



**UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA**

Faculté des mathématiques et sciences de la
matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Master

Spécialité: Mathématiques

Option: Analyse

Par: Kherfi Salima

Thème

**Problème des écoulements au-dessus des obstacles avec
l'effet de gravité**

Version de: 31 mai 2015

Devant le jury composé de:

Mr. Meflah Mabrouk	MCA UKMO universit - Ouargla	Président
Mr. Aissaoui Adel	MCB UKMO universit - Ouargla	Examineur
Mr. Amara AbdelKadar	MAA UKMO universit - Ouargla	Rapporteur

Dedicace

Je tiens à dédier ce modeste travail à :
ma chère mère **Daouia Kherfi**.

et mon cher père **Ahmed**

A mes frères et mes soeurs.

A mes oncles et mes tantes.

La famille : **Kherfi**.

Tous mes amis en particulier : **Sasia**.

A tous mes amis de la promotion,

A tous ceux qui m'ont aidé de près ou loin pour réaliser ce modeste travail.

Remerciements

Le remerciement infini avant tous est à Dieu le plus puissant qui m'a comblé des bienfaits de l'Islam et de la Science.

J'exprime mes profonds remerciements à Monsieur **Amara Abdelkader**, encadreur de ce mémoire, pour son aide précieuse, sa confiance, ses encouragements, sa patience et son soutien favorable pour l'aboutissement de ce travail.

Je remercie vivement Monsieur **Meflah Mabrouk** d'avoir accepté la présidence du jury de cette mémoire, sa présence m'honore grandement. Je le pris d'accepter mes remerciements.

Mes remerciements vont aussi à Messieurs **Aissaoui Adel** pour avoir accepté d'examiner mon travail, qu'ils trouvent ici mes profonds respects.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Dedicace	i
Remerciements	ii
Introduction	v
1 Notions préliminaires sur la mécanique des fluides	1
1.1 Résumé	1
1.2 Descriptions du mouvement	1
1.2.1 Méthode Lagrangienne (description par les trajectoires)	1
1.2.2 Méthode Eulérienne (description par le champ de vitesses)	2
1.2.3 Relation entre la méthode Eulérienne et Lagrangienne	2
1.3 Définitions	3
1.3.1 Fluide incompressible	3
1.3.2 Lignes de courant	3
1.3.3 Trajectoires	4
1.4 Quelques propriétés de l'écoulement	5
1.4.1 Définitions	5
1.4.2 Potentiel de vitesse	5
1.4.3 Fonction de courant	6
1.5 Notions de potentiel complexe et de vitesse complexe	7
1.6 Equation de Bernoulli	8
2 Traitement analytique de problème sans effet de gravité	10
2.1 Résumé	10

2.2	Quelques transformations classiques	10
2.2.1	Transformation de Schwarz-Christoffel	10
2.3	Position du problème	13
2.4	La solution analytique	16
3	Traitement numérique de problème avec effet de gravité	21
3.1	Résumé	21
3.2	Formulation générale du problème	21
3.3	Résolution numérique	25
3.3.1	Première étape	25
3.3.2	Deuxième étape	28
3.3.3	Troisième étape	30
3.3.4	Quatrième étape	32
3.4	Résultats et discussion	34
3.4.1	Solution sans effet de gravité	34
3.4.2	Solution avec effet de gravité	37
3.4.3	Conclusion	37
	Conclusion	42
A	Méthode de Newton pour la résolution de systèmes non linéaires	43

Introduction

Les écoulements à surface libre de type jet sont présents dans beaucoup d'applications industrielles et urbaines : les chambres de combustion des moteurs, les pompes à jet, les réservoirs et l'architecture des barrages. Compte tenu de son importance pratique, ce type d'écoulement fait l'objet d'un grand nombre d'études théoriques, expérimentales et numériques.

Nous traitons particulièrement les écoulements plan dans les cas incompressible et irrotationnel. Pour trouver la solution exacte du problème d'écoulement traité, où en négligeant les tensions de surface et les forces de gravité, nous allons utiliser la transformation de Schwarz-Christoffel. Et on résoud le problème numériquement après on cherche une solution asymptotique en considérant les paramètres du problème.

Le présente mémoire comporte trois chapitres.

Après cette brève introduction, nous abordons dans le premier chapitre, on traite des notions fondamentales sur les propriétés en mécanique des fluides telles que les Mouvements sur les deux méthodes : la méthode lagrangienne et la méthode eulérienne, ensuite la tenseur de déformation, fonction de courant et potentiel des vitesses .

Dans le second chapitre on traite le problème dans le cas où la tension de surface et l'effet de gravité sont négligeables. Dans ce cas, le problème admet un solution exacte. Nous adoptons une méthode des transformations conformes qui réduit le problème de discrétisation uniquement sur la surface libre. Nous utilisons d'abord la technique de transformation Schwarz-Christoffel pour obtenir la solution exacte.

Dans le dernier chapitre du mémoire on présente une étude le problème d'un écoulement au-dessus d'un obstacle avec effet de gravité. On s'intéresse à la résolution numérique la solution du problème considéré en utilisant la méthode de troncation des séries. L'écoulement sera résolu pour chaque valeurs du nombre de Froude F .

Enfin, on présent la conclusion générale de notre travaille et un annexe pour présenté la Méthode de Newton pour la résolution de systèmes non linéaires.

Chapitre 1

Notions préliminaires sur la mécanique des fluides

1.1 Résumé

Dans ce chapitre, on présente les concepts de base de la mécanique des fluides : propriétés des fluides, équations fondamentales du mouvement des fluides pour un écoulement potentiel, bidimensionnel et irrotationnel d'un fluide incompressible et non visqueux pour plus détail voir [1],[8],[11], [13],[15],[18].

1.2 Descriptions du mouvement

La description du fluide en mouvement peut se faire de deux façons équivalentes. On peut choisir de suivre les particules fluides dans leur mouvement (méthode de Lagrange) ou on peut faire un cliché à un instant donné du champ de vitesse de toutes les particules fluides (méthode d'Euler)

1.2.1 Méthode Lagrangienne (description par les trajectoires)

Dans la description Lagrangienne, on décrit le mouvement par les trajectoires des particules d'identités déterminées .

Soit $\vec{S}(\vec{S}_0, t)$ le vecteur position d'une particule donnée et \vec{S}_0 est sa position initiale au

temps initial t_0 . En coordonnées cartésiennes : $\vec{S} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ qui s'écrit aussi :

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases} \quad (1.1)$$

où x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées initiales et x, y, z les coordonnées au temps t de la particule. La vitesse $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$ en \vec{S}_0 peut être calculée par :

$$u_x = \left(\frac{dx}{dt} \right)_{x_0, y_0, z_0} ; u_y = \left(\frac{dy}{dt} \right)_{x_0, y_0, z_0} ; u_z = \left(\frac{dz}{dt} \right)_{x_0, y_0, z_0} \quad (1.2)$$

Les avantages de la représentation lagrangienne sont :

- La trajectoire de chaque particule fluide est connue, son histoire peut être tracée.
- La conservation de la masse est satisfaite.

1.2.2 Méthode Eulérienne (description par le champ de vitesses)

Elle consiste à établir à un instant t donné l'ensemble des vitesses associées à chaque point de l'espace occupé par le fluide. La représentation mathématique de la méthode eulérienne s'écrit pour la vitesse : $\vec{u}(\vec{S}, t)$ où $\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$ et $\vec{S} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Par ailleurs les composantes du champ de vitesse s'expriment sous la forme :

$$\begin{cases} u_x = u_x(x, y, z, t) \\ u_y = u_y(x, y, z, t) \\ u_z = u_z(x, y, z, t) \end{cases} \quad (1.3)$$

1.2.3 Relation entre la méthode Eulérienne et Lagrangienne

La méthode d'Euler permet d'exprimer la vitesse comme :

$$u(\vec{S}, t) = \frac{d\vec{S}}{dt} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = u_x(x, y, z, t) \\ \frac{dy}{dt} = u_y(x, y, z, t) \\ \frac{dz}{dt} = u_z(x, y, z, t) \end{cases} \quad (1.4)$$

Si on intègre le système d'équations ci-dessus, on aboutit à des constantes d'intégration qui doivent être trouvées à partir des conditions initiales. La solution donne alors les équations de Lagrange : $\vec{S}(\vec{S}_0, t)$ et on retrouve le système d'équations (1.1). En principe la méthode lagrangienne peut donc être déduite de l'approche eulérienne.

1.3 Définitions

1.3.1 Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure. Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile, etc.)

1.3.2 Lignes de courant

Ce sont à un instant donné les lignes de champ vectoriel des vitesses à cet instant c'est-à-dire les lignes qui en chaque point sont tangentes au vecteur vitesse en ce point. On déduit de cette définition l'équation différentielle des lignes de courant

$$\frac{dx_1}{u_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_2}{u_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_3}{u_3(x_1, x_2, x_3, t)} \quad (1.5)$$

où t a une valeur fixée.

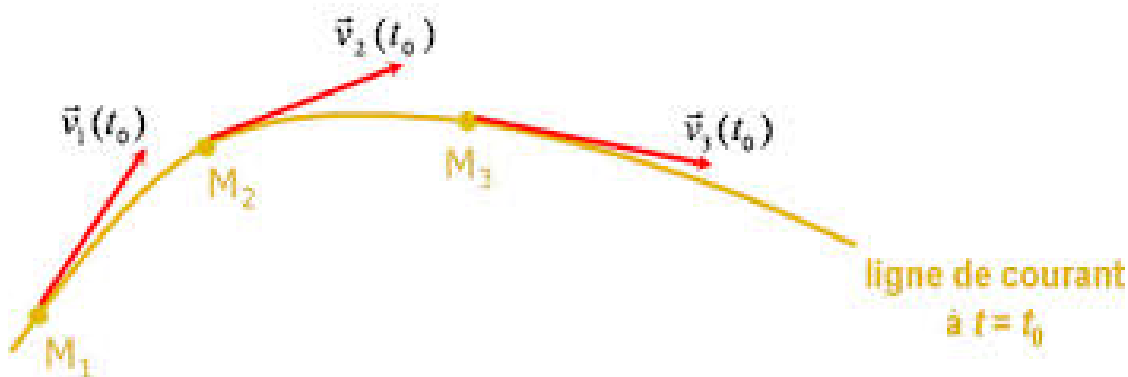


Figure :1.2 Illustration de lignes de courant à un instant donné pour un fluide s'écoulant autour d'un solide.

1.3.3 Trajectoires

On appelle trajectoire d'une particule fluide, la courbe décrite au cours du temps, lieu des positions successive de cette particule. En comparaison avec les lignes de courant et comme l'illustre la Figure 1.4, il apparaît que la ligne de courant est relative à un même instant mais regroupe des particules différentes alors que la trajectoire, qui réfère à une même particule, est une courbe paramétrée en temps. Les équations paramétriques différentielles des trajectoires sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = u_x(x, y, z, t) \\ \frac{dy}{dt} = u_y(x, y, z, t) \\ \frac{dz}{dt} = u_z(x, y, z, t) \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Le temps est devenu la variable de parcours de la trajectoire. En conséquence, pour un régime permanent, ligne de courant et trajectoire qui ont un point commun sont confondues puisque l'équation différentielle de la ligne de courant devient alors :

$$\frac{dx_i}{d\alpha} = u_i(x, y, z, \alpha), \quad i = 1, 2, 3$$

On retrouve bien ainsi l'équation d'une trajectoire, à la dénomination près sur le paramètre (α au lieu de t) lequel a perdu toute connotation temporelle en régime permanent.

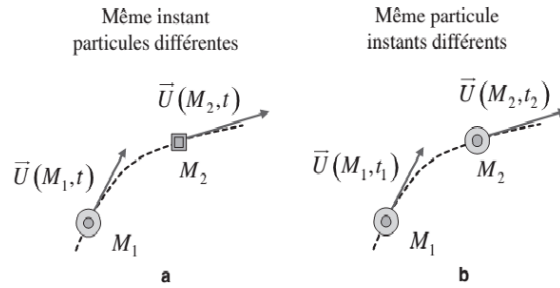


Figure :1.4 Comparaisons des (a) lignes de courant et (b) trajectoires.

1.4 Quelques propriétés de l'écoulement

1.4.1 Définitions

Un écoulement est dit :

- 1) Irrationnelle si $\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.
- 2) Incompressible si : $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$.

1.4.2 Potentiel de vitesse

Si un champ de vitesse \vec{u} est irrotationnel, on peut définir une fonction φ scalaire telle que

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \varphi$$

Le symbole φ représente le potentiel de vitesse. Dans le repère cartésien et en considérant un écoulement plan, on peut donc écrire que :

$$\begin{cases} u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases} \quad (1.7)$$

Si de plus le fluide est incompressible :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \Delta \varphi = 0$$

où φ vérifie l'équation de Laplace.

1.4.3 Fonction de courant

Si l'écoulement est dans un domaine plan alors le vecteur vitesse est vérifié pour tout point de ce domaine, à l'instant t on a

$$\operatorname{div}(\vec{u}) = 0$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$

Cela implique que la forme différentielle $u_x dx + u_y dy$ est, à t fixé, la différentielle totale d'une certaine fonction ψ :

$$\exists \psi, d(\psi) = u_x dx + u_y dy$$

Implique

$$\begin{cases} u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (1.8)$$

où ψ s'appelle la fonction de courant

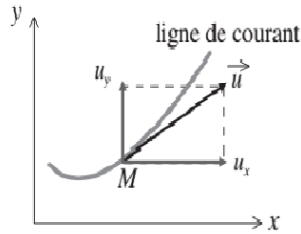


Figure :1.5 Mouvement de rotation d'un volume de fluide sans déformation.

De plus, la propriété de l'écoulement irrotationnel pour un écoulement plan entraîne :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \left| \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right| \wedge \left| \begin{array}{c} u_x = \partial\psi/\partial y \\ u_y = -\partial\psi/\partial x \end{array} \right| = -\partial^2\psi/\partial x^2 - \partial^2\psi/\partial y^2 = 0$$

$\Rightarrow \Delta\psi = 0$, ψ vérifie aussi l'équation de Laplace.

1.5 Notions de potentiel complexe et de vitesse complexe

On appelle potentiel complexe la fonction $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ où $z = x + iy$ est la variable complexe associée à la fonction potentiel complexe $f(z)$ (φ et ψ représentent respectivement les fonctions potentielle et de courant).

La fonction f a les propriétés suivantes :

1- $f(z)$ est une fonction uniforme, c'est-à-dire qu'à une valeur de z correspond une seule valeur de f

2- $f(z)$ est analytique, il faut que sa dérivée soit définie partout, c'est-à-dire

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = -i\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = u_x \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = u_y \end{cases}$$

Ce système d'équations constitue les relations de Cauchy-Riemann qui vérifient bien les relations trouvées précédemment.

Conclusion : Pour que $f(z)$ soit analytique, il faut que φ et ψ vérifient les relations de Cauchy-Riemann. La fonction $f(z)$ est appelée potentiel complexe des vitesses.

Propriétés : On a vu que pour qu'un écoulement puisse être décrit au moyen d'une fonction de courant ψ et d'un potentiel des vitesses φ , il faut que ces deux fonctions vérifient l'équation de Laplace ($\Delta\psi = 0$ et $\Delta\varphi = 0$).

1.6 Equation de Bernouilli

Le théorème de Bernouilli est une application de la conservation de l'énergie au cas des fluides en mouvement. Un certain travail est fourni au fluide lorsqu'il passe d'un point à un autre et ce travail est égal à la variation d'énergie mécanique. Dans le cas d'un fluide laminaire visqueux et incompressible, on obtient la relation suivante :

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2 \Delta p_{1,2}$$

où p_i est la pression aux points A_i où $i=1,2$. Si le fluide non visqueux dans ce cas Δp_i . L'équation de Bernouilli se réduit à :

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = const$$

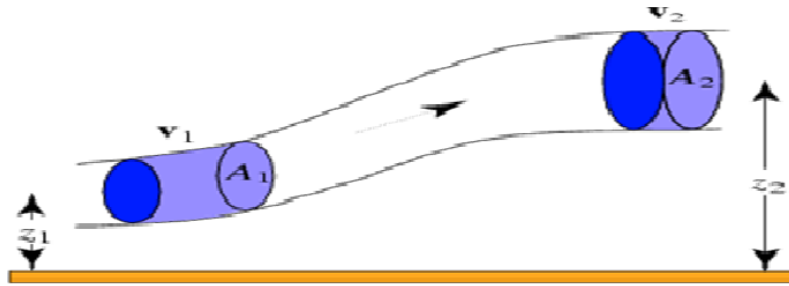


Figure :1.8 Tube de courant.

Chapitre 2

Traitement analytique de problème sans effet de gravité

2.1 Résumé

Notre objectif dans ce chapitre, est l'étude un écoulement en raison d'une plaisanterie contre une plaque verticale infinie sur la surface libre, où les effets de la gravité et de la tension de surface ne sont pas pris en considération. Nous utilisons d'abord la méthode de la théorie aérodynamique libre basé sur la méthode hodographe et de la technique de transformation Schwarz-Christoffel pour obtenir la solution exacte pour plus détail [3], [6], [11], [14].

2.2 Quelques transformations classiques

Une transformation linéaire $w = Az$, avec $A = ae^{i\alpha} \in \mathbb{C}$ est double transformation : expansion, contraction liée au coefficient d'un angle α .

2.2.1 Transformation de Schwarz-Christoffel

La transformation de Schwarz-Christoffel est la plus connus [14] : elle consiste à associer à un point d'affixe z l'image Z telle que :

$$\frac{dz}{dZ} = M(Z - a_1)^{p_1}(Z - a_2)^{p_2}(Z - a_3)^{p_3} \dots (Z - a_n)^{p_n} \quad (2.1)$$

par intégration

$$z = M \int (Z - a_1)^{p_1}(Z - a_2)^{p_2}(Z - a_3)^{p_3} \dots (Z - a_n)^{p_n} + N \quad (2.2)$$

avec $a_i \in \mathbb{R}$ et $M, N \in \mathbb{C}$. La transformation $Z(z)$ est conforme sauf aux points a_i où l'on a : $Z' = 0$.

On montre facilement que si dans le plan complexe, une frontière a un point anguleux en a_i d'angle α_i alors, si on a choisi

$$p_i = a_i/\pi - 1$$

le point anguleux est transformé en point non angulaire. Notons que si dans la transformation $\alpha_i \rightarrow \infty$, alors on omet le facteur $(z - a_i)$ dans la transformation puisqu'il serait associé à l'exposant 0 ; on dit que le polugone est dégénéré en ce point.

Remarque

1. On peut choisir trois points arbitraires parmi les n points a_1, a_2, \dots, a_n .
2. Il commode de choisir parmi les a_1, a_2, \dots, a_n un point à l'infini, par exemple a_n , cas dans lequel la dernier facteur de (2.1) et (2.2) n'existe pas.

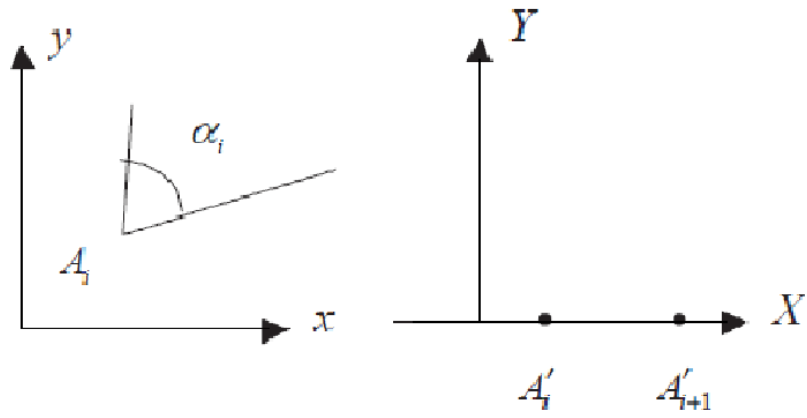


Figure :2.2 Transformation d'une ligne brisée en axe horizontal

2.3 Position du problème

Le fluide supposé non visqueux, incompressible et irrotationnel. Les effets de la gravité et de la tension de surface ne sont pas prises en considération en raison de la symétrie de l'écoulement par rapport à l'axe $y'oy$, on peut alors étudier le problème sur le demi-plan supérieur. On prend comme repère de référence la ligne OB sur l'axe $x'ox$, la ligne AO sur l'axe $y'oy$, la surface libre sur la ligne de courant CD (voir figure 1.1(a)). On suppose que l'écoulement est uniforme lorsque $|y| \rightarrow \infty$ de vitesse U , au point O la vitesse est nulle. Nous supposons que le fluide remplit tout l'espace au dessus de l'obstacle.

Le but du problème consiste à déterminer la fonction potentielle de vitesse $\varphi(x, y)$ qui vérifie les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi = 0 \text{ dans le domaine de l'écoulement} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \text{ sur } OB \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \text{ sur } OA \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 + \frac{p}{\rho} = \text{const sur } CD \text{ de forme inconnue} \end{array} \right.$$

Où p et ρ sont la pression et la densité du fluide respectivement .

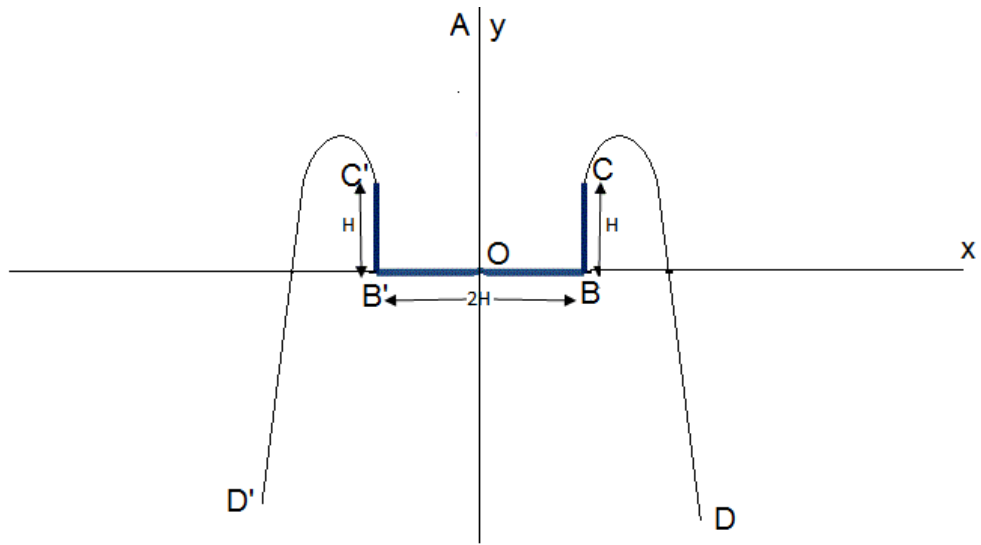


Figure :2.1(a)Schéma de l'écoulement et des coordonnées.

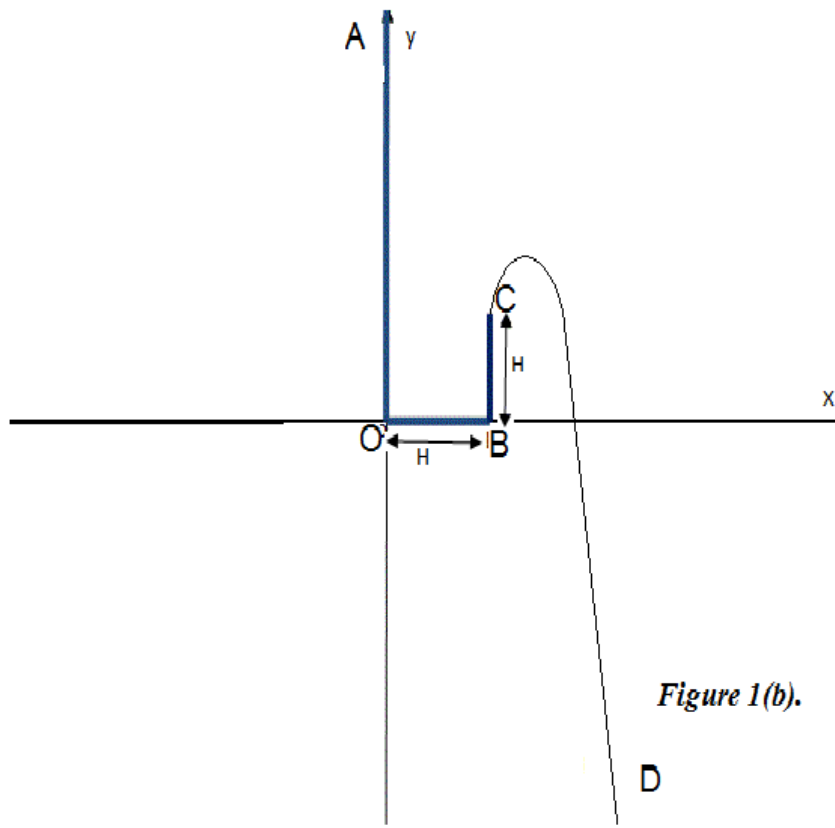


Figure 1(b).

Figure :2.1(b)Schéma de l'écoulement et des coordonnées.

2.4 La solution analytique

Pour trouver la solution analytique de le problème précédent on applique la technique de transformation Schwarz-Christoffel :

Les points A, O, B, C et D dans le plan Z se transforment aux points $A = -\infty, O = -2, B = -1, C = 0$ et $D = +\infty$ dans le plan f ou $f(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$. Dans la transformation de Schwarz-Christoffel, tous les points se retrouvent sur le même axe ($\psi = 0$) comme le montre la figure (2.3) :

Les angles dans le plan Z entre les côtés du polygone sont : $\alpha_O = \pi/2, \alpha_B = \pi/2, \alpha_C = \pi$ d'où l'on tire : $p_O = -1/2, p_B = -1/2, p_C = 0$:

Pour trouver la forme de la surface libre BC , nous utilisons la transformation de Schwarz-Christoffel (2.1) on trouve :

$$\frac{dz}{df} = M(f+2)^{-\frac{1}{2}}(f+1)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.3)$$

ceci implique

$$z = M \int \frac{1}{\sqrt{(f+1)(f+2)}} df + N \quad (2.4)$$

Ce qui nous donne après intégration :

$$z = M \left(\ln \left(2f + 2\sqrt{(f+2)(f+1)} + 3 \right) \right) + N \quad (2.5)$$

Pour déterminer les constantes A et B on a :

- Lorsque $f = -1$ (au point B), $z = H$ alors : $N = H$.

- Lorsque $f = 0$ (au point C), $z = H + iH \Rightarrow M = \frac{iH}{\ln(2\sqrt{2} + 3)}$

Donc

$$z = \frac{iH}{\ln(2\sqrt{2} + 3)} \left(\ln \left(2f + 2\sqrt{(f+2)(f+1)} + 3 \right) \right) + H \quad (2.6)$$

Puisque $f = \varphi$ sur la ligne de courant libre CD avec $0 \leq \varphi \leq +\infty$ l'équation (2.6) devient alors :

$$z = \frac{iH}{\ln(2\sqrt{2} + 3)} \left(\ln \left(2\varphi + 2\sqrt{(\varphi+2)(\varphi+1)} + 3 \right) \right) + H \quad (2.7)$$

L'équation paramétrique de la surface libre CD est donnée par :

$$\begin{cases} x = H \\ y = \frac{H}{\ln(2\sqrt{2} + 3)} \left(\ln \left(2\varphi + 2\sqrt{(\varphi + 2)(\varphi + 1)} + 3 \right) \right) \end{cases}$$

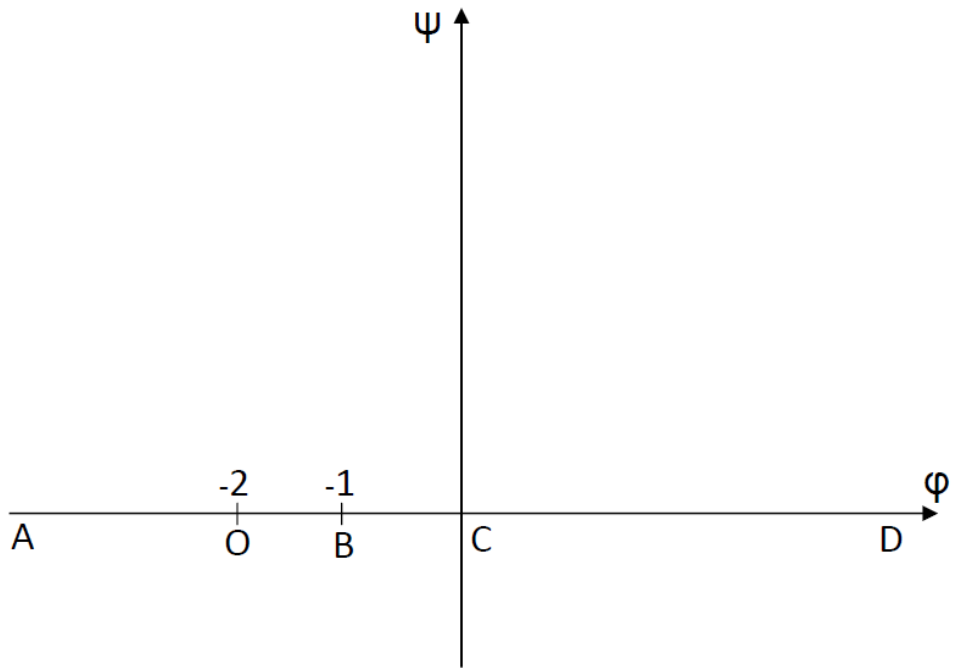


Figure :2.3 Plan de la variable $f = \varphi + i\psi$

Dont le graphe est donné dans la figure (2.4).

Ainsi la connaissance de la surface libre $f = \varphi + i\psi$ ($\psi = 0$) sur la ligne de courant $AOBCD$, noté par la suite Γ la valeur de f à l'intérieur du domaine de l'écoulement est donnée par :

$$f(z) = \frac{i}{2\varphi} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{t-z} dt \quad (2.9)$$

On remarque que malgré qu'on se prononce avoir trouvé la solution exacte de l'écoulement, l'évaluation de $f(z)$ se fait numériquement vu la complexité de la représentation de $f(z)$.

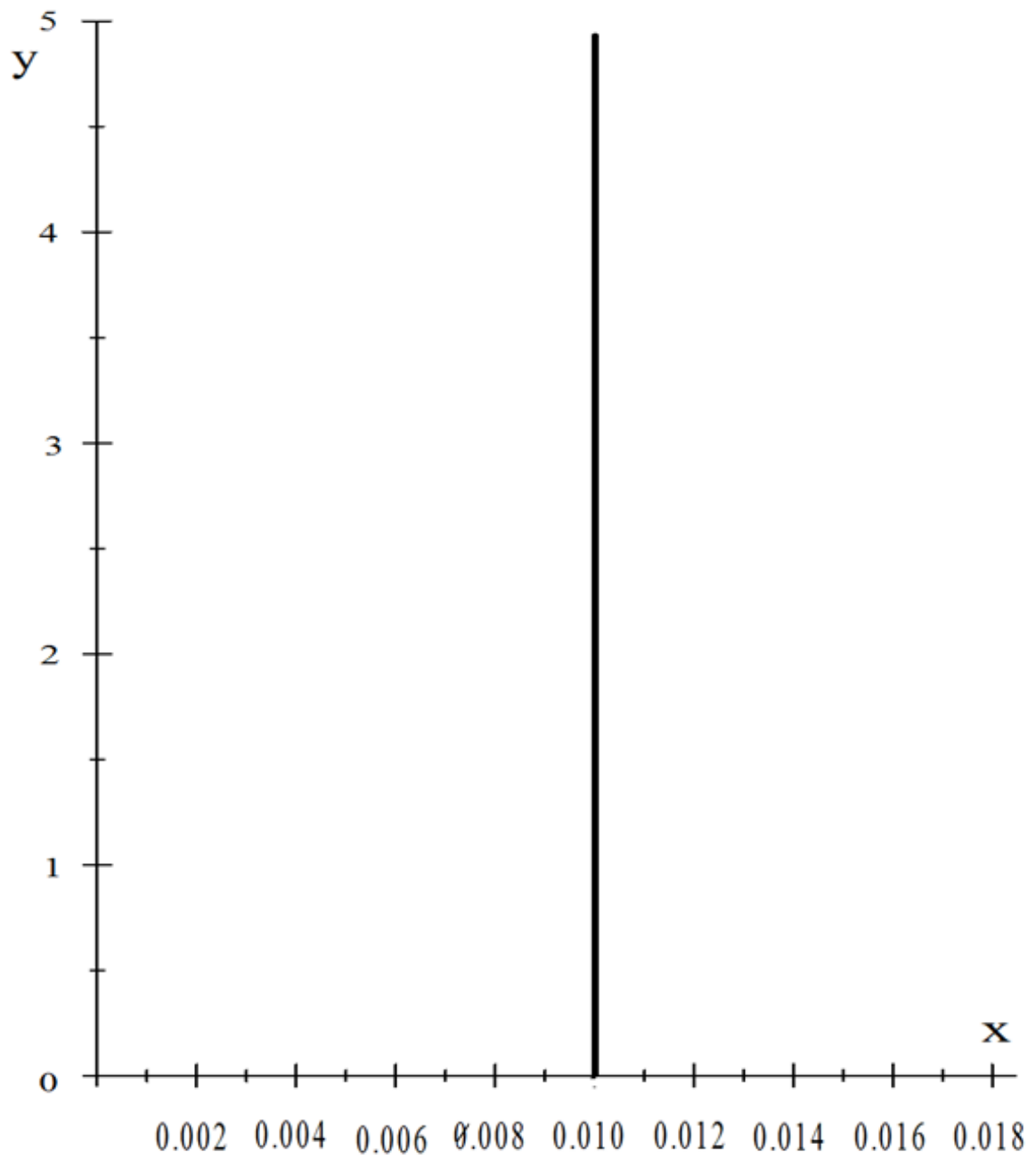


Figure :2.4 Forme de la surface libre

Chapitre 3

Traitement numérique de problème avec effet de gravité

3.1 Résumé

Dans ce chapitre on suppose que l'effet de gravité n'est pas négligeable, La solution analytique de problème considéré est difficile, Dans ce cas, on s'intéresse la traitement numérique de ce problème pour plus détail voir [2], [4], [5], [7], [9], [10], [12], [16] et [17] . Nous avons besoin d'un concept d'analyse dimensionnelle qui l'étudie de la forme générale des équations régissant un phénomène physique. Elle s'intéresse aux dimensions des variables intervenant dans les équations scientifiques. La propriété d'homogénéité des équations, c'est-à-dire leur indépendance par rapport au système d'unité, permet, à partir des relations entre les variables dimensionnelles de former un système équivalent de variables sans dimensions qui sont des produits des précédentes. Cette opération permet de réduire le nombre de variables décrivant le problème physique en ne considérant que des paramètres adimensionnels (figure 3.1).

3.2 Formulation générale du problème

Dans cette section on note les variables avec tilde ($\tilde{\sim}$) les variables de dimensions physiques et les variables sans tilde (\sim) sont des variables sans dimensions. Nous supposons que l'écoulement est potentiel et irrotationnel dans plan bidimensionnelle et le fluide est incompressible et non visqueux devant un mur de longueur \tilde{L} . On choisie la vitesse de

l'écoulement s'approche de la vitesse uniforme \tilde{U} et l'élévation du fluide est \tilde{H} quand x tends vers l'infini. On utilisons la transformation de Schwarz-Christoffel pour transforme le plan variable $\tilde{z}(\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y})$ à la plans de $\tilde{f}(\tilde{f} = \tilde{\varphi} + i\tilde{\psi})$ tels que les point A,B,C et D dans le plan \tilde{z} se transforment aux points $-\infty, -2, 0$ et $+\infty$ dans le plan \tilde{f} (voir figure 3.2)

Le but du problème consiste à déterminer la fonction complexe $\tilde{\varphi}(\tilde{z})$ telle que :

$$\begin{cases} \Delta\tilde{\varphi} = 0 \\ \tilde{v} = 0 \quad \text{sur } AB \\ \tilde{u} = 0 \quad \text{sur } BC \end{cases}$$

la condition de Bernoulli sur la surface libre est donnée par :

$$\frac{1}{2}\tilde{q}^2 + g\tilde{y} = \frac{1}{2}\tilde{U}^2 + g\tilde{H} = \text{const} \quad \text{sur } CD \quad (3.1)$$

où $\tilde{q} = \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}$ le module du vecteur de vitesse, g est l'accélération de gravité et \tilde{H} est la profondeur du fluide à l'infini.

Avant de résoudre le problème, nous allons écrire l'équation (3.1) en variables non dimensionnelles, pour cela, on choisi \tilde{H} comme unité de longueur et \tilde{U} comme unité de vitesse et on pose :

$$\begin{cases} \frac{\tilde{q}}{\tilde{U}} = q \\ y = \frac{\tilde{y}}{\tilde{H}} \end{cases} \quad (3.2)$$

En substituant (3.2) dans (3.1) on trouve :

$$\frac{1}{2}(\tilde{U}q)^2 + g(y\tilde{H}) = \frac{1}{2}\tilde{U}^2 + g\tilde{H} = \text{const} \quad (3.3)$$

L'équation de Bernoulli (3.3) devient alors :

$$q^2 + \frac{2}{F^2}(y - 1) = 1 \quad (3.4)$$

telle que :

$$F = \frac{\tilde{U}}{\sqrt{g\tilde{H}}}$$

où g est l'accélération de gravité, \tilde{U} et \tilde{H} sont respectivement la vitesse et la profondeur du fluide à l'infini.

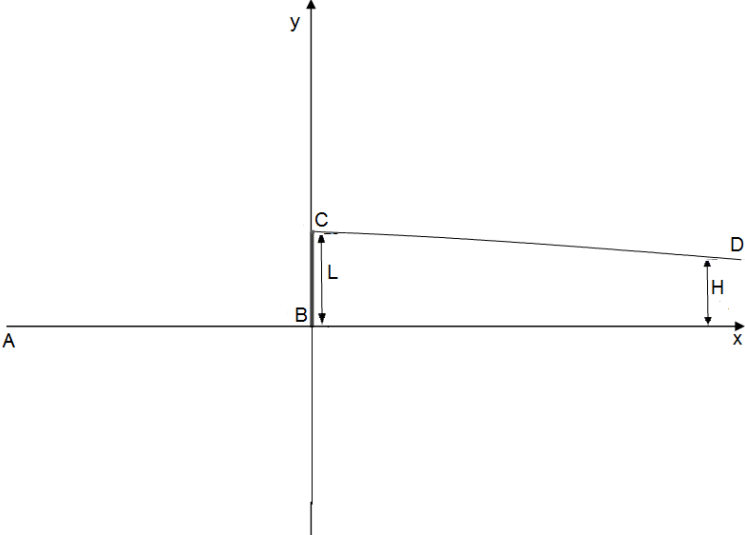


Figure :3.1 Plan de la variable z

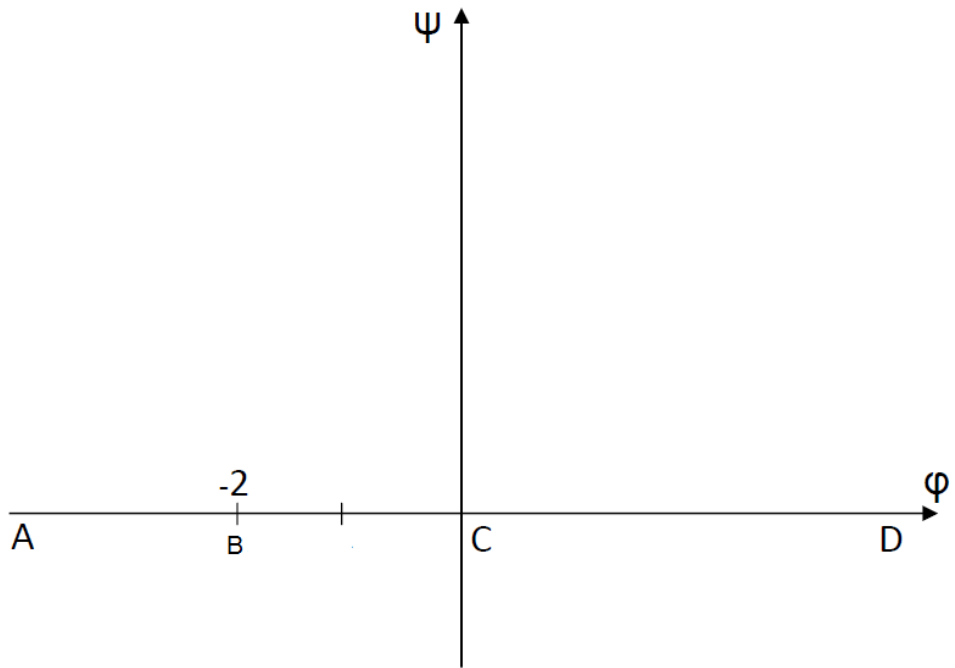


Figure :3.2 Plan de la variable f

3.3 Résolution numérique

Résumé : Dans cette section on utilise la technique de Vanden-Broeck et Keller pour résoudre le problème présent numériquement. On note par $\xi = u - iv$, comme $u - iv$ est analytique, on définit la fonction $\tau - i\theta$ par la relation

$$\xi = u - iv = e^{\tau - i\theta}$$

où θ désigne l'angle entre le vecteur vitesse et l'horizontale.

L'équation (3.4) en variable τ et θ sur la ligne de courant libre CD s'écrit alors :

$$e^{2\tau} + \frac{2}{F^2}(y - 1) = 1 \quad \text{sur } \psi = 0 \quad (3.5)$$

De plus de la relation $\xi = u - iv = e^{\tau - i\theta}$ on tire :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = u = e^\tau \cos \theta \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v = e^\tau \sin \theta \end{cases} \quad (I)$$

Nous cherchons $\xi(\tau, \theta)$ qui vérifie l'équation (3.5) avec les conditions (I). Ce qui termine la formulation du problème.

Cette technique se divise en quatre étapes :

3.3.1 Première étape

On transforme le domaine occupé par le fluide dans le plan f (figure 3.2), au quart de disque unité supérieur du plan de la variable t (figure 3.3) par la transformation suivante :

$$f = \frac{2}{\pi} \log \frac{2t}{t^2 + 1} \quad (3.6)$$

la surface libre CD est transformée sur le quart du cercle (figure 3.3) et les parois rigides sur les rayons du disque. Les points de la surface libre dans le plan t sont donnés par la relation :

$$t = |t|e^{i\sigma} = e^{i\sigma} \quad \text{tel que } 0 \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2} \quad (3.7)$$

et dans le plan f par :

$$f = \varphi \quad \text{ou} \quad -\infty \leq \varphi \leq \infty \quad \text{sur } CD$$

Les point A,B,C et D dans le plan f se transforment respectivement aux points $t_A = 0$, $t_B = e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1}$, $t_C = 1$ et $t_D = 1$ dans le plan t (figure3.3).

en substituant (3.7) dans l'équation (3.6) on trouve :

$$f = \varphi = \frac{2}{\pi} \log \frac{2e^{i\sigma}}{e^{2i\sigma} + 1} = -\frac{2}{\pi} \log(i\sigma) \quad \text{sur } CD$$

alors

$$\frac{df}{d\sigma} = \frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{-2i}{\pi} \tanh(i\sigma) = \frac{2}{\pi} \tan \sigma$$

donc

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = \frac{\pi}{2} \cot \sigma \quad \text{sur } CD \quad (3.8)$$

d'autre part on a :

$$\frac{dy}{d\varphi} = e^{-\tau} \sin \theta$$

On dérive l'équation (3.5) par rapport à σ on trouve :

$$\frac{d}{d\sigma}(e^{2\tau}) + \frac{2}{F^2} \frac{dy}{d\sigma} = 0 \quad \text{sur } AD \quad (3.9)$$

En utilisant la relation suivant :

$$\frac{\partial y}{\partial \sigma} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = \frac{2}{\pi} \tan \sigma e^{-\tau} \sin \theta$$

L'équation (3.9) devient :

$$\frac{d}{d\sigma}(e^{2\tau}) - \frac{4}{\pi} \tan \sigma \frac{1}{F^2} \times e^{-\tau} \sin \theta = 0 \quad \text{sur } \psi = 0 \quad (3.10)$$

Puisque $\xi(t) = \exp(\tau(t) - i\theta(t))$ est analytique partout sauf aux points singuliers B et C, une étude nécessaire ces points est indispensable.

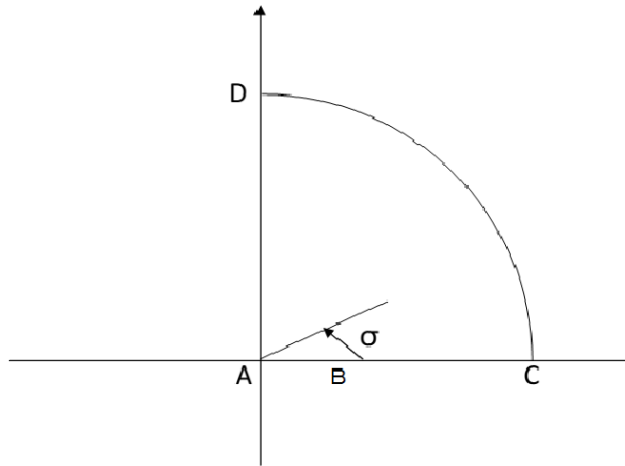


Figure :3.3 Plan de la variable t

3.3.2 Deuxième étape

Comme nous le savons la transformation f est conforme sauf aux points A, B, C et D. Les points singuliers dans le plan de l'écoulement réel z sont : $z_B = 0$ et $z_C = i$ qui correspondent respectivement aux points $t = t_B = e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1}$ et $t = t_C = 1$ dans le plan t .

Comportement asymptotique au voisinage de $t = e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1}$

L'écoulement au voisinage de $t = t_B = e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1}$ est un écoulement dans un angle de $\frac{\pi}{2}$, dans le plan z au voisinage de $z_B = 0$ la fonction complexe f est donnée par :

$$f(z) \sim \frac{a}{2}z^2 - 2 \quad \text{quand } z \longrightarrow 0 \quad (3.11)$$

ce qui donne

$$z^2 \sim \frac{2}{a}(f + 2) \quad \text{lorsque } f \longrightarrow 0 \quad (3.12)$$

On remplace l'équation donnée dans (3.6) dans l'expression ci-dessus on trouve :

$$z^2 \sim \left(\frac{2}{a}\right) \left(\frac{2}{\pi} \log \frac{2t}{t^2 + 1} + 2\right) \sim \frac{4}{a\pi} \left(\log e^\pi \frac{2t}{t^2 + 1} + 2\right) \quad t \longrightarrow e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1}$$

puisque

$$\log e^\pi \frac{2t}{t^2 + 1} \sim \left(t - \left(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1}\right)\right)^2 + 0(t - t_B)^3 \quad t \longrightarrow e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1}$$

et comme

$$(t - t_B) \sim \left(t^2 - \left(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1}\right)^2\right) \quad t \longrightarrow e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1}$$

on peut écrire alors

$$z \sim \left(\frac{4}{a\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(t^2 - \left(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1}\right)^2\right) \quad t \longrightarrow e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1}$$

comme $\xi = \frac{df}{dz} = az$ ce qui donne :

$$\xi \sim az \quad \text{lorsque } z \longrightarrow 0$$

i.e

$$\xi \sim a \left(\frac{4}{a\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(t^2 - \left(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1}\right)^2\right) \quad t \longrightarrow e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1}$$

c'est-à-dire

$$\xi \sim 0 \left(t^2 - \left(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1}\right)^2\right) \quad t \longrightarrow e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1} \quad (3.13)$$

Comportement asymptotique au voisinage de $t = t_C$

La configuration de l'écoulement autour du point $t = t_C = 1$ est la même qu'au point $z_C = i$, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent lorsque la tension de ($T=0$), l'angle de séparation entre la surface libre et la paroi rigide surface est négligeable $\gamma = \pi$. Dans le cas où ($T \neq 0, \gamma \neq \pi$) et en ce point de séparation, nous avons un écoulement autour d'un angle $\gamma > \pi$ où l'écoulement est caractérisé par la fonction potentielle suivante :

$$f \sim \frac{a}{n}(z - z_C)^n \quad \text{lorsque } z \longrightarrow z_C \quad (3.14)$$

où $z_C = i$ et $n = \frac{\pi}{\gamma}$

Alors

$$\xi = \frac{df}{dz} \sim a(z - z_C)^{n-1} \quad \text{lorsque } z \longrightarrow z_C \quad (3.15)$$

puisque sur la surface libre $\psi = 0$ alors :

$$f = \varphi = \frac{2}{\pi} \log \frac{2t}{t^2 + 1} \quad \text{sur } CD \quad (3.16)$$

de l'équation (3.14) et (3.16) on tire :

$$z - z_C \sim \left(\frac{2}{a\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\pi}} \left(\log \frac{2t}{t^2 + 1}\right)^{\frac{\gamma}{\pi}} \quad \text{quand } z \longrightarrow z_C \quad (3.17)$$

En substituant (3.17) dans (3.15) on trouve :

$$\xi \sim a \left[\left(\frac{2}{a\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\pi}} \left(\log \frac{2t}{t^2 + 1}\right)^{\frac{\gamma}{\pi}} \right]^{\frac{\gamma}{\pi}-1} \quad \text{quand } t \longrightarrow 1$$

puisque

$$\log \frac{2t}{t^2 + 1} \sim (t - 1)^2 + 0((t - 1)^3) \quad t \longrightarrow 1$$

alors :

$$\xi \sim a \left[\frac{2}{a\gamma} \right]^{1-\frac{\gamma}{\pi}} (t - 1)^{2(1-\frac{\gamma}{\pi})} \quad \text{quand } t \longrightarrow 1$$

c'est-à-dire comportement de l'écoulement au voisinage du point de séparation s'écrit :

$$\xi \sim 0((t - 1)^{2(1-\frac{\gamma}{\pi})}), \quad \text{quand } t \longrightarrow 1 \quad (3.18)$$

3.3.3 Troisième étape

Après avoir déterminé le comportement local de l'écoulement au voisinage des singularités $t = t_B = e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1}$, $t = t_C = 1$, on cherche $\xi(t)$ sous la forme :

$$\xi = g(t) \exp \Omega(t) \quad (3.19)$$

où $g(t)$ contient les singularités et les zéros donnés en (3.13), (3.18). En utilisant les conditions aux limites (3.5) et les relations (3.13) et (3.18), l'équation (3.19) devient alors :

$$\xi = u - iv = (t^2 - (e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2) \times (1 - t)^{2(1-\frac{\gamma}{\pi})} \times \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{2k} \right) \quad (3.20)$$

où les coefficients a_k et la constante γ sont à déterminer, la série doit être convergente dans le quart de disque unité du plan t . Il est facile de vérifier que les conditions $u = 0$ sur AO et $v = 0$ sur OB sont satisfaites, On choisit tous les a_k et γ des réelles. En substituant (3.7) dans (3.20) on obtient :

$$\begin{aligned} \xi = e^{\tau - i\theta} &= \left(1 + (e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^4 - 2(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 \cos 2\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \times e^{iK} \times \left(2 \sin \frac{\sigma}{2} \right)^{2(1-\frac{\gamma}{\pi})} \\ &\times \exp \left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos 2(k-1)\sigma + i(-\pi + \sigma) \times \left(1 - \frac{\gamma}{\pi} \right) + i \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin 2(k-1)\sigma \right) \end{aligned}$$

tel que :

$$K = \tan^{-1} \frac{-\sin 2\sigma}{(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 - \cos 2\sigma}$$

En conséquence :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(\sigma) = \left[(-\pi + \sigma) \times \left(\frac{\gamma}{\pi} - 1 \right) - \tan^{-1} \frac{-\sin 2\sigma}{(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 - \cos 2\sigma} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin 2(k-1)\sigma \right] \\ e^{\tau(\sigma)} = \left(1 + (e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^4 - 2(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 \cos 2\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \times (2 \sin \frac{\sigma}{2})^{2(1-\frac{\gamma}{\pi})} \\ \times \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2(k-1)\sigma \right) \end{array} \right. \quad (3.21)$$

Pour exprimer l'équation de Bernoulli en terme de σ , on remplace $\tau(\sigma)$ et $\theta(\sigma)$ par leurs valeurs dans l'équation (3.10) on trouve :

$$\begin{aligned}
& 2 \left[\frac{-4(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 \sin 2\sigma}{(1 + (e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^4 - 2(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 \cos 2\sigma) - (\sum_{k=1}^{\infty} 4a_k(k-1) \sin 2(k-1)\sigma)} + 4(1 - \frac{\gamma}{\pi})(\frac{1}{2} \cot \frac{\sigma}{2}) \right] \\
& \left[(1 + (e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^4 - 2(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 \cos 2\sigma) \times (2 \sin \frac{\sigma}{2})^{4(1 - \frac{\gamma}{\pi})} \right] \\
& \times \exp(\sum_{k=1}^{\infty} 2a_k \cos 2(k-1)\sigma) \\
& - \frac{4}{\pi} \tan \sigma \frac{1}{F^2} \left[(1 + (e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^4 - 2(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 \cos 2\sigma)^{\frac{1}{2}} \times (2 \sin \frac{\sigma}{2})^{2(1 - \frac{\gamma}{\pi})} \right] \\
& \times \exp(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2(k-1)\sigma) \\
& \times \sin \left[\begin{aligned} & (-\pi + \sigma) \times (\frac{\gamma}{\pi} - 1) - \tan^{-1} \frac{-\sin 2\sigma}{(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 - \cos 2\sigma} \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin 2(k-1)\sigma \end{aligned} \right] = 0 \quad (3.22)
\end{aligned}$$

Pour déterminer les coefficients a_k de la série ci-dessus et l'angle γ . On tronque la série donnée dans (3.19) après N termes. On trouve les N coefficients a_k et l'angle des séparation γ par collocation, ainsi, on discrétise l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ en N points, on pose :

$$\sigma_I = \frac{\pi}{2N} \left(I - \frac{1}{2} \right), I = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.23)$$

En satisfaisant l'équation (3.22) en des points de collocation (3.23) on obtient un système de N équations algébriques non linéaires à (N-1) inconnus a_1, a_2, \dots, a_{N-1} et γ . C'est-à-dire

$$\begin{aligned}
& 2 \left[\frac{-4(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 \sin 2\sigma_I}{(1 + (e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^4 - 2(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 \cos 2\sigma_I)} + 4(1 - \frac{\gamma}{\pi})(\frac{1}{2} \cot \frac{\sigma_I}{2}) \right] \\
& \left[\frac{-\left(\sum_{k=1}^{N-1} 4a_k(k-1) \sin 2(k-1)\sigma_I\right)}{(1 + (e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^4 - 2(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 \cos 2\sigma_I) \times (2\sin \frac{\sigma_I}{2})^{4(1-\frac{\gamma}{\pi})}} \right] \\
& \left[\frac{\times \exp\left(\sum_{k=1}^{N-1} 2a_k \cos 2(k-1)\sigma_I\right)}{(1 + (e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^4 - 2(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 \cos 2\sigma_I)^{\frac{1}{2}} \times (2\sin \frac{\sigma_I}{2})^{2(1-\frac{\gamma}{\pi})}} \right] \\
& - \frac{4}{\pi} \tan \sigma_I \frac{1}{F^2} \left[\frac{\times \exp\left(\sum_{k=1}^{N-1} a_k \cos 2(k-1)\sigma_I\right)}{(-\pi + \sigma_I) \times \left(\frac{\gamma}{\pi} - 1\right) - \tan^{-1} \frac{-\sin 2\sigma_I}{(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 - \cos 2\sigma_I}} \right] \\
& \times \sin \left[\frac{-\sum_{k=1}^{N-1} a_k \sin 2(k-1)\sigma_I}{(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 - \cos 2\sigma_I} \right] = 0 \quad (3.24)
\end{aligned}$$

où $I=1, 2, \dots, N$

Pour calculer les coefficients a_k et l'angle γ pour différentes valeurs du nombre de Froude F , on utilise la méthode de Newton et l'algorithme de Jordan avec pivot total implicite .

3.3.4 Quatrième étape

Pour déterminer la forme de la surface libre, on utilise la relation suivante :

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} + i \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{1}{u - iv} = e^{-\tau + i\theta}$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = e^{-\tau} \cos \theta \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} = e^{-\tau} \sin \theta \end{cases} \quad (3.25)$$

avec $\frac{\partial x}{\partial \sigma} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}$ et $\frac{\partial y}{\partial \sigma} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}$ sur la surface libre.

En substituant (3.7), (3.21) et en utilisant (3.25) on trouve $\frac{\partial x}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial y}{\partial \sigma}$ en chaque point de

collocation σ_I i.e.,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial \sigma}(\sigma_I) = \frac{2}{\pi} \times \tan \sigma \times (1 + (e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^4 - 2(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 \cos 2\sigma_I)^{-\frac{1}{2}} \\ \times \exp \left(- \sum_{k=1}^{N-1} a_k \cos 2(k-1)\sigma_I \right) \times (2 \sin \frac{\sigma_I}{2})^{2(\frac{\gamma}{\pi}-1)} \\ \times \cos \left[(-\pi + \sigma) \times (\frac{\gamma}{\pi} - 1) - \tan^{-1} \frac{-\sin 2\sigma}{(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 - \cos 2\sigma} - \sum_{k=1}^{N-1} a_k \sin 2(k-1)\sigma_T \right] \\ \frac{\partial y}{\partial \sigma}(\sigma_I) = \frac{2}{\pi} \times \tan \sigma \times (1 + (e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^4 - 2(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 \cos 2\sigma_I)^{-\frac{1}{2}} \\ \times \exp \left(- \sum_{k=1}^{N-1} a_k \cos 2(k-1)\sigma_I \right) \times (2 \sin \frac{\sigma_I}{2})^{2(\frac{\gamma}{\pi}-1)} \\ \times \sin \left[(-\pi + \sigma) \times (\frac{\gamma}{\pi} - 1) - \tan^{-1} \frac{-\sin 2\sigma}{(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 - \cos 2\sigma} - \sum_{k=1}^{N-1} a_k \sin 2(k-1)\sigma_T \right] \end{array} \right. \quad (3.26)$$

où $I=1, 2, \dots, N$

Ainsi, la forme de la surface libre est obtenue en intégrant numériquement les relations ci-dessus avec la condition initiale $x(1) = 0$ et $y(1) = 0$. Les résultats présentés ici sont obtenus pour $N = 50$.

3.4 Résultats et discussion

3.4.1 Solution sans effet de gravité

lorsque le nombre de Froude F tend vers l'infini, l'effet de gravité tend vers zéro, le système (3.24) se réduit à :

$$2 \left[\begin{array}{l} \frac{-4(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 \sin 2\sigma_I}{(1 + (e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^4 - 2(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 \cos 2\sigma_I)} + 4(1 - \frac{\gamma}{\pi})(\frac{1}{2} \cot \frac{\sigma_I}{2}) \\ - \left(\sum_{k=1}^{N-1} 4a_k(k-1) \sin 2(k-1)\sigma_I \right) \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{l} (1 + (e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^4 - 2(e^\pi - \sqrt{e^{2\pi} - 1})^2 \cos 2\sigma_I) \times (2 \sin \frac{\sigma_I}{2})^{4(1-\frac{\gamma}{\pi})} \\ \times \exp \left(\sum_{k=1}^{N-1} 2a_k \cos 2(k-1)\sigma_I \right) \end{array} \right] = 0 \quad (3.27)$$

où $I = 1, 2, \dots, N$ et σ_I sont données par la relation (3.23).

Nous utilisons les méthodes de résolutions décrites ci-dessus, on trouve a_k et γ . Le tableau ci-dessous montre quelques valeurs de a_k et γ de la série (3.28) pour $F \rightarrow \infty$

γ	a_1	a_2	a_{10}	a_{20}	a_{30}	a_{40}	a_{50}
$\frac{3\pi}{2}$	7.4237	-1.0723	-7.4432	-1.5173	-2.2583	-2.954210 ³	-3.6354
	$\times 10^0$	$\times 10^2$	$\times 10^2$	$\times 10^3$	$\times 10^3$	$\times 10^3$	$\times 10^3$
π	-4.8358	4.8393	4.8381	4.8355	4.8323	4.8296	4.8282
	$\times 10^2$	$\times 10^2$	$\times 10^2$	$\times 10^2$	$\times 10^2$	$\times 10^2$	$\times 10^2$

Tableau.1. quelques valeurs des coefficients a_k et l'angle de séparation γ pour $F \rightarrow \infty$.

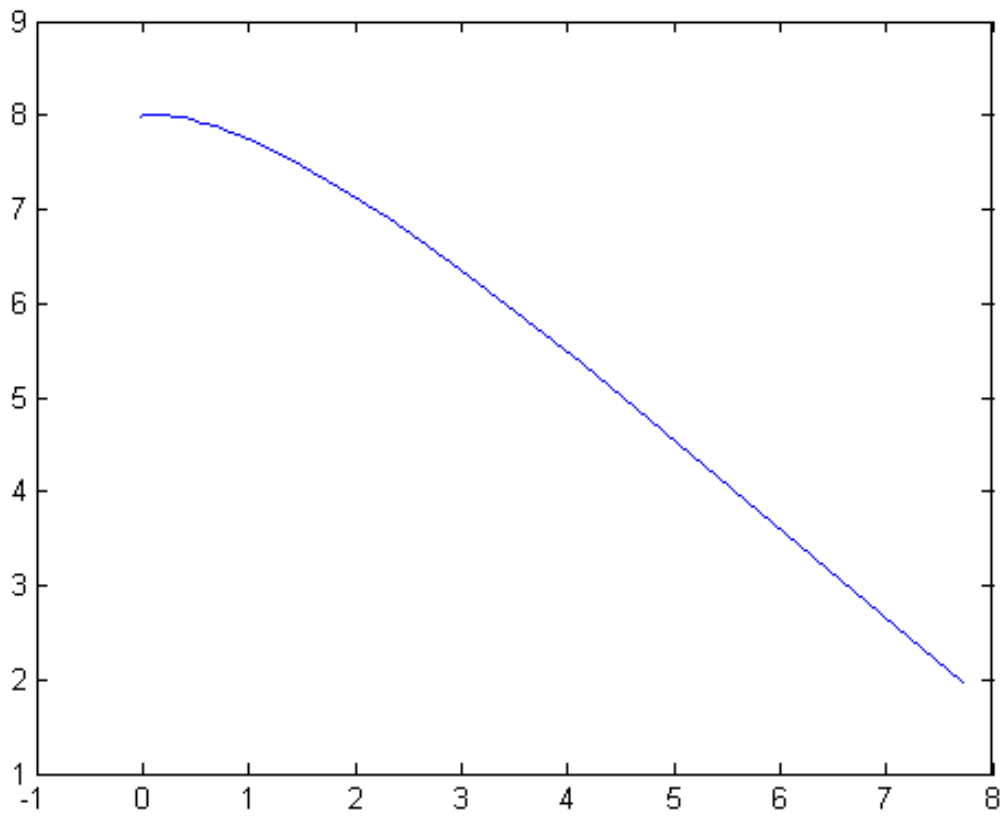


Figure :3.4 Forme de la surface libre pour $F \rightarrow \infty$ et $\gamma = \frac{3\pi}{2}$.

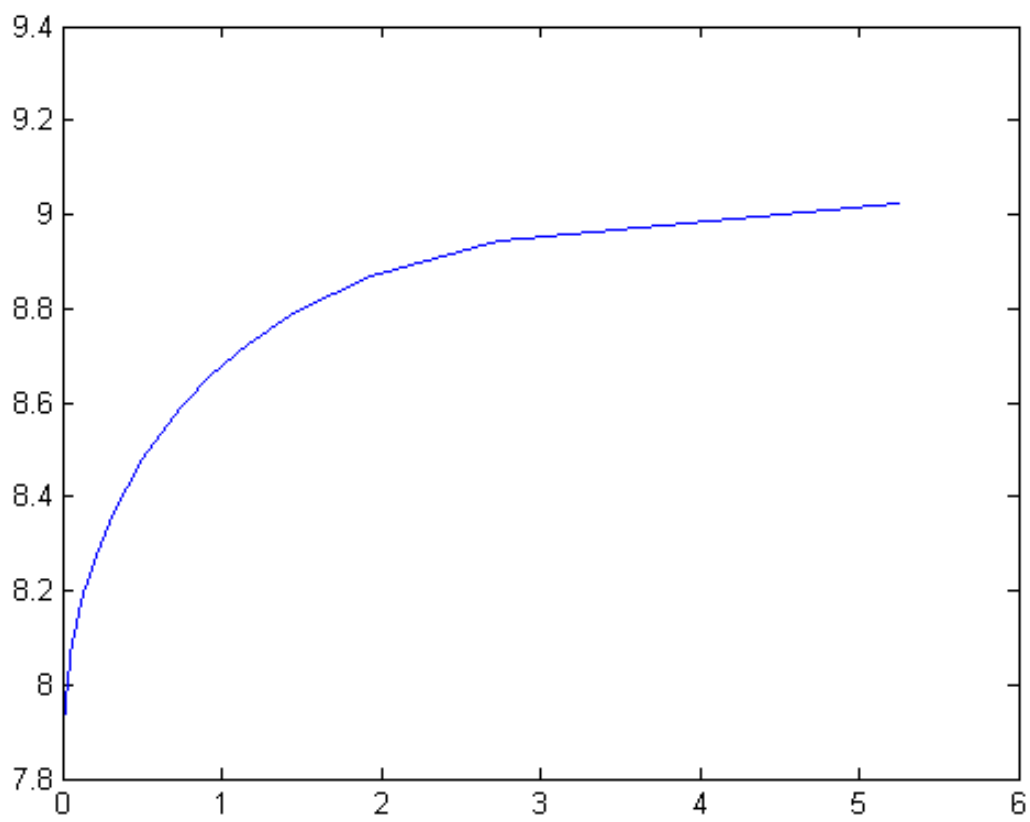


Figure 3.5 Forme de la surface libre pour $F \rightarrow \infty$ et $\gamma = \pi$.

3.4.2 Solution avec effet de gravité

On utilise la méthode numérique décrite précédemment pour résoudre le système non linéaire (3.22) pour différentes valeurs du nombre de Froude F . On trouve pour chaque valeur de F les coefficients a_k de la série (3.24), le tableau ci-dessus présente quelques valeurs de a_k en fonction du nombre de Froude F .

F	γ	a_1	a_2	a_{10}	a_{20}	a_{30}	a_{40}	a_{50}
10000	$\frac{3\pi}{2}$	7.4237 $\times 10^0$	-1.072 $\times 10^2$	-7.443 $\times 10^2$	-1.5174 $\times 10^3$	-2.2583 $\times 10^3$	-2.9542 $\times 10^3$	-3.6354 $\times 10^3$
0001	π	-4.7868 $\times 10^{-1}$	4.9155 $\times 10^{-1}$	5.4433 $\times 10^{-1}$	6.2650 $\times 10^{-1}$	7.4764 $\times 10^{-1}$	9.6606 $\times 10^{-1}$	1.8753 $\times 10^0$
0.01	π	-6.8717 $\times 10^{-1}$	1.3302 $\times 10^{-1}$	9.7126 $\times 10^{-3}$	4.1438 $\times 10^{-3}$	2.2092 $\times 10^{-3}$	1.0347 $\times 10^{-3}$	5.2677 $\times 10^{-5}$

Tableau.2. quelques valeurs des coefficients a_k et l'angle de séparation γ pour quelques valeurs de nombre de Froude F .

Notons que dans le tableau 3 les coefficients a_k sont décroissants pour $F = 0001$ et $F = 0.01$ et que la série est uniformément et absolument convergente pour tout nombre de Froude F . En effet on a :

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} a_k t^{2(k-1)} \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty \quad k \geq 1$$

3.4.3 Conclusion

- Nous avons déterminé avec précision la forme de la surface libre au-dessus d'un obstacle. Ces résultats dépendent du paramètre de Froude F .
- Lorsque F est assez grand $F \rightarrow \infty$, l'effet de la gravité est négligeable, les conditions au bord sur la surface libre se réduisent à

$$e^{2\tau} = u^2 + v^2 = 1$$

Dans ce cas la solution du problème peut-etre obtenue explicitement en utilisant la méthode de transformation d'hodographe de Krichhoff ou les transformations conformes vue dans le chapitre 2. Les figures (3.3 et 3.4) présentent la forme de la surface libre pour $F \rightarrow \infty$.

- Les figures (3.5, 3.6 et 3.7) présentent la forme de la surface pour quelques valeurs de Froude F , ce qui montre l'influence de la gravité sur la surface libre.

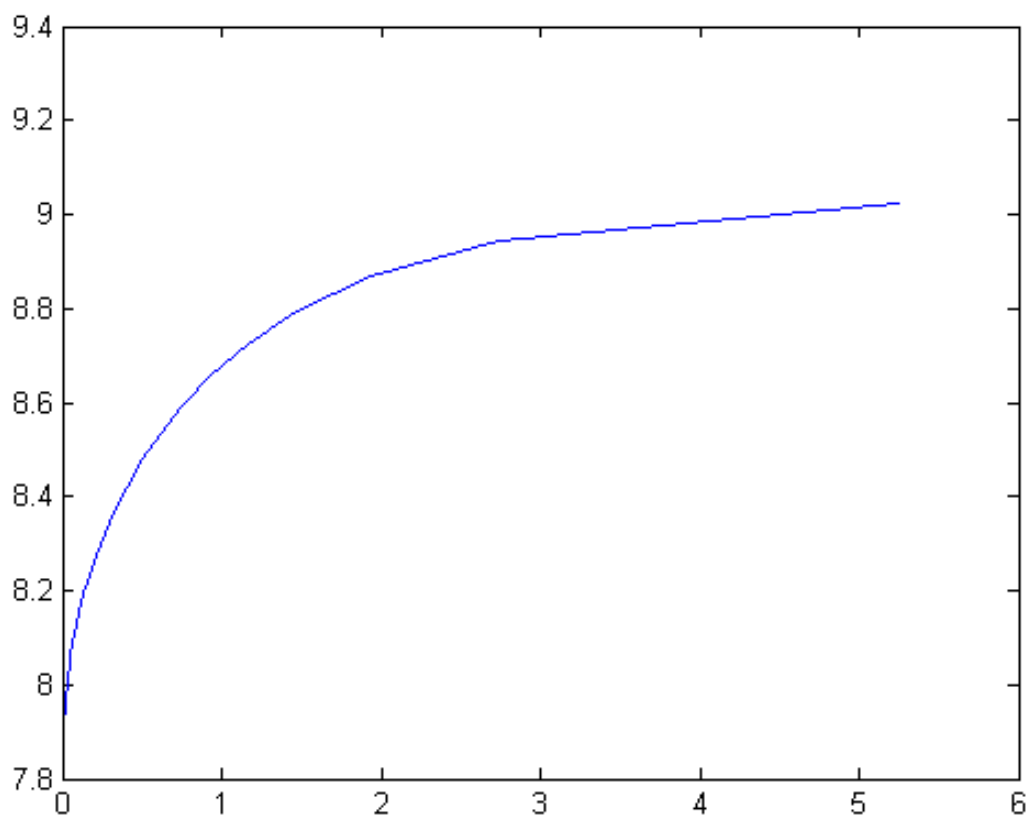


Figure :3.6 Forme de la surface libre pour $F = 0.01$ et $\gamma = \pi$.

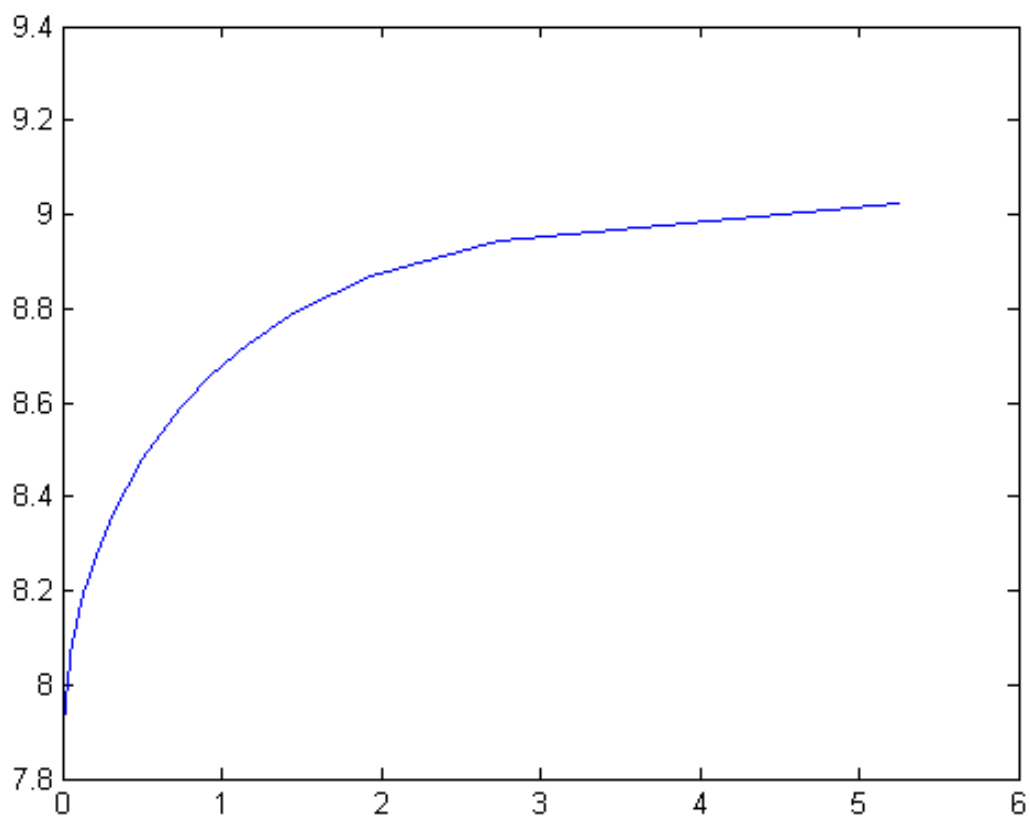


Figure :3.7 Forme de la surface libre pour $F = 1$ et $\gamma = \pi$.

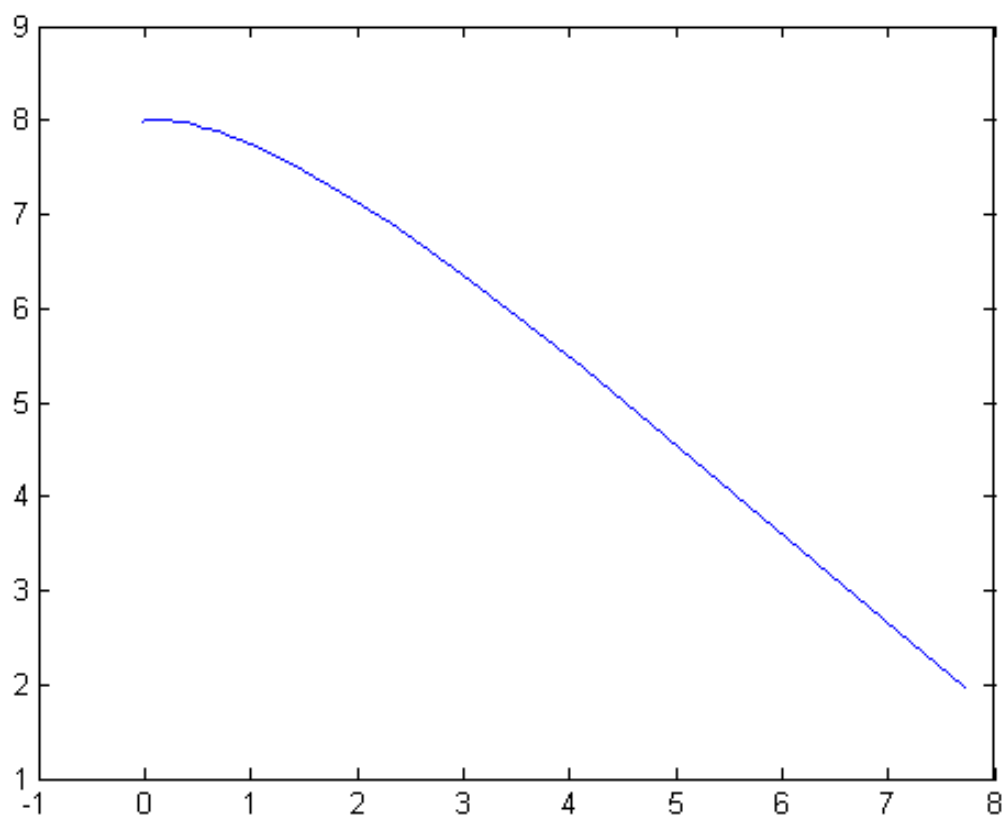


Figure3.8 Forme de la surface libre pour $F = 10000$ et $\gamma = \frac{3\pi}{2}$.

Conclusion

Dans ce travail on se propose d'étudier l'effet de la gravité sur un jet bidimensionnel d'un fluide au dessus des obstacles. Le fluide est supposé non visqueux et incompressible et l'écoulement est irrotationnel.

Les objectifs principaux de ce travail est de donner une formulation mathématiques à ce problème pour quelques configurations possibles de l'objet, de chercher la solution dans chaque cas en utilisant les deux méthodes, la technique de troncation de la série et la méthode intégral-différentielle et d'étudier l'influence de la tension de surface sur la forme du jet.

Nous avons déterminé avec précision la forme de la surface libre au-dessus d'un obstacle. Ces résultats dépendent du paramètre de Froude F . L'effet de la gravité est négligeable Lorsque $F \rightarrow \infty$.

Annexe A

Méthode de Newton pour la résolution de systèmes non linéaires

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

où f_1, f_2, \dots, f_n sont des fonctions non linéaires. En posant $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ et $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, le système (A.1) peut s'écrire sous la forme compacte

$$f(X) = 0. \quad (\text{A.2})$$

Pour étendre la méthode de Newton au cas d'un système, on remplace la dérivée de la fonction scalaire f par la matrice jacobienne J_f de la fonction vectorielle f dont les coefficients sont, par définition,

$$(J_f)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

la méthode de Newton (A.2) s'écrit alors : étant donné $X^{(0)} \in \mathbb{R}$, pour $k = 0, 1, \dots$, jusqu'à convergence

$$\left| \begin{array}{l} \text{rsoudre } J_f(X^{(k)})\delta X^{(k)} = -f(X^{(k)}); \\ \text{poser } X^{(k+1)} = X^{(k)} + \delta X^{(k)} \end{array} \right| \quad (\text{A.3})$$

Bibliographie

- [1] Alfio Quarteroni, Fausto Saleri et Paola Gervasio, *Calcul Scientifique Cours, exercices corrigées et illustrations en MATLAB et Octave*, Deuxième édition , Springer.
- [2] A. Merzougui, H. Mekias et F. Guechi , *Surface tension effect on a two dimensional channel flow against an inclined wall*, *Applied Math Sciences* , vol.1,2007, no. 47, 2313 - 2326.
- [3] B.Bouderah, A.Gasmi and H.serguine , *Zero Gravity of Free-Surface Jet Flow*, *International Mathematical Forum*,2,2007,no.66,3273-3277.
- [4] Bloor, *Large amplitude surface waves* , *J.Fluid Mech.*N° 84(1978),167-179).
- [5] E. Abdelkader Gasmi, H. Mekias, *A Jet from Container and Flow past a Vertical Flat Plate in a Channel With the Surface Tension Effects*, *Applied Math Sciences*,vol.1, 2007, no. 54, 2687 - 2698.
- [6] F. Guechi, M. Khermache, *Free streamline for a flow over a step* , Ferhat Abbas University 19000, S'etif, ALGERIA.
- [7] G. Birkhoff et E. H. Zarantonello, *Jets, Wakes, And Cavities* , New-York (1957).
- [8] H.Serguine, *Numerical resolution of a non-linear problem in a field at free border due to a jet against a infinite plate.*,*Thesis of Magister University of M'sila,(2004)*.
- [9] Jean-Marc Vanden-Broeck, *The influence of surface tension on cavitating flow past a curved obstacle*, *J. Fluid. Mech.* (1983), vol.133, pp 255 - 264

- [10] King,A.C., *A note on the impact of a jet on a porous wall.*, IMA J.Appl.Maths.,N°45,(2002),139-146.
- [11] Laiadi abdelkader, *effet de la tension de surface sur des écoulements au dessus des obstacles* ,thèse magistère de universite de ouargla(2012).
- [12] M. i. Gurevich , *The Theory of Jets in an ideal fluid, International Series of Monographs in Pure and Applied Math*, vol. 93, Oxford-London (1966).
- [13] Riadh , Ben Hamoduda *Notions de Mécanique des fluides*, cours et exercices corrigés.
- [14] Roland Schinzinger et Patricio A. A. Laura, *Conformal Mapping Méthodes and applications*, Dover Publications, INC. Mineola, New York.
- [15] Sakir Amiroudine et Jean-Luc Battaglia, *Mécanique des fluides*, Dunod,Paris,2011 ISBN 978-2-10-056922-9.
- [16] S. N. hanna, *Free surface flow over a polygonal and smooth topography*, *Acta Mechanica*, Springer-Verlag, 1993, 241 - 251
- [17] W.Peng and D.F.Parker, *An ideal fluid jet impinging on an uneven wall*, *J.Fluid Mech.*N° 333(1997),231-255.
- [18] Y. f. Li, J. M. chuang et C. C. Hsiung, *Computation Nonlinear 2-D free surface flow using the Hilbert method*, *Univesity of Nova Scotia Halifax, Canada*

ملخص : الهدف من هذه الدراسة هو دراسة مسألة تدفق سائل غير قابل للانضغاط وغير لزج عبر عائق. نعتد على طريقة التحويلات المطابقة لدراسة السطح الحر للسائل .

تقنية الحل هي نفسها المعتمدة من طرف الباحثين (Vanden-Broeck et Keller).

النتائج المحصل عليها من اجل عدد فرود F .

كلمات البحث : سائل ، تدفق ، سطح حر ، عدد فرود.

Abstract

The object of this study was to study a two dimensional and irrotational flow of an incompressible and inviscid fluid over obstacle.

We adopted a method of conformal transformation which reduces the problem of discretization only on the free surface. The solution technique used by Vanden-Broeck and Keller. We computed the results for all Froude number.

Keywords : Free surface, Flow, Fluid, Froude number.

Résumé

Le présent travail port sur un problème d'écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux, passant au-dessus des obstacle. Nous adoptons une méthode des transformations conformes qui réduit le problème de discrétisation uniquement sur la surface libre.

La technique de résolution utilisée par de Vanden-Broeck et Keller. Nous avons trouvé les résultat pour chaque nombre de Froude F .

Mots-clés : Surface libre, écoulement, fluide nombre de Froude.