) = \lambda_h((L_2\phi_h, \varsigma_h)), \tag{2.43}$$

où

$$\forall \varsigma_h \in V_h, \int_\omega \Delta\phi_h \Delta\varsigma_h dx = \lambda_h \int_\omega [g, \phi_h]\varsigma_h dx. \tag{2.44}$$

Pour h assez petit il existe une valeur propre simple λ_{0h} qui approche la valeur propre λ_0. Il existe aussi un vecteur propre ϕ_{0h} associé à λ_{0h} qui approche ϕ_0. On a

$$((L_2\phi_{0h}, \phi_{0h})) = 1, \tag{2.45}$$

et les estimations d'erreur

$$|\lambda_0 - \lambda_{0h}| \leq ch^{2(m-1)}\|\phi_0\|_{(m+1),\omega}, \tag{2.46}$$

$$\|\phi_0 - \phi_{0h}\| \leq ch^{(m-1)}\|\phi_0\|_{(m+1),\omega}, \tag{2.47}$$

où $\phi_0 \in H^{m+1}(\omega) \cap H_0^2(\omega)$. D'après l'hypothèse$(H4)$ on a toujours $\phi_0 \in H^3(\omega) \cap H_0^2(\omega)$. En particulier on a

$$|\lambda_0 - \lambda_{0h}| \leq ch^2\|\phi_0\|_{3,\omega}, \tag{2.48}$$

$$\|\phi_0 - \phi_{0h}\| \leq ch\|\phi_0\|_{3,\omega,}. \tag{2.49}$$

Ces estimations sont obtenues par des raisonnements habituels que l'on fait pour l'approximation par éléments finis d'un problème de valeurs propres. Un deuxième problème linéaire associé à l'algorithme apparait dans le calcul de l'opérateur Q. On définit maintenant l'analogue discret de cet opérateur. Soit $k \in H_0^2(\omega)$. Donc $q_h = Q_h k$ désigne la solution unique du problème suivant :

$$\forall \varsigma_h \in V_h, ((q_h, \varsigma_h)) - \lambda_{0h}((L_2 q_h, \varsigma_h)) = ((p_{0h}k, \varsigma_h)), \tag{2.50}$$

$$((q_h, \phi_{0h})) = 0 \tag{2.51}$$

tel que

$$p_{0h}k = k - ((L_2 k, \phi_{0h}))\phi_{0h}, \tag{2.52}$$

désigne la projection orthogonale sur $\{\phi_{0h}\}^{\perp} \cap V_h$. Le problème (2.50) - (2.51) s'écrit également

$$\forall \varsigma_h \in V_h \cap {\phi_{0h}}^{\perp}, ((q_h, \varsigma_h)) - \lambda_{0h}((L_2 q_h, \varsigma_h)) = ((k, \varsigma_h)), \tag{2.53}$$

$$((q_h, \phi_{0h})) = 0. \tag{2.54}$$

Pour obtenir le résultat ci-dessous On utilise les raisonnements de kikuchi [5] :

Théorème 6 *Si les hypothèses $(H_1) - (H_5)$ ont lieu, alors il existe une constante $c > 0$ indépendante de h tell que*

$$\forall k \in H_0^2(\omega), \ \|Q_h k\| \leq c\|k\|, \tag{2.55}$$

$$\forall k \in H^3(\omega) \cap H_0^2(\omega), \ \|Qk - Q_h k\| \leq ch\|k\|_{3,\Omega}. \tag{2.56}$$

Preuve.

(i) : On prouve (2.55), si l'inégalité est fausse on a une sous suite $\{h_n\}$ et une suite de fonctions $\{k_n\}$ dans $H_0^2(\omega)$ telles que

$$h_n \to 0, \ n \to \infty, \tag{2.57}$$

$$\|k_n\| \to 0, \tag{2.58}$$

$$\|q_n\| = 1 \text{ où } q_n = Q_{h_n}(k_n). \tag{2.59}$$

Alors on peut extraire une sous-suite telle que $q_n \to q$ dans $H_0^2(\omega)$ faible. De plus étant donné $\varsigma \in H_0^2(\omega)$, on obtient une suite $\{\varsigma_{h_n}\}, \varsigma_{h_n} \in V_{h_n}$ telle que $\varsigma_{h_n} \to \varsigma$ dans $H_0^2(\omega)$ fort. Pour trouver $q = 0$, on passe à la limite dans (2.50) et (2.51). Mais (2.50) donne aussi

$$1 = \lambda_{0h_n}((L_2 q_n, q_n)) + ((p_{0h_n} k_n, q_n)) \tag{2.60}$$

Alors

$$1 = \lambda_0((L_2 q, q)), \tag{2.61}$$

une contradiction. Donc (2.55) est vraie.

(ii) : On a $q_h^{(1)}$ est la solution unique du problème

$$\forall \varsigma_h \in V_h, ((q_h^{(1)}, \varsigma_h)) = \lambda_0((L_2 q, \varsigma_h)) + ((p_{0h}, \varsigma_h)) \tag{2.62}$$

tel que $q = Qk$; $q_h^{(2)}$ est la projection orthogonale de $q_h^{(1)}$ sur $\{\phi_{0h}\}^\perp$, i.e.

$$q_h^{(2)} = q_h^{(1)} - ((L_2 q_h^{(1)}, \phi_{0h}))\phi_{0h}. \tag{2.63}$$

(iii) : On évalue l'erreur $q - q_h^{(1)}$. Remarquons

$$\forall \varsigma_h \in V_h((q - q_h^{(1)}, \varsigma_h)) = 0. \tag{2.64}$$

De plus $L_2 q \in H^3(\omega)$, d'après lemme 5, on a $q \in H^3(\omega)$, par ce que q vérifie, $q = \lambda_0 L_2 q + p_0 k$ ce qui pour $k \in H^3(\omega) \cap H_0^2(\omega), p_0 k \in H^3(\omega)$. Donc ,

$$\begin{aligned} \|q\|_{3,\omega} &\leq c\|k\|_{3,\omega} + \|q\| \\ &\leq c(\|k\|_{3,\omega} + \|k\|) \\ &\leq c\|k\|_{3,\omega}, \end{aligned}$$

et d'après (2.36), on obtient

$$\|q - q_h^{(1)}\| \leq ch\|k\|_{3,\omega}. \tag{2.65}$$

(iv) : On calcule l'erreur $q_h^{(1)} - q_h^{(2)}$. On a

$$q_h^{(1)} - q_h^{(2)} = ((L_2 q_h^{(1)}, \phi_{0h}))\phi_{0h},$$

et

$$((L_2 q_h^{(1)}, \phi_{0h})) = ((L_2 q_h^{(1)} - L_2 q, \phi_{0h})) + ((L_2 q, \phi_{0h} - \phi_0)) \tag{2.66}$$

alors

$$\|q_h^{(1)} - q_h^{(2)}\| \leq ch\|k\|_{3,\omega}. \tag{2.67}$$

(v) : Enfin on a $q_h^{(2)} - q_h$. Si $\varsigma_h \in \{\phi_{0h}\}^\perp \cap V_h$, alors

$$((q_h^{(2)}, \varsigma_h)) = ((q_h^{(1)}, \varsigma_h)) = ((\lambda_0 L_2 q + p_0 k, \varsigma_h)). \tag{2.68}$$

$\lambda_0 L_2 q + p_0 k$ s'écrit :

$$\lambda_0 L_2 q + p_0 k = k - ((L_2 k, \phi_{0h}))\phi_{0h} + \lambda_{0h} L_2 q_h^{(2)} + k_h \tag{2.69}$$

où

$$k_h = ((L_2 k, \phi_{0h}))(\phi_{0h} - \phi_0) + (\lambda_0 - \lambda_{0h}) L_2 q + \lambda_{0h} L_2 (q - q_h^{(2)}) - ((L_2 k, \phi_0 - \phi_{0h}))\phi_{0h}. \tag{2.70}$$

Par conséquent $q_h^{(2)} - q_h \in V_h \cap \{\phi_{0h}\}^{\perp}$ et vérifie

$$((q_h^{(2)} - q_h, \varsigma_h)) = \lambda_{0h}((L_2(q^{(2)} - q_h), \varsigma_h)) + ((k_h, \varsigma_h)) \tag{2.71}$$

$\forall \varsigma_h \in V_h \cap \{\phi_{0h}\}^{\perp}$. Donc par définition,

$$q_h^{(2)} - q_h = Q_h(k_h). \tag{2.72}$$

De(2.55), on trouve

$$\|q_h^{(2)} - q_h\| \leq c\|k_h\| \tag{2.73}$$

et on a

$$\begin{aligned} \|k_h\| &\leq ch\|k\| + ch^2\|k\| + ch\|k\|_{3.\omega} \\ &\leq ch\|k\|_{3.\omega}. \end{aligned}$$

D'après(iii), (iv) et (v) on obtient (2.56).

■

2.3 Le problème discret

Il est nécessaire que l'on approche l'opérateur non linéaire C.

On défini d'abord un opérateur bilinéaire approché $B_h : H_0^2(\omega) \times H_0^2(\omega) \to V_h$, par

$$\varsigma_h \in V_h, \; ((B_h(\zeta, \eta), \varsigma_h)) = \int_\omega [\zeta, \eta]\varsigma_h, \tag{2.74}$$

avec $\zeta, \eta \in H_0^2(\omega)$.
Alors $B_h(\zeta,\eta)$ est la projection orthogonale de $B(\zeta,\eta)$ sur V_h on définit $C_h(\zeta) \in V_h$ par

$$C_h(\zeta) = B_h(\zeta, (B_h(\zeta,\zeta)). \tag{2.75}$$

avec $\zeta \in H_0^2(\omega)$. On a,

$$\begin{aligned} ((C_h(\zeta), \varsigma_h)) &= \int_\omega [\zeta, (B_h(\zeta,\zeta)]\varsigma_h \\ &= \int_\omega [\zeta, \varsigma_h](B_h(\zeta,\zeta) \\ &= (((B_h(\zeta,\varsigma_h),(B_h(\zeta,\zeta))). \end{aligned}$$

On s'intéresse aux solutions non triviales $(\zeta_h, \lambda_h) \in V_h \times \mathbb{R}$ du problème

$$\zeta_h - \lambda_h \rho_h L_2(\zeta_h) - \rho_h L_1(\zeta_h) + C_h(\zeta_h) = 0, \tag{2.76}$$

et on a $\forall \varsigma_h \in V_h$

$$((\zeta_h, \varsigma h)) - \lambda_h((L_2(\zeta_h), \varsigma_h)) - (L_1(\zeta_h), \varsigma_h) + (C_h(\zeta_h), \varsigma_h) = 0. \tag{2.77}$$

Lorsque l'on cherche des solutions au voisinage de $(0.\lambda_{0h})$, avec λ_{0h} valeur propre simple, on considère un paramètre $\varepsilon > 0$ qui tend vers zéro, et on étudie, l'existence d'une solution sous forme :

$$\zeta_h = \varepsilon\phi_{0h} + \eta_h \tag{2.78}$$

où $\eta_h \in V_h \cap \{\phi_{0h}\}^\perp$.

En particulier, dans le problème discret on définit

$$S_{h,\varepsilon}\zeta_h = \frac{1}{\varepsilon}(C_h(\zeta_h) - L_1(\zeta_h), \phi_{0h})L_2(\zeta_h) - C_h(\zeta_h) + L_1(\zeta_h), \tag{2.79}$$

$$T_{h,\varepsilon}\eta_h = Q_h S_{h,\varepsilon}(\varepsilon\phi_{0h} + \eta_h), \tag{2.80}$$

et on a l' analogue discret du théorème 3.

Théorème 7 *Soit* $\varepsilon > 0$ *et* $(\zeta_h, \lambda_h) \in V_h \times \mathbb{R}$ *avec*

$$\zeta_h = \varepsilon\phi_{0h} + \eta_h,\ \ \eta_h \in V_h \cap \{\phi_{0h}\}^\perp$$

Alors (ζ_h, λ_h) *est solution de l'équation (2.76) si et seulement si*

$$\eta_h = T_{h,\ \varepsilon}\eta_h, \tag{2.81}$$

et

$$\lambda_h = \lambda_{0h} + \frac{1}{\varepsilon}((C_h(\varepsilon\phi_{0h} + \eta_h) - L_1(\varepsilon\phi_{0h} + \eta_h), \phi_{0h})). \tag{2.82}$$

Théorème 8 *Pour* ε *et* h *assez petit, il existe une solution unique* ζ *de la forme* $\varepsilon\phi_{0h} + \eta_h$*, avec* $\eta \in \{\phi_{0h}\}^{\perp} \cap V_{h,\varepsilon}$ *de l'équation*

$$\zeta_h - \lambda\rho_h L_2(\zeta_h) - \rho_h L_1(\zeta_h) + C(\zeta_h) = 0.$$

Cette solution vérifie

$$\zeta_h \neq 0, \|\zeta_h\| = O(\varepsilon)|\lambda_h - \lambda_0| = O(\varepsilon^2),$$

où

$$V_{h,\varepsilon} = \{\eta_h \in V_h; \|\eta_h\| \leq \varepsilon\}$$

Preuve.

Si ε et h assez petits, $T_{h,\varepsilon}$ possède un point fixe unique dans la boule $V_{h,\varepsilon}$. Soit η_h point fixe. Alors $(\varepsilon\phi_{0h} + \eta_h, \Lambda_{h\varepsilon}(\varepsilon\phi_{0h} + \eta_h))$ est solution de l'équation (2.76). ∎

Nous écrivons l'algorithme pour le problème discret :
pour obtenir $\zeta_h^{(i)}$ qui approche ζ_h et $\lambda_h^{(i)}$ qui approche λ_h.

(i) : On résoud le problème linéaire de valeurs propres :

$$\forall \varsigma_h \in V_h, \int_\omega \Delta\phi_{0h}\Delta\varsigma_h dx = \lambda_{0h}\int_\omega [g, \phi_{0h}]\varsigma_h dx, \tag{2.83}$$

$$((L_2\phi_{0h}, \phi_{0h})) = 1, \tag{2.84}$$

pour déterminer λ_{0h} qui approche λ_0 et ϕ_{0h} qui approche ϕ_0

(ii) : On prend $\eta_h^{(0)}$ orthogonal à ϕ_{0h} de norme $\leq \varepsilon$, par exemple $\eta_h^{(0)} = 0$.

(iii) : Soit $\eta_h^{(i)}$ conu, avec

$$\zeta_h^{(i)} = \varepsilon\phi_{0h} + \eta_h^{(i)}. \tag{2.85}$$

(iv) : On résoud un problème de Dirichlet homogène pour l'opérateur biharmonique discret, pour calcule $B_h(\zeta_h^{(i)}, \zeta_h^{(i)}) \in V_h$:

$$\forall \varsigma_h \in V_h, \int_\omega \Delta B_h(\zeta_h^{(i)}, \zeta_h^{(i)}) \Delta \varsigma_h dx = \int_\omega [\zeta_h^{(i)}, \zeta_h^{(i)}] \varsigma_h dx. \tag{2.86}$$

(v) :

$$\lambda_h^{(i+1)} = \lambda_{0h} + \frac{1}{\varepsilon}(C(\zeta_h^{(i)}) - L_1(\zeta_h^{(i)}), \phi_{0h}) \tag{2.87}$$

(vi) :

$$S_{h,\varepsilon}\zeta_h^{(i)} = (\lambda^{(i+1)} - \lambda_{0h})L_2(\zeta^(i)_h) - C(\zeta_h^{(i)}) + L_1(\zeta_h^{(i)}),$$

(vii) :

$$\eta_h^{(i+1)} = Q_h(S_{h,\varepsilon}\zeta_h^{(i)}).$$

Chapitre 3

Estimation d'erreur

3.1 Approximation de l'opérateur non linéaire

Lemme 8 *Soit $\zeta, \eta \in H_0^2(\omega)$. Alors il existe une constante $c > 0$ indépendante de h telle que :*

$$\|B_h(\zeta, \eta)\| \leq c\|\zeta\|\|\eta\|. \tag{3.1}$$

$$\|C_h(\zeta)\| \leq c\|\zeta\|^3. \tag{3.2}$$

et si $\|\zeta\|, \|\eta\| \leq \varepsilon$,

$$\|C_h(\zeta) - C_h(\eta)\| \leq c\varepsilon^2\|\zeta - \eta\|. \tag{3.3}$$

Preuve. *Voir Berger[2]* ∎

Lemme 9 *Soit $\zeta \in H^3(\omega) \cap H_0^2(\omega)$ et $\eta \in H_0^2(\omega)$. Alors il existe une constante $c > 0$ indépendante de h telle que :*

$$\|B(\zeta, \eta) - B_h(\zeta, \eta)\| \leq ch^{1/2}\|\zeta\|_{3,\omega}\|\eta\| \tag{3.4}$$

Preuve. Voir théorème (6.2) de [7] ∎

Lemme 10 *Soit $\zeta \in H^3(\omega) \cap H_0^2(\omega)$. Alors il existe une constante $c > 0$ indépendante de h telle que :*

$$\forall \varsigma_h \in \eta_h |((C(\zeta) - C_h(\zeta), \varsigma_h))| \leq ch\|\zeta\|_{3,\omega}^2\|\zeta\|\|\varsigma_h\|. \tag{3.5}$$

Preuve. On a

$$((C_h(\zeta), \varsigma_h)) = ((B_h(\zeta, \varsigma_h), B_h(\zeta, \zeta))),$$

donc,

$$\begin{aligned}((C(\zeta)-C_h(\zeta),\varsigma_h)) &= ((B(\zeta,\varsigma_h),B(\zeta,\zeta)))-((B_h(\zeta,\varsigma_h),B_h(\zeta,\zeta)))\\ &= ((B(\zeta,\varsigma_h)-B_h(\zeta,\varsigma_h),B(\zeta,\zeta)))\\ &+ ((B_h(\zeta,\varsigma_h),B(\zeta,\zeta)-B_h(\zeta,\zeta))).\end{aligned}$$

Car $B_h(.,.)$ est la projection orthogonale de $B(.,.)$ sur V_h, le deuxième terme vaut zéro. De la méme façon s'écrit

$$((C(\zeta)-C_h(\zeta),\varsigma_h))=((B(\zeta,\varsigma_h)-B_h(\zeta,\varsigma_h),B(\zeta,\zeta)-B_h(\zeta,\zeta))). \tag{3.6}$$

■

Lemme 11 *Soit $\zeta\in H^3(\omega)\cap H_0^2(\omega)$. Alors il existe une constante $c>0$ indépendante de h telle que :*

$$\|C(\zeta)-C_h(\zeta)\|\leq ch^{1/2}\|\zeta\|^2\|\zeta\|_{3,\omega}. \tag{3.7}$$

Preuve.

On a $C(\zeta)\in H^3(\omega)\cap H_0^2(\omega)$, lorsque $\zeta\in H^3(\omega)\cap H_0^2(\omega)$. Soit ρ_h la projection orthogonale de $H_0^2(\omega)$ sur V_h. Donc

$$\begin{aligned}\|C(\zeta)-C_h(\zeta)\|^2 &= ((C(\zeta)-C_h(\zeta),C(\zeta)-\rho_h(C(\zeta))))\\ &+ ((C(\zeta)-C_h(\zeta),\rho_h(C(\zeta))-C_h(\zeta))).\end{aligned}$$

D'une part, en obtient

$$\begin{aligned}|((C(\zeta)-C_h(\zeta),C(\zeta)-\rho_h(C(\zeta))))| &= |((C(\zeta),C(\zeta)-\rho_h(C(\zeta))))|\\ &\leq c\|\zeta\|^3\|C(\zeta)-r_h(C(\zeta))\|\\ &\leq ch\|C(\zeta)\|_{3,\omega}\|\zeta\|^3\\ &\leq ch\|\zeta\|^4\|\zeta\|_{3,\omega}^2\end{aligned}$$

où r_h est l'opérateur que figure dans l'hypothèse (H_5). On a utilisé l'estimation (2.32) pour $\|C(\zeta)\|_{3,\omega}$. et d'après lemme 10, on trouve

$$|((C(\zeta)-C_h(\zeta),\rho_h(C(\zeta))-C_h(\zeta)))| \leq ch\|\zeta\|_{3,\omega}^2\|\zeta\|^4$$

où on a utilisé l'estimation (3.2) pour $\|C_h(\zeta)\|$.
Donc on a

$$\|C(\zeta) - C_h(\zeta)\|^2 \leq ch\|\zeta\|^4\|\zeta\|^2_{3,\omega},$$

on a (3.7). ■

3.2 Estimation d'erreur

Les estimations d'erreur portant sur $(\lambda_0 - \lambda_{0h})$ et $(\phi_0 - \phi_{0h})$ sont trouvées respectivement par (2.48) et (2.49), telle que (ϕ_0, λ_0) solution du problème linéarisé avec λ_0 simple, et $(\phi_{0h}, \lambda_{0h})$ son approximation par éléments finis conformes. Soit (ζ, λ) solution du problème non-linéaire, donnée par l'algorithme du problème continu à partir de (ϕ_0, λ_0). Soit (ζ_h, λ_h) la solution approchée donnée par l'algorithme discret du problème discret à partir de $(\phi_{0h}, \lambda_{0h})$. Supposons que les hypothèses $(H1)-(H5)$ sont valables, et en particulier que $\zeta \in H^3(\omega) \cap H^2_0(\omega)$.

Lemme 12 *Il existe une constante $c > 0$ indépendante de h et de ε telle que*

$$|\lambda - \lambda_h| \leq ch^2 + ch\varepsilon^2 + c\varepsilon\|\zeta - \zeta_h\| \tag{3.8}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\lambda - \lambda_h &= \lambda_0 - \lambda_{0h} + \frac{1}{\varepsilon}\{((C(\zeta) - L_1(\zeta), \phi_0)) - ((C_h(\zeta_h) - L_1(\zeta_h), \phi_{0h}))\} \\
&= \lambda_0 - \lambda_{0h} + \frac{1}{\varepsilon}((C(\zeta) - L_1(\zeta), \phi_0 - \phi_{0h})) \\
&+ \frac{1}{\varepsilon}\{((C(\zeta) - C_h(\zeta), \phi_{0h})) + ((C_h(\zeta) - L_1(\zeta) - C_h(\zeta_h) + L_1(\zeta_h), \phi_{0h}))\}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
|\lambda - \lambda_h| &\leq |\lambda_0 - \lambda_{0h}| + \frac{1}{\varepsilon}\{((\|C(\zeta)\| + \|L_1(\zeta)\|\|\phi_0 - \phi_{0h}\|\} \\
&+ \frac{1}{\varepsilon}\{\|C(\zeta) - C_h(\zeta)\|\|\phi_{0h}\| + \|C_h(\zeta) - C_h(\zeta_h)\| + \|L_1(\zeta + \zeta_h)\|\|\phi_{0h}\|\} \\
&\leq ch^2\|\phi_0\| + \frac{1}{\varepsilon}\{ch\varepsilon^3\|\phi_0\| + ch\varepsilon^3\|\phi_{0h}\| + c\varepsilon^2\|\zeta - \zeta_h\|\|\phi_{0h}\|\} \\
&\leq ch^2 + ch\varepsilon^2 + c\varepsilon\|\zeta - \zeta_h\|
\end{aligned}$$

■

Lemme 13 *Il existe une constante $c > 0$ indépendante de h et de ε telle que*

$$\|S_\varepsilon\zeta - S_{h,\varepsilon}\zeta_h\| \leq ch^{1/2}\varepsilon^3 + c\varepsilon^2\|\zeta - \zeta_h\| \tag{3.9}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
S_\varepsilon\zeta - S_{h,\varepsilon}\zeta_h &= \frac{1}{\varepsilon}\{((C(\zeta) - L_1(\zeta), \phi_0))L_2\zeta - ((C_h(\zeta_h) - L_1(\zeta_h), \phi_{0h}))L_2\zeta_h\} \\
&- ((C(\zeta) - L_1(\zeta) - C_h(\zeta_h) + L_1(\zeta_h)) \\
&= \frac{1}{\varepsilon}((C(\zeta) - L_1(\zeta), \phi_0))L_2(\zeta - \zeta_h) \\
&+ \frac{1}{\varepsilon}((C(\zeta) - L_1(\zeta), \phi_0)) - ((C_h(\zeta_h) - L_1(\zeta_h), \phi_{0h}))L_2\zeta_h \\
&- (C(\zeta) - C_h(\zeta)) - (C_h(\zeta) - L_1(\zeta) - C_h(\zeta_h) + L_1(\zeta_h)).
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|S_\varepsilon\zeta - S_{h,\varepsilon}\zeta_h\| &\leq \frac{1}{\varepsilon}(\|(C(\zeta)\| + \|L_1(\zeta)\|)\|\phi_0\|\|L_2(\zeta - \zeta_h)\| \\
&+ \frac{1}{\varepsilon}\{(\|C(\zeta)\| + \|L_1(\zeta)\|)\|\phi_0\| + (\|C_h(\zeta)\| + \|L_1(\zeta)\|)\|\phi_{0h}\|\}\|L_2\zeta_h\| \\
&+ (\|C(\zeta) - C_h(\zeta)\|) + (\|C_h(\zeta) - C_h(\zeta_h)\|) + (\|L_1(\zeta) - L_1(\zeta_h)\|) \\
&\leq ch^{1/2}\varepsilon^3 + c\varepsilon^2\|\zeta - \zeta_h\|.
\end{aligned}$$

■

Théorème 9 *Il existe un $\varepsilon_0 > 0$ et une contant $c = c(\varepsilon_0) > 0$ tel que, pour tout h assez petit et pour tout ε tel que $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, on a*

$$\|\zeta - \zeta_h\| \leqq ch\varepsilon + ch^{1/2}\varepsilon^3. \tag{3.10}$$

$$|\lambda - \lambda_h| \leqq ch^2 + ch\varepsilon^2 + ch^{1/2}\varepsilon^4. \tag{3.11}$$

Remarque 10 *Pour h assez petit et on a λ_{0h} est une valeur propre simple qui approche λ_0.*

Preuve.

On a $\zeta = \varepsilon\phi_0 + \eta, \zeta_h = \varepsilon\phi_{0h} + \eta_h$,où $\eta = Q(S_\varepsilon\zeta), \eta_h = Q_h(S_{h,\varepsilon}\zeta_h)$.

$$\begin{aligned}
\|\zeta - \zeta_h\| = \|\varepsilon\phi_0 + \eta - \varepsilon\phi_{0h} - \eta_h\| &\leqq \|\varepsilon\phi_0 - \varepsilon\phi_{0h}\| + \|\eta - \eta_h\| \\
&\leqq ch\varepsilon\|\phi_0\| + \|\eta - \eta_h\|
\end{aligned}$$

On pose :

$$\eta_h^* = Q_h(S_\varepsilon \zeta). \tag{3.12}$$

De 2.56), on obtient

$$\begin{aligned}
\|\eta_h^* - \eta_h\| &\leqq \|Q_h(S_\varepsilon \zeta) - Q_h(S_{h,\varepsilon}\zeta_h)\| \\
&\leqq c\|S_{h,\varepsilon}\zeta_h - S_\varepsilon \zeta\| \\
&\leqq ch^{1/2}\varepsilon^3 + c\varepsilon^2\|\zeta - \zeta_h\|
\end{aligned}$$

D'après lemme 6, $S_\varepsilon \zeta \in H^3(\omega)$ et on a l'estimation

$$\|S_\varepsilon \zeta\|_{3,\omega} \leqq c\varepsilon^3. \tag{3.13}$$

De l'estimation (2.56) du théorème 6, on trouve

$$\|\eta - \eta_h^*\| \leqq ch\varepsilon^3. \tag{3.14}$$

Alors, on déduit que

$$\|\zeta - \zeta_h\| \leqq ch\varepsilon + ch\varepsilon^3 + ch^{1/2}\varepsilon^3 + c\varepsilon^2\|\zeta - \zeta_h\|. \tag{3.15}$$

Si ε est assez petit, i.e. $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ avec $c\varepsilon_0^2 \leq 1/2$ donc

$$\begin{aligned}
\|\zeta - \zeta_h\| &\leqq ch\varepsilon + ch\varepsilon^3 + ch^{1/2}\varepsilon^3 + c\varepsilon^2\|\zeta - \zeta_h\| \\
&\leqq ch\varepsilon + 1/2ch\varepsilon + ch^{1/2}\varepsilon^3 + 1/2\|\zeta - \zeta_h\| \\
&\leqq ch\varepsilon + ch\varepsilon + ch^{1/2}\varepsilon^3 + 1/2\|\zeta - \zeta_h\| \\
&\leqq 2ch\varepsilon + ch^{1/2}\varepsilon^3 + 1/2\|\zeta - \zeta_h\| \\
&\leqq ch\varepsilon + ch^{1/2}\varepsilon^3 + 1/2\|\zeta - \zeta_h\| \\
\|\zeta - \zeta_h\| - 1/2\|\zeta - \zeta_h\| &\leqq ch\varepsilon + ch^{1/2}\varepsilon^3 \\
1/2\|\zeta - \zeta_h\| &\leqq ch\varepsilon + ch^{1/2}\varepsilon^3 \\
\|\zeta - \zeta_h\| &\leqq 2ch\varepsilon + 2ch^{1/2}\varepsilon^3 \\
&\leqq ch\varepsilon + ch^{1/2}\varepsilon^3.
\end{aligned}$$

Alors, on utilise lemme 12, on obtient

$$|\lambda - \lambda_h| \leqq ch^2 + ch\varepsilon^2 + c\varepsilon\|\zeta - \zeta_h\|$$

De (3.10), on a

$$\begin{aligned}
|\lambda - \lambda_h| &\leqq ch^2 + ch\varepsilon^2 + c\varepsilon\|\zeta - \zeta_h\| \\
&\leqq ch^2 + ch\varepsilon^2 + c\varepsilon(ch\varepsilon + ch^{1/2}\varepsilon^3) \\
&\leqq ch^2 + ch\varepsilon^2 + ch\varepsilon^2 + ch^{1/2}\varepsilon^4 \\
&\leqq ch^2 + ch\varepsilon^2 + ch^{1/2}\varepsilon^4.
\end{aligned}$$

■

Conclusion

La méthode de Kikuchi est bien adaptée à l'étude de la bifurcation, à partir d'une valeur propre simple du problème linéarisé, des équations de Marguerre-Von Kármán. Il reste à faire des essais numérique, il et aussi une étude du même genre pour la bifurcation à partir des valeurs propres multiples.

Bibliographie

[1] Adams, R.A. : *Sobolev Spaces. Academic Press* 1975.

[2] Berger, M.S. : *On von-kármán's equations and the duckling of a thin elastic plate.I. The clamped plate, Communication on pure and Appl. Mathematics*, (1967), p. 687-719.

[3] Brezzi, F. : *Finite element approximations of the von kàrmàn equations. RAIRO*, (àparaitre)1978.

[4] P.G. Ciarlet, J.C. Paumier, *A justification of the Marguerre-von Kármán equations*, Comput. Mech. 1 (1986), p. 177-202.

[5] F. Kikuchi, *An iterative finite element scheme for bifurcation analysis of semi-linear elliptic equations, Report* N^0 *542, Institute of Space and Aeronautical Science, University of Tokyo, Japan*, (1976).

[6] K. Marguerre, *Zur Theorie der gekrummten Platte grosser Formanderung, in : Proceedings, Fifth International Congress for Applied Mechanics*, (1938), p. 93-101.

[7] S Kesavan, *La méthode de Kikuchi appliquée aux équations de von Kármán*, Numer. Math., 32, (1979),p. 209-232.

[8] Rao, B. : *Marguerre-von Kàrmàn équations and menbrane model, Non. An., Th. et spp.*, 24(8), (1995), p. 1131-1140.

[9] T. von Kármán, H.S. Tsien, *The buckling of spherical shells by external pressure*, J. Aero. Sci. 7, (1939), p. 43-50.

[10] T. von kàrmàn, : *Festigkeitsprobleme im Maschinenball, Encyl.du Math. Wissenschaften, taubner IV-4*, (1910), p. 311-385.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة التقريب العددي للحلول الغير تافهة لمعادلات "مارغر- فون كارمان" من اجل انبعاج الهياكل ضعيفة الانحناء. نقدم طريقة كيكيشي ثم نعمم النتائج المتحصل عليها من "كيزافن" [7] من اجل معادلات فون- كارما ن الي معادلات "مارغر- فون كارمان" .

الكلمات المفتاحية :

المرونة الغير خطية, نظرية الهياكل ضعيفة الانحناء, طريقة كيكيشي, معادلات "مارغر- فون كارمان" .

Résumé

L'objectif de ce travail est l'étude de l'approximation numérique des solutions non-triviales des équations de Marguerre-von Kármán pour le flambage d'une coque peu-profonde . On propose une méthode de Kikichi. On étend le résultat obtenu par Kesavan [7] pour les équations de von Kármán au les équations de Marguerre-von Kármán .

Mots clés:

Elasticité non linéaire, Théorie de coque peu-profonde, Méthode de Kikichi, Équations de Marguerre-von Kármán.

Abstract

The aim of this work is to stady the numerical approximation of non-trivial solutions of the Marguerre-von Kármán equations for the buckling for shallow shell. We propose Kikichi method. We extend the results obtained by Kesavan [7] for the von Kármán equations to the Marguerre-von Kármán equations.

Key words:

Nonlinear elasticity, the shallow shell theory, Kikichi method for the Marguerre-von Kármán equations.