UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par : Laheg Naziha

Thème

Méthode d'éléments finis mixte pour les équations de Marguerre-von Kármán

Version de : 21/05/2015

Devant le jury composé de :

Mr. Chacha Djamal Ahmed	Pr. université de KASDI Merbah - Ouargla	Président
Mr. Merabet Ismail	M. C. université de KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr. Ghezal Abderrazek	M. C. université de KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Table des matières

Table de matière **1**

1 Problème mixte pour l'équation biharmonique **6**

1.1 Problème continu 7

1.2 Problème discret 7

2 Le problème continu pour les équations de Marguerre-von Kármán **10**

2.1 Le problème linéarisé 10

2.2 Le problème non linéaire 11

2.3 Le problème de Fredhölm 13

3 Le probème discret pour les équations de Marguerre-von Kármán **14**

3.1 Le problème linéarisé 14

3.2 Le problème non linéaire 18

3.3 Le problème de Fredhölm 26

4 Estimations d'erreur **28**

Bibliography **40**

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier Allah (mon Dieu), en suite mes parents, mes frères Boubaker, Yassine, Al Bachir, et mes soeurs Wafa, Nadjah, qui m'ont soutenu tout le long de ce projet.

Mes plus intenses remerciements vont à Mr. GHEZAL Abderrazek qui à d'encadrer mon travail.

Je tiens à exprimer ma gratitude aux membres du jury Mr. CHACHA DJAMAL Ahmed et Mr. MERABET Ismail pour avoir accepter de juger mon travail.

Je tiens à remercier aussi mon professeur GURFI Amara et voudrais également remercier tous les membres du département de mathématiques et tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin pour achever ce travail.

Merci, en fin à toutes mes amies Imane, Mebarka, Safa, Noudjoude, et à toutes celles qui m'ont aidé ou soutenu au cours de ce travail en particulier.

Notations

- $\Delta^2\zeta$: L'opérateur bi-laplacien.
- ϕ : Fonction d'Airy.
- ζ : Le déplacement.
- λ : Valeur propre simple réelle.
- $\omega \subset \mathbb{R}^2$: Un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$.
- γ : La frontière de ω.
- $\theta \in H^2(\omega)$: Une fonction définie la surface moyenne de la coque.
- $L^p(\omega)$: Les espaces de Lebesgue pour $1 \leqq p \leqq +\infty$.
- $H^m(\omega)$: Les espaces de Sobolev.
- $|.|_{0,p,\omega}$: La norme dans $L^p(\omega)$ et $|.|_{0,\omega}$: La norme dans $L^2(\omega)$.
- $\|.\|_{m,\omega}$ et $|.|_{m,\omega}$: La norme et la semi norme habituelles dans $H^m(\omega)$.
- $M_h\zeta_h$: L'analogue discret du tenseur de dérivées secondes.
- L : Opérateur linéaire continu.
- L_h : Opérateur linéaire discret.

Introduction

Les équations de von Kármán, qui constituent un système d'équations non linéaires de quatrième ordre, ont été proposées par von Kármán [11] en 1910. Les équations classiques de Marguerre-von Kármán pour les coques peu profonde non linéairement élastique, soumis à des conditions aux limites analogues à celles d'une plaque de von Kármán. Elles ont été initialement proposé par Marguerre [3] et de von Kármán et Tsien [10], et justifié plus tard par Ciarlet et Paumier [6] au moyen d'une analyse asymptotique formelle. Dans ce travail on s'intéresse au calcul des branches de bifurcation (à partir de la solution triviale $\zeta = 0$) des équations de Marguerre-von Kármán, ces équations, qui sont un modèle pour le flambage d'une coque peu-profonde par des forces latérales. Nous allons considérer ici l'application d'une méthode d'éléments finis mixte pour ce problème. Nous démontrons la convergence de la méthode et nous obtenons des estimations d'erreur.

Le premier chapitre est consacré à la formulation mixte pour l'équation biharmonique due à Miyoshi [9], et à un bref rappel des résultats préliminaires utilisés par la suite.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions le problème de la bifurcation pour les équations de Marguerre-von Kármán, dans le cas continu. On traite le problème linéarisé, non linéaire continu et l'algorithme pour le problème non linéaire continu. On donne également dans ce chapitre le problème continu de l'alternative de Fredhölm, qui joue un rôle important dans les estimations d'erreur.

Dans le troisième chapitre, on va étudier le problème discret pour le problème du chapitre 2, on traite le probléme linéarisé et non linéaire discret et on démontre l'existence

et l'unicite de la solution, et l'algorithme pour le problème non linéaire discret. On donne également dans ce chapitre le problème discret de l'alternative de Fredhölm, qui joue un rôle important dans les estimations d'erreur.

Au dernier chapitre, on va donner les estimations d'erreur et quelques remarques importantes.

Chapitre 1

Problème mixte pour l'équation biharmonique

Ce chapitre est consacré à la formulation mixte pour l'équation biharmonique, et à un bref rappel des résultats préliminaires utilisés par la suite.

Soit ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière γ est suffisamment régulière (Lipschitzienne). Soit $f \in L^2(\omega)$ une fonction donnée. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta^2 \zeta = f & \text{dans } \omega, \\ \zeta = \partial_\nu \zeta = 0 & \text{sur } \gamma. \end{cases} \tag{1.1}$$

La formulation faible dans $H_0^2(\omega)$ de (1.1) est équivalente à la formulation mixte suivante :

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} \text{Trouver } \ (\sigma,\ \zeta) \in \Sigma \times V \text{ tel que} \\ \forall \tau \in \Sigma,\ a(\sigma,\ \tau) + b(\tau,\ \zeta) = 0, \\ \forall \upsilon \in V,\ -b(\sigma,\ \upsilon) = \int_\omega f \upsilon \ dx, \end{cases} \tag{1.2}$$

où

$\Sigma = \{\sigma = (\sigma_{ij}) \in (L^2(\omega))^4 | \sigma_{12} = \sigma_{21}\} = (L^2(\omega))^4_s$, $V = H_0^2(\omega)$ et $\ i, j = \overline{1,2}$
et (avec la convention de sommation sur les indices répétés) :

$$\forall \sigma,\ \tau \in \Sigma,\ a(\sigma,\ \tau) = \int_\omega \sigma_{ij} \tau_{ij} \ dx, \tag{1.3}$$

$$\forall \sigma \in \Sigma,\ \upsilon \in V,\ b(\sigma,\ \upsilon) = -\int_\omega \sigma_{ij} \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x_i \partial x_j}\ dx. \tag{1.4}$$

Ce problème admet une solution unique et pour $f \in L^2(\omega)$ on a $\zeta \in H^3(\omega) \cap H_0^2(\omega)$ et $\sigma_{ij} = \partial^2\zeta/\partial x_i \partial x_j \in H^1(\omega)$.

1.1 Problème continu

Grâce au résultat de régularité, la solution unique du problème (P) est aussi solution du problème suivant :

$$(\widetilde{P}) \begin{cases} \text{Trouver } \ (\sigma,\ \zeta) \in \widetilde{\Sigma} \times \widetilde{V} \text{ tel que} \\ \forall \tau \in \widetilde{\Sigma},\ a(\sigma,\ \tau) + \tilde{b}(\tau,\ \zeta) = 0, \\ \forall \upsilon \in \widetilde{V},\ -\tilde{b}(\sigma,\ \upsilon) = \int_\omega f\upsilon\ dx, \end{cases} \tag{1.5}$$

où

$$\widetilde{\Sigma} = (H^1(\omega))_s^4,\ \widetilde{V} = H_0^1(\omega)$$

et

$$\forall \sigma \in \widetilde{\Sigma},\ \forall \upsilon \in \widetilde{V},\ \tilde{b}(\sigma,\ \upsilon) = \int_\omega \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial \upsilon}{\partial x_i}\ dx. \tag{1.6}$$

Notons que la forme bilinéaire $\tilde{b}(.,.)$ vérifie la condition de Brezzi [2], i.e. il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall \upsilon \in \widetilde{V},\ \sup_{\tau \in \Sigma} \frac{\tilde{b}(\tau,\ \upsilon)}{\|\tau\|_{1,\ \omega}} \geqq \alpha \|\upsilon\|_{1,\ \omega}. \tag{1.7}$$

Donc $(\widetilde{P})$ admet une solution unique, pour plus détails voir [12].

1.2 Problème discret

Pour l'approximation de la solution de $(\widetilde{P})$ on se donne des espaces $\Sigma_h \subset \widetilde{\Sigma}$ et $V_h \subset V$ de dimension finie, qui vérifient les propriétés d'approximation habituelles, ainsi que la

condition $(V_h)_s^4 \subset \Sigma_h$. Cette deuxième condition nous permet de conclure que $\tilde{b}(.,.)$ vérifie la condition de Brezzi discrète uniformément par rapport à h, i.e. il existe une constante $\alpha_1 > 0$ indépendante de h telle que, pour tout h :

$$\forall \upsilon_h \in V_h, \ \sup_{\tau_h \in \Sigma_h} \frac{\tilde{b}(\tau_h, \ \upsilon_h)}{\|\tau_h\|_{1,\ \omega}} \geqq \alpha_1 \|\upsilon_h\|_{1,\ \omega}. \tag{1.8}$$

On considère le problème suivant :

$$(P_h) \begin{cases} \text{Trouver } \ (\sigma_h, \ \zeta_h) \in \Sigma_h \times V_h \text{ tel que} \\ \forall \tau_h \in \Sigma_h, \ a(\sigma_h, \ \tau_h) + \tilde{b}(\tau_h, \ \zeta_h) = 0, \\ \forall \upsilon_h \in V_h, \ -\tilde{b}(\sigma_h, \ \upsilon_h) = \int_\omega f \upsilon_h \ dx. \end{cases} \tag{1.9}$$

Le problème approché (P_h) admet toujours une solution. Puisque V_h est de dimension finie il existe $S(h) > 0$ tel que :

$$\forall \upsilon_h \in V_h, \ \|\upsilon_h\|_{1,\ \omega} \leqq S(h) \ |\upsilon_h|_{0,\ \omega}, \tag{1.10}$$

et on a l'estimation d'erreur abstraite due à Brezzi [1],

$$|\sigma - \sigma_h|_{0,\ \omega} + |\zeta - \zeta_h|_{1,\ \omega} \leqq C\{\inf_{\tau_h \in \Sigma_h} \|\sigma - \tau_h\|_{1,\ \omega} + (1 + S(h)) \inf_{\upsilon_h \in V_h} \|\zeta - \upsilon_h\|_{1,\ \omega}\}, \tag{1.11}$$

$C > 0$ étant une constante indépendante de h.

On utilisera par la suite les espaces Σ_h et V_h décrits ci-après. Pour simplifier l'étude, supposons que ω est un polygone convexe. On se donne une famille régulière de triangulations $\{F_h\}_h$ de ω et on définit :

$$W_h^k = \{\upsilon_h \in C^0(\overline{\omega}) \mid \forall K \in F_h, \ \upsilon_h \mid_K \in P_k(K)\}, \tag{1.12}$$

l'espace associé aux polynômes de degré $\leqq k$, par élément fini de Lagrange de type (k) (voir [4]). On pose

$$\Sigma_h = (W_h^k)_s^4, \ V_h = W_h^k \cap H_0^1(\omega), \ k \geqq 2. \tag{1.13}$$

Si de plus, la triangulation est uniformément régulière, i.e. il existe $C_0 > 0$ indépendante de h telle que

$$\min_{K \in F_h} h_K \leqq C_0. \max_{K \in F_h} h_K = C_0 \ h, \tag{1.14}$$

où h_k est le diamètre du triangle K, on a

$$S(h) \leqq C\ h^{-1}. \tag{1.15}$$

$C > 0$ étant indépendante de h. Dans ces conditions si $\zeta \in H^4(\omega) \cap H_0^2(\omega)$, on a, d'après (1.9) :

$$|\sigma - \sigma_h|_{0,\ \omega} + |\zeta - \zeta_h|_{1,\ \omega} \leqq C\ h \|\zeta\|_{4,\ \omega}. \tag{1.16}$$

Si $\zeta \in H^3(\omega) \cap H_0^2(\omega)$:

$$|\sigma - \sigma_h|_{0,\ \omega} \leqq C\ h \|\zeta\|_{3,\ \omega}, \tag{1.17}$$

$$|\zeta - \zeta_h|_{1,\ \omega} \leqq C\ h^2 \|\zeta\|_{3,\ \omega}, \tag{1.18}$$

donc

$$|\zeta - \zeta_h|_{0,\ \omega} \leqq C\ h^2 \|\zeta\|_{3,\ \omega}, \tag{1.19}$$

$$|\zeta - \zeta_h|_{0,\ \infty,\ \omega} \leqq C\ h \|\zeta\|_{3,\ \omega}. \tag{1.20}$$

Chapitre 2

Le problème continu pour les équations de Marguerre-von Kármán

Dans ce chapitre, nous étudions le problème de la bifurcation pour les équations de Marguerre-von Kármán, dans le cas continu. On traite le problème linéarisé, non linéaire continu et l'algorithme pour le problème non linéaire continu. On donne également dans ce chapitre le problème continu de l'alternative de Fredhölm.

$$\begin{cases} \Delta^2\zeta = [\phi, \zeta+\theta] + \lambda[f, \zeta+\theta] & \text{dans } \omega, \\ \Delta^2\phi = -[\zeta, \zeta+2\theta] & \text{dans } \omega, \\ \zeta = \partial_\nu\zeta = \phi = \partial_\nu\phi = 0 & \text{sur } \gamma, \end{cases} \tag{2.1}$$

où ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière γ est suffisamment régulière, ζ le déplacement et $\phi + \lambda f$ est la fonction d'Airy. $\theta \subset H_0^2(\omega)$ définie la surface moyenne de la coque.

$$[\eta,\ \zeta] = \frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1\partial x_2}.$$

2.1 Le problème linéarisé

Considèrons le problème de valeurs propres suivant :

$$(\widetilde{PV}) \begin{cases} \text{Trouver } \ (\sigma,\ \zeta,\ \lambda) \in \widetilde{\Sigma} \times \widetilde{V} \times \mathbb{R} \text{ tels que} \\ \forall\tau \in \widetilde{\Sigma},\ a(\sigma,\ \tau) + \tilde{b}(\tau,\ \zeta) = 0, \\ \forall\upsilon \in \widetilde{V},\ -\tilde{b}(\sigma,\ \upsilon) = \lambda \int_\omega [f,\ \sigma+\theta]\upsilon\ dx, \end{cases} \tag{2.2}$$

où $f_{ij} = \partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$, on définit :

$$\forall \tau \in \widetilde{\Sigma},\ [f,\ \tau] = f_{11}\tau_{22} + f_{22}\tau_{11} - 2f_{12}\tau_{12}, \tag{2.3}$$

par les raisonnements habituels (régularité de solution et densité de $\widetilde{V}$ dans V), $(\sigma,\ \zeta,\ \lambda)$ est solution de $(\widetilde{PV})$ si et seulement si $(\zeta,\ \lambda)$ et solution faible dans $H_0^2(\omega) \times \mathbb{R}$ du problème de Marguerre-von Kármán linéarisé :

$$\begin{cases} \Delta^2 \zeta = \lambda[f,\ \zeta + \theta] & \text{dans } \omega, \\ \zeta = \partial_\nu \zeta = 0 & \text{sur } \gamma. \end{cases} \tag{2.4}$$

Ce dernier est décrit dans [7] ; il s'agit d'un problème de valeurs propres d'un opérateur L qui est compact et symétrique de $H_0^2(\omega)$ dans lui-même. Donc il existe une suite de valeurs propres réelles et une suite de vecteurs propres normalisés. Sous l'hypothèse supplémentaire (fait uniquement pour fixer les idées) que L est défini positif, les valeurs propres sont positives. La forme de l'opérateur L est donnée par l'équation suivant :

$$\phi = \lambda\ L\ \phi. \tag{2.5}$$

2.2 Le problème non linéaire

Théorème 1 *On peut écrire le problème (2.1) dans la formulation mixte de Miyoshi comme ci-dessous :*

$$(\widetilde{PN}) \begin{cases} \textit{Trouver}\ \ (\phi,\ y) \in \widetilde{\Sigma} \times \widetilde{V},\ (\sigma,\ \zeta) \in \widetilde{\Sigma} \times \widetilde{V}\ \textit{et}\ \lambda \in \mathbb{R}\ \ \textit{tels que} \\ \forall \tau \in \widetilde{\Sigma},\ a(\phi,\ \tau) + \tilde{b}(\tau,\ y) = 0, \\ \forall \upsilon \in \widetilde{V},\ -\tilde{b}(\phi,\ \upsilon) = -\int_\omega [\sigma, \sigma + 2\theta]\upsilon\ dx, \\ \forall \tau \in \widetilde{\Sigma},\ a(\sigma,\ \tau) + \tilde{b}(\tau,\ \zeta) = 0, \\ \forall \upsilon \in \widetilde{V},\ -\tilde{b}(\sigma,\ \upsilon) = \lambda \int_\omega [f,\ \sigma + \theta]\upsilon\ dx + \int_\omega [\phi,\ \sigma + \theta]\upsilon\ dx, \end{cases} \tag{2.6}$$

où les espaces $\widetilde{\Sigma},\ \widetilde{V}$ sont définis : $\widetilde{\Sigma} = (H^1(\omega))_s^4,\ \widetilde{V} = H_0^1(\omega)$.

Preuve. On utilise le résultat (1.5) du chapitre 1 on trouve :

$$\forall \tau \in \widetilde{\Sigma},\ a(\phi,\ \tau) + \tilde{b}(\tau,\ y) = 0,$$

$$\forall \upsilon \in \widetilde{V},\ -\tilde{b}(\phi,\ \upsilon) = -\int_\omega [\sigma, \sigma + 2\theta]\upsilon\ dx,$$

et

$$\forall \tau \in \widetilde{\Sigma},\ a(\sigma,\ \tau) + \tilde{b}(\tau,\ \zeta) = 0,$$

$$\forall \upsilon \in \widetilde{V},\ -\tilde{b}(\sigma,\ \upsilon) = \lambda \int_\omega [f,\ \sigma + \theta]\upsilon\ dx + \int_\omega [\phi,\ \sigma + \theta]\upsilon\ dx.$$

■

Théorème 2 *Soit* $(\sigma_0,\ \zeta_0,\ \lambda_0) \in \widetilde{\Sigma} \times \widetilde{V} \times \mathbb{R}$ *une solution du problème de valeurs propres* $(\widetilde{PV})$ *avec* λ_0 *valeur propre simple et* $|\sigma_0|_{0,\ \omega} = 1$. *Soit* $\varepsilon > 0$ *un paramètre. Alors pour* ε *assez petit il existe une solution unique du problème* $(\widetilde{PN})$ *de la forme suivante :*

$$\sigma = \varepsilon\sigma_0 + \beta, \tag{2.7}$$

$$\zeta = \varepsilon\zeta_0 + z, \tag{2.8}$$

$$\lambda = \lambda_0(1 - \varepsilon^{-1} \int_\omega [\sigma + \theta,\ \phi]\zeta_0\ dx), \tag{2.9}$$

Preuve. $(\phi,\ y)$ est calculé à partir de $(\sigma,\ \zeta)$ par (2.6) et où $(\beta,\ z)$ est la solution orthogonale à $(\sigma_0,\ \zeta_0)$ [au sens de (2.12)] du problème de l'alternative de Fredhöm $(\widetilde{PF})$, avec second membre $(\lambda - \lambda_0)[f,\ \sigma + \theta] + [\sigma + \theta,\ \phi]$; cette solution vérifie de plus, $|\beta|_{0,\ \omega} \leqq \varepsilon$.

Puisque l'on va voir le cas discret plus en détails, on indiquera simplement le résultat sans démonstration dans ce cas. La solution (2.7)-(2.9) du problème $(\widetilde{PN})$ peut être décrite comme un point fixe d'un certain opérateur. ■

L'algorithme suivant converge vers cette solution :

Étape 1 : On choisit $(\beta^{(0)},\ z^{(0)})$ orthogonal à $(\sigma_0,\ \zeta_0)$ [au sens de (2.12)] avec $|\beta^{(0)}|_{0,\ \omega} \leqq \varepsilon$. Par exemple on peut choisir $\beta^{(0)} = 0,\ z^{(0)} = 0$.

Étape 2 : Supposons que $(\beta^{(i)},\ z^{(i)})$ soit connu. On pose $\sigma^{(i)} = \varepsilon\sigma_0+\beta^{(i)},\ \zeta^{(i)} = \varepsilon\zeta_0+z^{(i)}$, et on résoud le problème biharmonique $(\widetilde{P})$ avec second membre $-[\sigma^{(i)},\ \sigma^{(i)}+2\theta]$ pour obtenir $(\phi^{(i)},\ y^{(i)})$.

Étape 3 : On calcule

$$\lambda^{(i+1)} = \lambda_0(1-\varepsilon^{-1}\int_\omega [\phi^{(i)},\ \sigma^{(i)}+\theta]\zeta_0\ dx). \tag{2.10}$$

Étape 4 : On résoud le problème de Fredhölm $(\widetilde{PF})$ avec second membre $(\lambda^{(i+1)}-\lambda_0)[f,\ \sigma^{(i)}+\theta]+[\sigma^{(i)}+\theta,\ \phi^{(i)}]$ pour obtenir $(\beta^{(i+1)},\ z^{(i+1)})$ et on retourne à l'étape 2.

2.3 Le problème de Fredhölm

Considèrons le problème de l'alternative de Fredhölm sous la forme suivante. Soit λ une valeur propre simple du problème $(\widetilde{PV})$ correspondant à un vecteur propre normalisé $(\sigma,\ \zeta)$.

$$(\widetilde{PF})\begin{cases}\text{Trouver}\ \ (\beta,\ z)\in\widetilde{\Sigma}\times\widetilde{V}\ \text{tels que}\\ \forall\tau\in\widetilde{\Sigma},\ a(\beta,\ \tau)+\tilde{b}(\tau,\ z)=0,\\ \forall\upsilon\in\widetilde{V},\ -\tilde{b}(\beta,\ \upsilon)-\lambda\int_\omega[f,\ \beta+\theta]\upsilon\ dx=\int_\omega g\upsilon\ dx,\end{cases} \tag{2.11}$$

où $g\in L^2(\omega)$.

Théorème 3 *Soit λ une valeur propre simple du problème $(\widetilde{PV})$ correspondant à un vecteur propre normalisé $(\sigma,\ \zeta)$, le problème $(\widetilde{PF})$ admet une solution si et seulement si*

$$\int_\omega g\upsilon\ dx = 0,$$

telle que :

$$\int_\omega [f,\ \sigma+\theta]z\ dx = 0. \tag{2.12}$$

Preuve. On va voir le cas discret plus en détail, on indiquera simplement le résultat sans démonstration dans ce cas. ■

Chapitre 3

Le probème discret pour les équations de Marguerre-von Kármán

Dans ce chapitre, on va étudier le problème discret pour le problème du chapitre 2, on traite le problème linéarisé et non linéaire discret et on démontre l'existence et l'unicite de la solution, et l'algorithme pour le problème non linéaire discret. On donne également dans ce chapitre le problème discret de l'alternative de Fredhölm.

3.1 Le problème linéarisé

Considèrons le problème discret suivant :

$$(PV_h)\begin{cases}\text{Trouver } \ (\sigma_h,\ \zeta_h,\ \lambda_h) \in \Sigma_h \times V_h \times \mathbb{R} \text{ tels que} \\ \forall \tau_h \in \Sigma_h,\ a(\sigma_h,\ \tau_h) + \tilde{b}(\tau_h,\ \zeta_h) = 0, \\ \forall \upsilon_h \in V_h,\ -\tilde{b}(\sigma_h,\ \upsilon_h) = \lambda_h \int_\omega [f,\ \sigma_h + \theta]\upsilon_h\ dx.\end{cases} \tag{3.1}$$

Afin que le problème (PV_h) soit l'analogue discret du problème continu $(\widetilde{PV})$ on souhaiterait que les valeurs propres λ_h soient toutes réelles. Mais cela n'est pas évident a priori avec le raisonnement qui suit on aboutit à une condition [cf. (3.5) et (3.6)] qui est suffisante pour que cela soit vrai. On verra plus tard que cette condition suffisante est nécessaire pour obtenir la condition de compatibilité que doit vérifier le second member du problème de

l'alternative de Fredhölm discret [cf. (3.36)] qui est analogue au cas continu [cf. (2.12)]. Cette analogue est essentielle dans le traitement du problème non linéaire.

Posons d'abord ce problème sous forme d'un problème de valeurs propres d'un opérateur linéaire L_h. S'inspirant du cas continu, on définit un produit scalaire sur V_h qui imite le produit scalaire en $H_0^2(\omega)$. Pour $\zeta_h \in V_h$ donné, grâce à la dimension finie de Σ_h, il existe σ_h unique tel que (3.1) est vérifiée. On pose $M_h\zeta_h = \sigma_h$ [on voit que $M_h\zeta_h$ est l'analogue discret du tenseur de dérivées secondes, pour $\zeta_h \in H_0^1(\omega)$ donne, il existe $\sigma \in \widetilde{\Sigma}$ tel que (2.2) est verifiée si et seulement si $\zeta_h \in H^3 \cap H_0^2$ et $\sigma_{ij} = \partial^2\zeta/\partial x_i \partial x_j$]. On définit le produit scalaire $(,)_h$ sur V_h par

$$\forall \zeta_h,\ v_h \in V_h,\ (\zeta_h,\ v_h)_h = a(M_h\zeta_h,\ M_h v_h). \tag{3.2}$$

Alors pour $w_h \in V_h$ donne, $L_h w_h = \zeta_h$ ou $(\sigma_h,\ \zeta_h) \in \Sigma_h \times V_h$ vérifie

$$\forall \tau_h \in \Sigma_h,\ a(\sigma_h,\ \tau_h) + \tilde{b}(\tau_h,\ \zeta_h) = 0 \tag{3.3}$$

$$\forall v_h \in V_h,\ -\tilde{b}(\sigma_h,\ v_h) = \int_\omega [f,\ M_h w_h + \theta] v_h\ dx. \tag{3.4}$$

Il est maintenant facile de voir que le problème (PV_h) n'est rien d'autre que le problème de valeurs propres de l'opérateur L_h pour que le problème (PV_h) n'admette que des valeurs propres réelles il est suffisant que L_h soit symétrique par rapport à $(,)_h$. Cela est vrai si et seulement si la propriétè suivante est vérifiée

$(\wp)$ Si $(\sigma_h^l,\ \zeta_h^l) \in \Sigma_h \times V_h,\ l = \overline{1,2}$ vérifient

$$\forall \tau_h \in \Sigma_h,\ a(\sigma_h^l,\ \tau_h) + \tilde{b}(\tau_h,\ \zeta_h^l) = 0, \tag{3.5}$$

alors :

$$\int_\omega [f,\ \sigma_h^1 + \theta]\ \zeta_h^2\ dx = \int_\omega [f,\ \sigma_h^2 + \theta]\ \zeta_h^1\ dx. \tag{3.6}$$

L'analogue de cette propriété dans le cas continu est toujours vérifié grâce à la formule de Green donnant ainsi la symétrie de l'opérateur L. Dans le cas discret ce n'est pas toujours évident. On donne ci-dessous un cas particulier où cette propriété est vérifiée.

Lemme 1 *Si l'hypothèse (H) ci-dessous a lieu, alors la propriété $(\wp)$ est vérifiée :*
(H) Les fonctions f_{ij} sont des constantes, i.e. f est un polynôme de degré $\leqq 2$.

Preuve. On définit $\tau_h^i \in \Sigma_h$, $i = 1,\ 2$ par

$$(\tau_h^i)_{11} = f_{22}\ \zeta_h^i,\ (\tau_h^i)_{11} = f_{11}\ \zeta_h^i;\ (\tau_h^i)_{12} = (\tau_h^i)_{21} = -f_{12}\ \zeta_h^i. \tag{3.7}$$

Alors on a

$$\int_\omega [f,\ \sigma_h^2 + \theta]\ \zeta_h^1\ dx = a(\sigma_h^2,\ \tau_h^1) = -\tilde{b}(\tau_h^1,\ \zeta_h^2) = -\tilde{b}(\tau_h^2,\ \zeta_h^1),$$

utilisant (H) :

$$= a(\sigma_h^1, \tau_h^2) = \int_\omega [f, \sigma_h^1 + \theta]\ \zeta_h^2 dx,$$

d'où le lemme. ■

Remarque 4 *Une exemple important dans la pratique où cette hypothése est vérifiée est celui où*
$f = -1/2(x^2 + y^2)$. *Cette situation correspond à une plaque soumise et à une pression horizontale appliquée au bord et constitue le modéle le plus étudié. Les équations (3.1) correspondantes sont*

$$\Delta^2\zeta = -\lambda\Delta\zeta \quad \textit{dans}\ \omega,\ \zeta = \partial_\nu\zeta = 0 \quad \textit{sur}\ \gamma. \tag{3.8}$$

Avec cette hypothèse (H), L_h est symétrique et on a $N(h)$ valeurs propres toutes réelles, $N(h)$ étant la dimension de V_h. Pour fixer les idées supposons que L_h est défini positif de sorte que ses valeurs propre soient positives. On peut traiter l'etude de la convergence dans le cas général comme indiqué, sur un exemple de l'homogénéisation d'un probléme non nécessairement elliptique. La démonstration de la convergence de la méthode se fait à peu prés de la même maniére qu'en théorie de l'homogénéisation des valeurs propres. On se contentera d'indiquer ici les étapes essentielles. Soit $\lambda^i,\ 1 \leqq i \leqq l$, les l premiéres valeurs propres du problème $(\widetilde{PV})$. Pour h assez petit, de sorte que $N(h) \geqq l$, soit $\lambda_h^l,\ 1 \leqq i \leqq l$ les l premiéres valeurs propres du problème (PV_h). On définit $(\Phi_h^i,\ w_h^i) \in \Sigma_h \times V_h$ par

$$\forall \tau_h \in \Sigma_h,\ a(\Phi_h^i,\ \tau_h) + \tilde{b}(\tau_h,\ w_h^i) = 0. \tag{3.9}$$

$$\forall \upsilon_h \in V_h,\ -\tilde{b}(\Phi_h^i,\ \upsilon_h) = \lambda^i \int_\omega [f,\ \sigma^i + \theta]\upsilon_h\ dx, \tag{3.10}$$

où $(\sigma^i,\ \zeta^i) \in \widetilde{\Sigma} \times \widetilde{V}$ est une fonction propre normalisée (i. e. $|\sigma^i|_{0,\ \omega} = 1$) correspondant à λ^l. On sait que $w_h^l \to \zeta^l$ dans $H_0^1(\omega)$ fort et $\Phi_h^i \to \sigma^l$ dans $(L^2(\omega))_s^4$ fort lorsque $h \to 0$ d'aprés les résultats sur le problème stationnaire et on a les estimation d'erreur du type (1.11). On a le :

Lemme 2 *Les fonctions $\{w_h^i\}_{i=1}^l$ sont linéairement indépendantes dans V_h et la suite λ_h^l des l-iémes valeurs propres est bornée indépendamment de h.*

Preuve. Voir lemme 3.2 de [8]. ■

Théorème 5 *Pour chaque entier $l > 1$, la suite des l-ièmes valeurs propres $\{\lambda_h^l\}$ converge vers λ^l, la l-ième valeur propre du problème $(\widetilde{PV})$.*

Preuve. Voir théorème 3.1 de [8]. ■

Théorème 6 *Ètant donné $(\sigma_h^l,\ \zeta_h^l) \in \Sigma_h \times V_h$ vecteur propre normalisé correspondant à λ_h^l, alors on peut trouver $(\sigma^l(h),\ \zeta^l(h)) \in \widetilde{\Sigma} \times \widetilde{V}$ vecteur propre normalisé correspondant à λ^l tel que*

$$\begin{aligned} &|\sigma^l(h) - \sigma_h^l|_{0,\ \omega} + |\zeta^l(h) - \zeta_h^l|_{1,\ \omega} \\ &\leqq C\{\|\zeta^l(h) - w_h^l\|_{1,\ \omega} + \|\sigma^l(h) - \Phi_h^l\|_{1,\ \omega}\}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

où $(\Phi_h^l,\ w_h^l)$ est défini par (3.8) et (3.9) à partir de $(\sigma^l(h),\ \zeta^l(h),\ \lambda^l)$.

Preuve. Voir théorème 3.2 de [8]. ■

En ce qui concerne l'estimation de l'erreur pour les valeurs propres, l'estimation est moins bonne que dans le cas où le membre de droite de l'équation (2.4) est de la forme $\lambda\ \zeta$. Mais on va montrer que l'estimation de l'erreur est meilleure que pour les vecteurs propres. Soit $\lambda_h^l \to \lambda^l$ et soit $(\sigma_h^l,\ \zeta_h^l)$ et $(\sigma^l,\ \zeta^l)$ des vecteurs propres normalisés choisis tels que les estimations du type (3.11) soient valables. On a, grâce à la symétrie de la forme bilinéaire $a(.,.)$,

$$\lambda_h^l \int_\omega [f,\ \sigma_h^l + \theta]\ w_h^l\ dx = \lambda^l \int_\omega [f,\ \sigma^l + \theta]\ \zeta^l\ dx = a(\Phi_h^l,\ \sigma_h^l). \tag{3.12}$$

Puisque

$$\int_\omega [f,\ \sigma_h^l + \theta]\ w_h^l\ dx \to \int_\omega [f,\ \sigma^l + \theta]\ \zeta^l\ dx = (\lambda^l)^{-1},$$

il en résulte que pour h assez petit

$$\int_\omega [f,\ \sigma_h^l + \theta]\ w_h^l\ dx \geqq (2\lambda^l)^{-1} \text{ (par exemple).} \tag{3.13}$$

Théorème 7 *Il existe une constante $C_l > 0$ indépendante de h telle que*

$$|\lambda_h^l - \lambda^l| \leqq C_l\{h\ |\zeta^l - w_h^l|_{1,\ \omega} + |\zeta^l - w_h^l|_{0,\ \omega}\}. \tag{3.14}$$

Preuve. *Voir théorème 3.3 [8].* ■

Corollaire 8 *Si $\zeta^l \in H^3(\omega) \cap H_0^2(\omega)$, alors :*

$$h(|\sigma^l - \sigma_h^l|_{0,\ \omega} + |\zeta^l - \zeta_h^l|_{1,\ \omega}) + |\lambda^l - \lambda_h^l| \leqq C_l h^2 \|\zeta\|_{3,\ \omega}. \tag{3.15}$$

3.2 Le problème non linéaire

L'analogue discret du problème non linéaire $(\widetilde{PN})$ s'écrive :

$$(\widetilde{PN}_h) \begin{cases} \text{Trouver } \ (\phi_h,\ y_h) \in \Sigma_h \times V_h,\ (\sigma_h,\ \zeta_h) \in \Sigma_h \times V_h \ et\ \lambda \in \mathbb{R} \text{ tels que} \\ \forall \tau_h \in \Sigma_h,\ a(\phi_h,\ \tau_h) + \tilde{b}(\tau_h,\ y_h) = 0, \\ \forall \upsilon_h \in V_h,\ -\tilde{b}(\phi_h,\ \upsilon_h) = -\int_\omega [\sigma_h,\ \sigma_h + 2\theta]\upsilon_h\ dx \\ \forall \tau_h \in \Sigma_h,\ a(\sigma_h,\ \tau_h) + \tilde{b}(\tau_h,\ \zeta_h) = 0, \\ \forall \upsilon_h \in V_h,\ -\tilde{b}(\sigma_h,\ \upsilon_h) = \lambda_h \int_\omega [f,\ \sigma_h + \theta]\upsilon_h\ dx + \int_\omega [\phi_h,\ \sigma_h + \theta]\upsilon_h\ dx. \end{cases} \tag{3.16}$$

Soit $(\sigma_{0h},\ \zeta_{0h},\ \lambda_{0h})$ solution du problème linéaire de valeurs propres (PV_h), approchant $(\sigma_0,\ \zeta_0,\ \lambda_0)$ avec λ_{0h} valeur propre simple et $|\sigma_{0h}|_{0,\omega} = 1$. Pour $\varepsilon > 0$ donnée on s'intéresse aux solution de la forme

$$\sigma_h = \varepsilon\sigma_{0h} + \beta_h;\ \zeta_h = \varepsilon\zeta_{0h} + z_h, \tag{3.17}$$

et en substituant (3.17) dans derniers équations de (3.16) on déduit que $(\beta_h,\ z_h)$ vérifie

(PF_h) avec second membre $(\lambda_h - \lambda_{0h})[f,\ \sigma_h + \theta] + [\sigma_h + \theta,\ \phi_h]$. Donc l'existence de $(\beta_h,\ z_h)$ exige que [cf.(3.36)] :

$$(\lambda_h - \lambda_{0h}) = \int_\omega [f,\ \sigma_h + \theta]\ \zeta_{0h}\ dx + \int_\omega [\phi_h,\ \sigma_h + \theta]\ \zeta_{0h}\ dx = 0, \tag{3.18}$$

ce qui nous permet de calculer λ_h en foncation de $(\sigma_h,\ \zeta_h)$. Notons que :

$$\int_\omega [f, \sigma_h + \theta]\ \zeta_{0h}\ dx = \int_\omega [f,\ \sigma_{0h} + \theta]\ \zeta_h\ dx = \varepsilon \int_\omega [f,\ \sigma_{0h} + \theta]\ \zeta_{0h}\ dx = \varepsilon\ \lambda_{0h}^{-1} \neq 0, \tag{3.19}$$

où on a utilisé d'abord la propriété $(\wp)$ [cf. (3.5)] et ensuite l'orthogonalité de $(\beta_h,\ z_h)$ à $(\sigma_{0h},\ \zeta_{0h})$ au sens de (3.36) et finalement la condition de normalisation de $(\sigma_{0h},\ \zeta_{0h})$. Alors (3.18) nous donne λ_h explicitement, à savoir :

$$\lambda_h = \lambda_{0h}(1 - \varepsilon^{-1} \int_\omega [\sigma_h + \theta,\ \phi_h]\ \zeta_{0h}\ dx). \tag{3.20}$$

Pour $v_h \in V_h$ donné on calcule d'abord $M_h v_h$ et on résoud le problème biharmonique discret (P_h) avec second membre, $-[M_h v_h,\ M_h v_h + 2\theta]$ pour obtenir $(\phi_h(v_h),\ y_h(v_h)) \in \Sigma_h \times V_h$. Maintenant on peut définir

$$\Lambda_h^\varepsilon v_h = \lambda_{0h}(1 - \varepsilon^{-1} \int_\omega [M_h v_h + \theta,\ \phi_h(v_h)]\ \zeta_{0h}\ dx) \tag{3.21}$$

et

$$S_h^\varepsilon v_h = (\Lambda_h^\varepsilon v_h - \lambda_{0h})[f,\ M_h v_h + \theta] + [M_h v_h + \theta,\ \phi_h(v_h)]. \tag{3.22}$$

Finalement pour $g \in L^2(\omega)$ données définissons $Q_h g$ la composante dans V_h de la solution du problème de Fredhölm discret (PF_h) vérifiant (3.37). Pour $z_h \in V_h$ donné, définissons

$$T_h^\varepsilon z_h = Q_h(S_h^\varepsilon(\varepsilon\ \zeta_{0h} + z_h)). \tag{3.23}$$

Avec ces définitions il est évident que toute solution du problème $(\widetilde{PN}_h)$ de la forme (3.17) provient d'un point fixe de T_h^ε.

Théorème 9 *Soit $l \geqq 2$ un entier quelconque. Il existe une constante $C = C(l) > 0$, indépendante de h, telle que*

$$\forall g_h \in W_h^1,\ |\sigma_h(g_h)|_{0,\ \omega} + |\zeta_h(g_h)|_{1,\ \omega} \leqq C|g|_{0,\ 1,\ \omega} \tag{3.24}$$

où $(\sigma_h(g_h),\ \zeta_h(g_h)) \in \Sigma_h \times V_h$ est la solution du problème (P_h) avec second membre g_h.

Preuve. Voir théorème 4.3 de [8]. ■

Théorème 10 *Supposons que $(\sigma,\ \zeta,\ \lambda)$ solution de $(\widetilde{PV})$ vérifie :*

$$\zeta \in H^3(\omega) \cap H_0^2(\omega)$$

.

Alors il existe une constante $C_l > 0$ independante de h telle que

$$\forall g_h \in W_h^1,\ |\beta_h(g_h)|_{0,\ \omega} + |z_h(g_h)|_{1,\ \omega} \leqq C|g|_{0,\ 1,\ \omega} \tag{3.25}$$

ou $(\beta_h(g_h),\ z_h(g_h))$est la solution du problème de Fredhölm discret (PF_h) avec second membre $P_{0h}g_h$

Preuve. Le principe de la démonstration est le même qu'au théorème 9 mais les détails varient légèrement. L'hypothèse $\zeta \in H^3(\omega)$ est utilisée pour montrer que ζ_h le vecteur propre approché reste borné dans $L^\infty(\omega)$ [cf. (1.18)] et donc $P_{0h}g_h \to 0$ dans $L^1(\omega)$ avec g_h. ■

On montre que, pour ε assez petit, T_h^ε est contraction de la boule de centre 0 et de rayon ε. Pour cela on a d'abord les estimations suivantes :

Lemme 3 *Supposons que $\zeta_0 \in H^3(\omega) \cap H_0^2(\omega),\ |\theta|_{0,\ \omega} \leqq C\varepsilon$, et $z_h,\ z_h^i \in B(h;\ 0;\ \varepsilon)$, $i = 1,\ 2$, où*

$$B(h;\ 0;\ \varepsilon) = \{v_h \in V_h,\ \|v_h\|_h = |M_h v_h|_{0,\ \omega} \leqq \varepsilon\}. \tag{3.26}$$

On pose

$$\beta_h = M_h z_h,\ \beta_h^i = M_h z_h^i,\ i = 1,\ 2$$

et

$$\zeta_h = \varepsilon\zeta_{0h} + z_h,\ \sigma_h = \varepsilon\sigma_{0h} + \beta_h,\ \zeta_h^i = \varepsilon\zeta_{0h} + z_h^i,\ \sigma_h^i = \varepsilon\sigma_{0h} + \beta_h^i,\ i = 1,\ 2.$$

Alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et de ε telle que

$$|\Lambda_h^\varepsilon \zeta_h - \lambda_{0h}| \leqq C\varepsilon^2, \tag{3.27}$$

$$|\Lambda_h^\varepsilon \zeta_h^1 - \Lambda_h^\varepsilon \zeta_h^2| \leqq C\varepsilon |\sigma_h^1 - \sigma_h^2|_{0,\ \omega}, \tag{3.28}$$

$$|S_h^\varepsilon \zeta_h|_{0,\ 1,\ \omega} \leqq C\varepsilon^3, \tag{3.29}$$

$$|S_h^\varepsilon \zeta_h^1 - S_h^\varepsilon \zeta_h^2|_{0,\ 1,\ \omega} \leqq C\varepsilon^2 |\sigma_h^1 - \sigma_h^2|_{0,\ \omega}, \tag{3.30}$$

$$\|T_h^\varepsilon z_h\|_h \leqq C\varepsilon^3. \tag{3.31}$$

Preuve.

(i) puisque $\zeta_0 \in H^3(\omega)$, on a $\{\zeta_{0h}\}$ bornée dans $L^\infty(\omega)$ [cf. (1.18)]. Alors :

$$|\Lambda_h^\varepsilon \zeta_h - \lambda_{0h}| = \varepsilon^{-1}|\lambda_{0h}| \int_\omega [\sigma_h + \theta, \phi_h]\zeta_{0h}\ dx \leqq C\varepsilon^{-1}|\sigma_h + \theta|_{0,\ \omega}|\phi_h|_{0,h}|\zeta_{0h}|_{0,\ \infty,\ \omega}.$$

Mais $|\sigma_h|_{0,\ \omega} \leqq \varepsilon$ et $|\sigma_h + \theta|_{0,\ \omega} \leqq C\varepsilon$ pour $|\theta|_{0,\ \omega} \leqq C\varepsilon$, par ailleur puisque $[\sigma_h + \theta, \sigma_h + \theta] \in W_k^{2k}$, on peut appliquer le théoreme 9 pour obtenir

$$|\phi_h|_{0,\ \omega} \leqq C|[\sigma + \theta, \sigma + \theta]|_{1,\ \omega} \leqq C\varepsilon^2, \tag{3.32}$$

donc on obtient :

$$\begin{aligned} |\Lambda_h^\varepsilon \zeta_h - \lambda_{0h}| &\leqq C\varepsilon^{-1}(C\varepsilon)(C\varepsilon^2)(C) \\ &= C\varepsilon^2. \end{aligned}$$

d'où on déduit (3.27)

(ii) De la même façon que (3.27) on déduit (3.28), on a :

$$\begin{aligned} \Lambda_h^\varepsilon \zeta_h^1 &= \lambda_{0h}(1 - \varepsilon^{-1} \int_\omega [M_h \zeta_h^1 + \theta,\ \phi_h(\zeta_h^1)]\ \zeta_{0h}\ dx) \\ \Lambda_h^\varepsilon \zeta_h^2 &= \lambda_{0h}(1 - \varepsilon^{-1} \int_\omega [M_h \zeta_h^2 + \theta,\ \phi_h(\zeta_h^2)]\ \zeta_{0h}\ dx) \end{aligned}$$

donc

$$
\begin{aligned}
|\Lambda_h^\varepsilon \zeta_h^1 - \Lambda_h^\varepsilon \zeta_h^2| &= |\lambda_{0h}(1 - \varepsilon^{-1} \int_\omega [M_h \zeta_h^1 + \theta,\ \phi_h(\zeta_h^1)]\ \zeta_{0h}\ dx) \\
&- \lambda_{0h}(1 - \varepsilon^{-1} \int_\omega [M_h \zeta_h^2 + \theta,\ \phi_h(\zeta_h^2)]\ \zeta_{0h}\ dx)| \\
&= |\lambda_{0h} - \lambda_{0h}\varepsilon^{-1} \int_\omega [M_h \zeta_h^1 + \theta,\ \phi_h(\zeta_h^1)]\ \zeta_{0h}\ dx) \\
&- \lambda_{0h} + \lambda_{0h}\varepsilon^{-1} \int_\omega [M_h \zeta_h^2 + \theta,\ \phi_h(\zeta_h^2)]\ \zeta_{0h}\ dx)| \\
&= |\lambda_{0h}\varepsilon^{-1}(- \int_\omega [M_h \zeta_h^1 + \theta,\ \phi_h(\zeta_h^1)]\ \zeta_{0h}\ dx \\
&+ \int_\omega [M_h \zeta_h^2 + \theta,\ \phi_h(\zeta_h^2)]\ \zeta_{0h}\ dx)|,
\end{aligned}
$$

on utilise $M_h \zeta_h^i = \sigma^i$ pour $i = \overline{1,2}$. Alors :

$$
\begin{aligned}
|\Lambda_h^\varepsilon \zeta_h^1 - \Lambda_h^\varepsilon \zeta_h^2| &= |\lambda_{0h}\varepsilon^{-1}(- \int_\omega [\sigma_h^1 + \theta,\ \phi_h(\zeta_h^1)]\ \zeta_{0h}\ dx + \int_\omega [\sigma_h^2 + \theta,\ \phi_h(\zeta_h^2)]\ \zeta_{0h}\ dx)| \\
&= |\lambda_{0h}\varepsilon^{-1}(- \int_\omega [\sigma_h^1 - \sigma_h^2,\ \phi_h(\zeta_h^1)] - \int_\omega [\sigma_h^2 + \theta,\ \phi_h(\zeta_h^1)])\zeta_{0h}\ dx \\
&+ \int_\omega [\sigma_h^2 + \theta,\ \phi_h(\zeta_h^2)]\ \zeta_{0h}\ dx| \\
&= |\lambda_{0h}\varepsilon^{-1}(- \int_\omega [\sigma_h^1 - \sigma_h^2,\ \phi_h(\zeta_h^1)]\zeta_{0h} + \int_\omega [\sigma_h^2 + \theta,\ \phi_h(\zeta_h^2) - \phi(\zeta_h^1)]\zeta_{0h}\ dx|
\end{aligned}
$$

donc

$$
|\Lambda_h^\varepsilon \zeta_h^1 - \Lambda_h^\varepsilon \zeta_h^2| \leqq |\lambda_{0h}\varepsilon^{-1}|(| - \int_\omega [\sigma_h^1 - \sigma_h^2,\ \phi_h(\zeta_h^1)]\zeta_{0h}| + | \int_\omega [\sigma_h^2 + \theta,\ \phi_h(\zeta_h^2) - \phi(\zeta_h^1)]\zeta_{0h}\ dx|)
$$

On utilise les relations suivant :

$$
|\phi_h|_{0,\ \omega} \leqq C|[\sigma_h + \theta,\ \sigma_h + \theta]|_{0,\ 1,\ \omega} \leqq C\varepsilon^2,\ |\sigma_h^2 - \sigma_h^1|_{0,\ \omega}^2 \leqq C|\sigma_h^2 - \sigma_h^1|_{0,\ \omega}(|\sigma_h^1 + \theta|_{0,\ \omega} + |\sigma_h^2 + \theta|_{0,\ \omega}).
$$

$$
\begin{aligned}
|\Lambda_h^\varepsilon \zeta_h^1 - \Lambda_h^\varepsilon \zeta_h^2| &\leqq C\varepsilon^{-1}(|\sigma_h^1 - \sigma_h^2|_{0,\ \omega}|\phi_h(\zeta_h^1)|_{0,\ \omega}|\zeta_{0h}|_{0,\ \omega} + |\sigma_h^2 + \theta|_{0,\ \omega}|\phi_h(\zeta_h^2) - \phi(\zeta_h^1)|_{0,\ \omega}|\zeta_{0h}|_{0,\ \omega}) \\
&\leqq C\varepsilon^{-1}(|\sigma_h^1 - \sigma_h^2|_{0,\ \omega}(C\varepsilon^2)(C) + (C\varepsilon)(C|[\sigma_h^2 - \sigma_h^1,\ \sigma_h^2 - \sigma_h^1]|_{0,\ 1,\ \omega})(C)) \\
&\leqq C\varepsilon^{-1}(|\sigma_h^1 - \sigma_h^2|_{0,\ \omega}(C\varepsilon^2)(C) + (C\varepsilon|\sigma_h^2 - \sigma_h^1|_{0,\ \omega}^2)) \\
&\leqq C\varepsilon^{-1}(C\varepsilon^2|\sigma_h^1 - \sigma_h^2|_{0,\ \omega} + C\varepsilon|\sigma_h^2 - \sigma_h^1|_{0,\ \omega}(|\sigma_h^1 + \theta|_{0,\ \omega} + |\sigma_h^2 + \theta|_{0,\ \omega}) \\
&\leqq C\varepsilon^{-1}(C\varepsilon^2|\sigma_h^1 - \sigma_h^2|_{0,\ \omega} + C\varepsilon|\sigma_h^2 - \sigma_h^1|_{0,\ \omega}(2C\varepsilon)) \\
&\leqq C\varepsilon^{-1}(C\varepsilon^2|\sigma_h^1 - \sigma_h^2|_{0,\ \omega} + C\varepsilon^2|\sigma_h^2 - \sigma_h^1|_{0,\ \omega}) \\
&\leqq C\varepsilon|\sigma_h^1 - \sigma_h^2|_{0,\ \omega}.
\end{aligned}
$$

Alors la rélation (3.28) est demontré.

On utilise (3.22) pour montrer (3.29)

$$
\begin{aligned}
|S_h^\varepsilon \zeta_h|_{0,\ 1,\ \omega} &= |(\Lambda_h^\varepsilon \zeta_h - \lambda_{0h})[f,\ M_h\zeta_h + \theta] + [M_h\zeta_h + \theta,\ \phi_h(\zeta_h)]|_{0,\ 1,\ \omega} \\
&\leqq |(\Lambda_h^\varepsilon \zeta_h - \lambda_{0h})||[f,\ M_h\zeta_h + \theta]|_{0,\ 1,\ \omega} + |[M_h\zeta_h + \theta,\ \phi_h(\zeta_h)]|_{0,\ 1,\ \omega} \\
&\leqq |(\Lambda_h^\varepsilon \zeta_h - \lambda_{0h})||[f,\ \sigma_h + \theta] + [\sigma_h + \theta,\ \phi_h(\zeta_h)]|_{0,\ 1,\ \omega} \\
&\leqq C\varepsilon^2(|f|_{0,\ 1,\ \omega}|\sigma_h + \theta|_{0,\ 1,\ \omega}) + |\sigma_h + \theta|_{0,\ 1,\ \omega}|\phi_h(\zeta_h)|_{0,\ 1,\ \omega} \\
&\leqq C\varepsilon^2(C)(C\varepsilon) + (C\varepsilon)(C\varepsilon^2) \\
&\leqq C\varepsilon^3.
\end{aligned}
$$

donc

$$
|S_h^\varepsilon \zeta_h|_{0,\ 1,\ \omega} \leqq C\varepsilon^3.
$$

On va montre (3.30), on utilise (3.22) on a :

$$
\begin{aligned}
S_h^\varepsilon \zeta_h^1 &= (\Lambda_h^\varepsilon \zeta_h^1 - \lambda_{0h})[f,\ \sigma_h^1 + \theta] + [\sigma_h^1 + \theta,\ \phi(\zeta_h^1)] \\
S_h^\varepsilon \zeta_h^2 &= (\Lambda_h^\varepsilon \zeta_h^2 - \lambda_{0h})[f,\ \sigma_h^2 + \theta] + [\sigma_h^2 + \theta,\ \phi_h(\zeta_h^2)].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|S_h^\varepsilon \zeta_h^1 - S_h^\varepsilon \zeta_h^2| &= |((\Lambda_h^\varepsilon \zeta_h^1 - \lambda_{0h})[f,\ \sigma_h^1 + \theta] + [\sigma_h^1 + \theta,\ \phi(\zeta_h^1)]) \\
&- ((\Lambda_h^\varepsilon \zeta_h^2 - \lambda_{0h})[f,\ \sigma_h^2 + \theta] + [\sigma_h^2 + \theta,\ \phi_h(\zeta_h^2)])| \\
&= |(\Lambda_h^\varepsilon \zeta_h^1[f,\ \sigma_h^1 + \theta] - \lambda_{0h}[f,\ \sigma_h^1 + \theta] + [\sigma_h^1 + \theta,\ \phi(\zeta_h^1)]) \\
&- \Lambda_h^\varepsilon \zeta_h^2[f,\ \sigma_h^2 + \theta] + \lambda_{0h}[f,\ \sigma_h^2 + \theta] - [\sigma_h^2 + \theta,\ \phi_h(\zeta_h^2)]| \\
&= |\Lambda_h^\varepsilon \zeta_h^1[f,\ \sigma_h^1 + \theta] - \Lambda_h^\varepsilon \zeta_h^2[f,\ \sigma_h^2 + \theta] + \lambda_{0h}[f,\ \sigma_h^2 - \sigma_h^1] \\
&+ [\sigma_h^1 + \theta,\ \phi(\zeta_h^1)] - [\sigma_h^2 - \sigma_h^1,\ \phi_h(\zeta_h^2)] - [\sigma_h^1 + \theta,\ \phi(\zeta_h^2)]| \\
&= |\Lambda_h^\varepsilon \zeta_h^1[f,\ \sigma_h^1 + \theta] - \Lambda_h^\varepsilon \zeta_h^2[f,\ \sigma_h^2 - \sigma_h^1] - \Lambda_h^\varepsilon \zeta_h^2[f,\ \sigma_h^1 + \theta] \\
&+ \lambda_{0h}[f,\ \sigma_h^2 - \sigma_h^1] + [\sigma_h^1 + \theta,\ \phi(\zeta_h^1)] - [\sigma_h^2 - \sigma_h^1,\ \phi_h(\zeta_h^2)] - [\sigma_h^1 + \theta,\ \phi(\zeta_h^2)]| \\
&= |(\Lambda_h^\varepsilon \zeta_h^1 - \Lambda_h^\varepsilon \zeta_h^2)[f,\ \sigma_h^1 + \theta] + (\lambda_{0h} - \Lambda_h^\varepsilon \zeta_h^2)[f,\ \sigma_h^2 - \sigma_h^1] \\
&+ [\sigma_h^1 + \theta,\ \phi(\zeta_h^1) - \phi(\zeta_h^2)] - [\sigma_h^2 - \sigma_h^1,\ \phi_h(\zeta_h^2)]|.
\end{aligned}
$$

De (3.32) pour obtient (3.30)

$$
\begin{aligned}
|S_h^\varepsilon \zeta_h^1 - S_h^\varepsilon \zeta_h^2| &\leqq |\Lambda_h^\varepsilon \zeta_h^1 - \Lambda_h^\varepsilon \zeta_h^2|_{0,\ \omega} |f|_{0,\ \omega} |\sigma_h^1 + \theta|_{0,\ \omega} + |\lambda_{0h} - \Lambda_h^\varepsilon \zeta_h^2|_{0,\ \omega} |f|_{0,\ \omega} |\sigma_h^2 - \sigma_h^1|_{0,\ \omega} \\
&+ |\sigma_h^1 + \theta|_{0,\ \omega} |\phi(\zeta_h^1) - \phi(\zeta_h^2)|_{0,\ \omega} + |\sigma_h^2 - \sigma_h^1|_{0,\ \omega} |\phi_h(\zeta_h^2)|_{0,\ \omega} \\
&\leqq C\varepsilon |\sigma_h^2 - \sigma_h^1|_{0,\ \omega} (C)(C\varepsilon) + (C\varepsilon^2)(C) |\sigma_h^2 - \sigma_h^1|_{0,\ \omega} \\
&+ (C\varepsilon)(C\varepsilon)(|\sigma_h^2 - \sigma_h^1|_{0,\ \omega}) + (C\varepsilon^2) |\sigma_h^2 - \sigma_h^1|_{0,\ \omega} \\
&\leqq 4C\varepsilon^2 |\sigma_h^2 - \sigma_h^1|_{0,\ \omega} \\
&\leqq C\varepsilon^2 |\sigma_h^1 - \sigma_h^2|_{0,\ \omega}.
\end{aligned}
$$

Donc on obtient (3.30).

(iii) On a $T_h^\varepsilon z_h = Q_h(S_h^\varepsilon(\varepsilon\zeta_{0h} + z_h))$ et on sait que $S_h^\varepsilon(\varepsilon\zeta_{0h} + z_h) \in W_k^{2k}$. De (3.29) pour obtient

$$
\begin{aligned}
\|T_h^\varepsilon z_h\|_h &\leqq C|S_h^\varepsilon(\varepsilon\ \zeta_{0h} + z_h)|_{0,\ 1,\ \omega} \\
&\leqq C(C\varepsilon^3) \\
&= C\varepsilon^3.
\end{aligned}
$$

d'où on déduit (3.31), donc complètement démontré.

■

Théorème 11 *Si ε est suffisamment petit, de telle sorte que $C\varepsilon^2 < 1$, alors T_h est une application de $B(h, 0, \varepsilon)$ dans elle-même et d'autre part cette application est une contraction donc il existe un point fixe unique.*

Preuve. On a $T_h^\varepsilon : H_0^2(\omega) \to \{\zeta_{0h}\}^\perp$ par définit :

$$T_h^\varepsilon z_h = Q_h(S_h^\varepsilon(\varepsilon\ \zeta_{0h} + z_h)), \tag{3.33}$$

où

$$z_h = Q_h(S_h^\varepsilon \zeta_h),\ T_h^\varepsilon z_h^1 = Q_h(S_h^\varepsilon(\varepsilon\ \zeta_{0h} + z_h^1)),\ T_h^\varepsilon z_h^2 = Q_h(S_h^\varepsilon(\varepsilon\ \zeta_{0h} + z_h^2))$$

on montré que T_h^ε est une application contraction :

$$\begin{aligned}
\|T_h^\varepsilon z_h^1 - T_h^\varepsilon z_h^2\|_h &= \|Q_h(S_h^\varepsilon(\varepsilon\ \zeta_{0h} + z_h^1)) - Q_h(S_h^\varepsilon(\varepsilon\ \zeta_{0h} + z_h^2))\|_h \\
&= \|Q_h[(S_h^\varepsilon(\varepsilon\ \zeta_{0h} + z_h^1)) - (S_h^\varepsilon(\varepsilon\ \zeta_{0h} + z_h^2))]\|_h \\
&\leqq C|(S_h^\varepsilon(\varepsilon\ \zeta_{0h} + z_h^1)) - (S_h^\varepsilon(\varepsilon\ \zeta_{0h} + z_h^2))|_{0,\ 1,\ \omega} \\
&\leqq C(C\varepsilon^2|\sigma_h^1 - \sigma_h^2|)_{0,\ \omega} \\
&\leqq C^2\varepsilon^2|\sigma_h^1 - \sigma_h^2|_{0,\ \omega} \\
&\leqq C\varepsilon^2|\sigma_h^1 - \sigma_h^2|_{0,\ \omega}.
\end{aligned}$$

Pour $C\varepsilon^2 < 1$ alors T_h^ε est une application contraction. Donc il existe un point fixe unique.

■

Qui peut être calcule par la suite itérative

$$z_h^{(i+1)} = T_h z_h^{(i)}.$$

L'algorithme suivant pour résoudre $(\widetilde{PN}_h)$:

Étape 1 : On choisit $(\beta_h^{(0)},\ z_h^{(0)})$ orthogonal [au sens de (3.36)] à $(\sigma_{0h},\ \zeta_{0h})$ avec $|\beta_h^{(0)}|_{0,\ \omega} \leqq \varepsilon$ (exemple, $\beta_h^{(0)} = 0$, $z_h^{(0)} = 0$).

Étape 2 : On suppose $(\beta_h^{(i)},\ z_h^{(i)})$ connu. Alors on pose $\sigma_h^{(i)} = \varepsilon\sigma_{0h} + \beta_h^{(i)}$, $\zeta_h^{(i)} = \varepsilon\zeta_{0h} + z_h^{(i)}$ et on résoud le problème biharmonique discret P_h avec second membre $-[\sigma_h^{(i)},\ \sigma_h^{(i)} + 2\theta]$

pour obtenir $(\phi_h^{(i)},\ y_h^{(i)})$.

Étape 3 : On calcule

$$\lambda_h^{(i+1)} = \lambda_{0h}(1 - \varepsilon^{-1} \int_\omega [\sigma_h^{(i)} + \theta,\ \phi_h^{(i)}]\zeta_{0h} dx). \tag{3.34}$$

Étape 4 : On résoud le problème de Fredhölm (PF_h) avec second membre

$$(\lambda_h^{(i+1)} - \lambda_{0h})[f,\ \sigma_h^{(i)} + \theta] + [\sigma_h^{(i)} + \theta,\ \phi_h]$$

pour obtenir $(\beta_h^{(i+1)},\ \ z_h^{(i+1)})$ et on retourne à l'étape 2.

Cet algorithme converge vers la solution $((\phi_h, y_h),\ (\sigma_h, \zeta_h),\ \lambda_h)$ du problème $(\widetilde{PN}_h)$.

3.3 Le problème de Fredhölm

Le problème discret correspondant s'écrit :

$$(PF_h) \begin{cases} \text{Trouver } \ (\beta_h,\ z_h) \in \Sigma_h \times V_h \text{ tels que} \\ \forall \tau_h \in \Sigma_h,\ a(\beta_h,\ \tau_h) + \tilde{b}(\tau_h,\ z_h) = 0, \\ \forall \upsilon_h \in V_h,\ -\tilde{b}(\beta_h,\ \upsilon_h) - \lambda_h \int_\omega [f,\ \beta_h + \theta]\upsilon_h\ dx = \int_\omega g\upsilon_h\ dx, \end{cases} \tag{3.35}$$

où $(\sigma_h,\ \zeta_h,\ \lambda_h)$ est solution de (PV_h) approchant $(\sigma,\ \zeta,\ \lambda)$.

Théorème 12 *Ce problème admet une solution si et seulement si*

$$\int_\omega g\zeta_h dx = 0. \tag{3.36}$$

Preuve.

Grâce à la propriété $(\wp)$ qui est vérifiée sous l'hypothèse (H). Il existe une solution unique telle que

$$\int_\omega [f,\ \sigma_h + \theta] z_h\ dx = 0. \tag{3.37}$$

Observons que pour $g \in L^2(\omega)$ quelconque, le problème $(\widetilde{PF})$ posé avec $P_0 g$, où

$$P_0 g = g - \lambda(g,\ \zeta)[f,\ \sigma + \theta], \tag{3.38}$$

admet une solution unique $(\beta,\ z) \in \widetilde{\Sigma} \times \widetilde{V}$. Dé même, le problème (PF_h) posé avec $P_0 g$, où

$$P_{0h} g = g - \lambda_h(g,\ \zeta_h)[f,\ \sigma_h + \theta], \tag{3.39}$$

admet une solution unique $(\beta_h,\ z_h) \in \Sigma_h \times V_h$ vérifiant (3.37), et on a la théorème suivant :

Théorème 13 *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et de g telle que, pour h assez petit*

$$|\beta_h|_{0,\ \omega} + |z_h|_{1,\ \omega} \leqq C|g|_{0,\ \omega}, \tag{3.40}$$

$$|\beta - \beta_h|_{0,\ \omega} + |z - z_h|_{1,\ \omega} \leqq C\{\inf_{\tau_h \in \Sigma_h} \parallel \beta - \tau_h \parallel_{1,\ \omega} + \inf_{\tau_h \in \Sigma_h} \parallel \sigma - \tau_h \parallel_{1,\ \omega}$$

$$+ (1 + S(h))(\inf_{\upsilon_h \in V_h} \parallel z - \upsilon_h \parallel_{1,\ \omega} + \inf_{\upsilon_h \in V_h} \parallel \zeta - \upsilon_h \parallel_{1,\ \omega})\} \tag{3.41}$$

Preuve. On ne donne pas les détails ici. La démonstration s'effectue exactement comme dans le théorème 5.1 de [7]. ■

Grâce aux résultats de(1.17)-(1.20) on a

$$|\beta - \beta_h|_{0,\ \omega} + |z - z_h|_{1,\ \omega} \leqq Ch(\|\zeta\|_{3,\omega} + \|z\|_{3,\ \omega}). \tag{3.42}$$

■

Chapitre 4

Estimations d'erreur

Dans ce chapitre nous allons obtenir des estimations de l'erreur commise en passant au problème discret, et quelques remarques importantes .

Soit $(\sigma_0,\ \zeta_0,\ \lambda_0)$ solution du problème $(\widetilde{PV})$ avec λ_0 valeur propre simple et $|\sigma_0|_{0,\ \omega} = 1$ et soit $(\sigma_{0h},\ \zeta_{0h},\ \lambda_{0h})$ son approximation, et solution de (PV_h). Pour h assez petit, λ_{0h} est également valeur propre simple. Soit $\{(\phi,\ y),\ (\sigma,\ \zeta),\ \lambda\}$ solution du problème $(\widetilde{PN})$ obtenue à partir de $(\sigma_0,\ \zeta_0,\ \lambda_0)$ comme dans section 2.2. Soit $\{(\phi_h,\ y_h),\ (\sigma_h,\ \zeta_h),\ \lambda_h\}$ solution de $(\widetilde{PN}_h)$ son analogue discret.

Lemme 4 *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et de ε telle que*

$$|\phi - \phi_h|_{0,\ \omega} + |y - y_h|_{1,\ \omega} \leqq C\{r_h + \varepsilon|\sigma - \sigma_h|_{0,\ \omega} + \varepsilon^2 h\}, \tag{4.1}$$

où $r_h \to 0$ lorsque $h \to 0$.

Preuve. Soit $\tilde{\sigma_h} \in \Sigma_h$ tel que $\|\sigma - \tilde{\sigma}_h\|_{1,\ \omega} \to 0$ lorsque $h \to 0$.

On définit $(\phi_h^1,\ y_h^1) \in \Sigma_h \times V_h$ solution du problème biharmonique discret (P_h) avec second membre $-[\sigma,\ \sigma + 2\theta]$:

$$\begin{cases} \text{Trouver } \ (\phi_h^1,\ y_h^1) \in \Sigma_h \times V_h, \text{ tels que} \\ \forall \tau_h \in \Sigma_h,\ a(\phi_h^1,\ \tau_h) + \tilde{b}(\tau_h,\ y_h^1) = 0, \\ \forall \upsilon_h \in V_h,\ -\tilde{b}(\phi_h^1,\ \upsilon_h) = -\int_\omega [\sigma,\ \sigma + 2\theta]\upsilon_h\ dx, \end{cases} \tag{4.2}$$

on utilise la relation suivant :

$$[\sigma,\ \sigma+2\theta]=[\sigma-\theta,\ \sigma+\theta]=[\sigma,\ \sigma]-[\theta,\ \theta],$$

donc on obtient

$$\begin{aligned}\forall \upsilon_h\in V_h,\ -\tilde{b}(\phi_h^1,\ \upsilon_h) &= -\int_\omega[\sigma,\ \sigma+2\theta]\upsilon_h\ dx\\ &= -\int_\omega([\sigma,\ \sigma]-[\theta,\ \theta])\upsilon_h\ dx\\ &= \int_\omega -[\sigma,\ \sigma]\upsilon_h\ dx+\int_\omega[\theta,\ \theta]\upsilon_h\ dx.\end{aligned}$$

et $(\phi_h^2,\ y_h^2)\in\Sigma_h\times V_h$ solution de (P_h) avec second membre $-[\tilde{\sigma}_h,\ \tilde{\sigma}_h+2\theta]$:

$$\begin{cases}\text{Trouver}\ \ (\phi_h^2,\ y_h^2)\in\Sigma_h\times V_h,\ \text{tels que}\\ \forall\tau_h\in\Sigma_h,\ a(\phi_h^1,\ \tau_h)+\tilde{b}(\tau_h,\ y_h^2)=0,\\ \forall\upsilon_h\in V_h,\ -\tilde{b}(\phi_h^2,\ \upsilon_h)=-\int_\omega[\tilde{\sigma}_h,\ \tilde{\sigma}_h+2\theta]\upsilon_h\ dx.\end{cases}\tag{4.3}$$

Pour $\sigma=\tilde{\sigma}_h$ l'équation (4.3) équivalant l'équation (4.2).
Alors on a d'après les estimations (1.17) et (1.18) :

$$|\phi-\phi_h^1|_{0,\ \omega}+|y-y_h^1|_{0,\ \omega}\leqq\|\phi\|_{1,\ \omega}.\tag{4.4}$$

On peut majorer les quantités $|\phi_h^1-\phi_h^2|_{0,\ \omega}$ et $|y_h^1-y_h^2|_{1,\ \omega}$ par la norme de $L^2(\omega)$ de $[\sigma,\ \sigma+2\theta]-[\tilde{\sigma}_h,\ \tilde{\sigma}_h+2\theta]$. Ainsi on a

$$|\phi_h^1-\phi_h^2|_{0,\ \omega}+|y_h^1-y_h^2|_{0,\ \omega}\tag{4.5}$$

$$\leqq C(\|\sigma+2\theta\|_{1,\ \omega}+\|\sigma_h+2\theta\|_{1,\ \omega})\|\sigma-\tilde{\sigma}_h\|_{1,\ \omega}\leqq C\|\sigma+2\theta\|_{1,\ \omega}\|\sigma-\tilde{\sigma}_h\|_{1,\ \omega}.\tag{4.6}$$

Finalement, puisque $[\tilde{\sigma}_h,\ \tilde{\sigma}_h+2\theta]-[\sigma_h,\ \sigma_h+2\theta]\in W_h^{2k}$, on peut appliquer le théorème 9 pour obtenir :

$$\begin{aligned}&|\phi_h^2-\phi_h|_{0,\ \omega}+|y_h^2-y_h|_{1,\ \omega}\\ &\leqq C(|\tilde{\sigma}_h+2\theta|_{0,\ \omega}+|\sigma_h+2\theta|_{0,\ \omega})|\tilde{\sigma}_h-\sigma_h|_{0,\ \omega}\end{aligned}$$

$$\leqq C(|\tilde{\sigma}_h + 2\theta|_{0,\ \omega} + |\sigma_h + 2\theta|_{0,\ \omega})(|\sigma - \tilde{\sigma}_h|_{0,\ \omega} + |\sigma - \sigma_h|_{0,\ \omega}). \tag{4.7}$$

Observons que $|\sigma|_{0,\ \omega} \leqq \varepsilon,\ |\sigma_h|_{0,\ \omega} \leqq \varepsilon$. De plus, puisque $(\sigma,\ \zeta)$ est solution du problème continu, on a $\zeta \in H^3(\omega) \cap H_0^2(\omega)$ et estimation $\|\zeta\|_{3,\ \omega} \leqq C\|\zeta\|_{2,\ \omega}$ grâce au théorème de régularité démontré dans [7]. Donc

$$\|\sigma\|_{1,\ \omega} \leqq C\|\zeta\|_{3,\ \omega} \leqq C\varepsilon \tag{4.8}$$

et

$$\|\phi\|_{1,\ \omega} \leqq C|[\sigma,\ \sigma + 2\theta]|_{0,\ \omega} \leqq C\|\sigma\|_{1,\ \omega}\|\sigma + 2\theta\|_{1,\ \omega} \leqq C\varepsilon^2, \tag{4.9}$$

d'où (4.1) avec $r_h = \varepsilon\|\sigma - \tilde{\sigma}_h\|_{1,\ \omega}$. ■

Théorème 14 *Soit* $(\sigma,\ \zeta) \in \widetilde{\Sigma} \times \widetilde{V}$ *solution du problème* $(\widetilde{P})$ *[cf. (1.5)] avec second membre* $f \in L^2(\omega)$. *Alors il existe une constante* $C > 0$*indépendante de* f *telle que :*

$$|\sigma|_{0,\ \omega} + |\zeta|_{1,\ \omega} \leqq C|f|_{0,\ 1,\ \omega}. \tag{4.10}$$

Preuve. Gràce a la condition de Brezzi, il suffit de démontrer que $|\sigma|_{0,\ \omega}$ est bornée par $|f|_{0,\ 1,\ \omega}$. On a déjà remarque que $\zeta \in H^3 \cap H_0^2(\omega)$ et σ la tenseur des dérivées second de ζ. Donc on a

$$\begin{aligned} |\sigma|_{0,\ \omega}^2 = a(\sigma,\ \sigma) = \int_\omega f\zeta dx \leqq |f|_{0,\ 1,\ \omega}|\zeta|_{0,\ \infty,\ \omega}, \\ \leqq C|f|_{0,\ 1,\ \omega}\|\zeta\|_{2,\ \omega} \leqq C|f|_{0,\ 1,\ \omega}|\sigma|_{0,\ \omega}. \end{aligned}$$

■

Lemme 5 *Supposons que* $\zeta_0 \in H^3(\omega) \cap H_0^2(\omega)$. *Alors il existe* $C > 0$ *indépendante de* h *et de* ε *telle que*

$$|\lambda - \lambda_h| \leqq C(h^2 + \varepsilon^2 h + r_h + \varepsilon|\sigma - \sigma_h|_{0,\ \omega}). \tag{4.11}$$

Preuve. On a

$$\lambda = \lambda_0(1 - \varepsilon^{-1}\int_\omega [\sigma + \theta,\ \phi]\ \zeta_0\ dx),\ \lambda_h = \lambda_{0h}(1 - \varepsilon^{-1}\int_\omega [\sigma_h + \theta,\ \phi_h]\ \zeta_{0h}\ dx$$

$$\lambda_h - \lambda = (\lambda_{0h} - \lambda_0) + \varepsilon^{-1}\lambda_0\int_\omega [\sigma + \theta, \phi]\ \zeta_0\ dx - \varepsilon^{-1}\lambda_{0h}\int_\omega [\sigma_h + \theta, \phi_h]\ \zeta_{0h}\ dx. \tag{4.12}$$

Et on a

$$\begin{aligned}
\lambda_h - \lambda &= (\lambda_{0h} - \lambda_0) + \varepsilon^{-1}(\lambda_0 - \lambda_{0h}) \int_\omega [\sigma + \theta, \phi]\ \zeta_0\ dx \\
&+ \lambda_{0h}\ \varepsilon^{-1} \int_\omega [\sigma - \sigma_h, \phi]\ \zeta_0\ dx, \\
&+ \lambda_{0h}\ \varepsilon^{-1} \int_\omega [\sigma_h + \theta, \phi](\zeta_0 - \zeta_{0h})\ dx, \\
&+ \lambda_{0h}\ \varepsilon^{-1} \int_\omega [\sigma_h + \theta, \phi - \phi_h]\ \zeta_{0h}\ dx.
\end{aligned}$$

Nous allons semplifie cette equation. Alors on obtient :

$$\begin{aligned}
\lambda_h - \lambda &= (\lambda_{0h} - \lambda_0) + \varepsilon^{-1}\lambda_0 \int_\omega [\sigma + \theta, \phi]\ \zeta_0\ dx - \varepsilon^{-1}\lambda_{0h} \int_\omega [\sigma + \theta, \phi]\ \zeta_0\ dx \\
&+ \lambda_{0h}\ \varepsilon^{-1} \int_\omega [\sigma + \theta, \phi]\ \zeta_0\ dx - \lambda_{0h}\ \varepsilon^{-1} \int_\omega [\sigma_h + \theta, \phi]\ \zeta_0\ dx \\
&+ \lambda_{0h}\ \varepsilon^{-1} \int_\omega [\sigma_h + \theta, \phi]\zeta_0 - \lambda_{0h}\ \varepsilon^{-1} \int_\omega [\sigma_h + \theta, \phi]\zeta_{0h}\ dx \\
&+ \lambda_{0h}\ \varepsilon^{-1} \int_\omega [\sigma_h + \theta, \phi]\ \zeta_{0h}\ dx - \lambda_{0h}\ \varepsilon^{-1} \int_\omega [\sigma_h + \theta, \phi_h]\ \zeta_{0h}\ dx.
\end{aligned}$$

$$\lambda_h - \lambda = (\lambda_{0h} - \lambda_0) + \varepsilon^{-1}\lambda_0 \int_\omega [\sigma + \theta, \phi]\ \zeta_0\ dx - \varepsilon^{-1}\lambda_{0h} \int_\omega [\sigma_h + \theta, \phi_h]\ \zeta_{0h}\ dx. \tag{4.13}$$

Sous l'hypothèse $\zeta_0 \in H^3(\omega)$, on a :

$$|\zeta_0 - \zeta_{0h}|_{1,\ \omega} = O(h^2),\ \ |\lambda_0 - \lambda_{0h}| = O(h^2).$$

C-à-d :

$$|\zeta_0 - \zeta_{0h}|_{1,\ \omega} \leqq Ch^2. \tag{4.14}$$

$$|\lambda_0 - \lambda_{0h}| \leqq Ch^2. \tag{4.15}$$

et $\{\zeta_{0h}\}$ est bornée dans $L^\infty(\omega)$, c-à-d $|\zeta_0|_{0,\ \infty,\ \omega} \leqq C$. Par ailleurs, pour θ petit assez et $|\theta|_{0,\ \omega} \leqq C\varepsilon$. on a $|\sigma + \theta|_{0,\ \omega} \leqq C\varepsilon$ et grâse a au théorème 14. et $|\phi|_{0,\ \omega} \leqq C\varepsilon^2$ et on utilise l'equation suivant :

$$\varepsilon^{-1}|\lambda_{0h}| \int_\omega [\sigma_h + \theta, \phi_h]\zeta_{0h}\ dx \leqq C\varepsilon^{-1}|\sigma_h + \theta|_{0,\ \omega}|\phi_h|_{0,h}|\zeta_{0h}|_{0,\ \infty,\ \omega},\ \ |\sigma_h + \theta|_{0,\ \omega} \leqq C\varepsilon.$$

Alors on obtient :

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{-1}|(\lambda_0-\lambda_{0h})|\int_\omega[\sigma+\theta,\phi]\ \zeta_0\ dx &\leqq \varepsilon^{-1}Ch^2|\sigma+\theta|_{0,\ \omega}|\phi|_{0,\ \omega}|\zeta_0|_{0,\ \infty,\ \omega}\\
&\leqq \varepsilon^{-1}Ch^2(C\varepsilon)(C\varepsilon^2)(C)\\
&\leqq C^4h^2\varepsilon^2\\
&= Ch^2\varepsilon^2, \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{-1}|\lambda_{0h}|\int_\omega[\sigma-\sigma_h,\phi]\ \zeta_0\ dx &\leqq C\varepsilon^{-1}|\sigma-\sigma_h|_{0,\ \omega}|\phi|_{0,\ \omega}|\zeta_0|_{0,\ \infty,\ \omega}\\
&\leqq C\varepsilon^{-1}|\sigma-\sigma_h|_{0,\ \omega}(C\varepsilon^2)(C)\\
&\leqq C^3\varepsilon|\sigma-\sigma_h|_{0,\ \omega}\\
&\leqq C\varepsilon|\sigma-\sigma_h|_{0,\ \omega}, \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

de (4.14) alors :

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{-1}|\lambda_{0h}|\int_\omega[\sigma_h+\theta,\phi](\zeta_0-\zeta_{0h})\ dx &\leqq \varepsilon^{-1}C|\sigma_h+\theta|_{0,\ \omega}|\phi|_{0,\ \omega}|\zeta_h-\zeta_{0h}|_{1,\ \omega}\\
&\leqq \varepsilon^{-1}C(C\varepsilon)(C\varepsilon^2)(Ch^2)\\
&\leqq C^4h^2\varepsilon^2\\
&= Ch^2\varepsilon^2, \qquad (4.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{-1}|\lambda_{0h}|\int_\omega[\sigma_h+\theta,\phi-\phi_h]\ \zeta_{0h}\ dx &\leqq \varepsilon^{-1}C|\sigma_h+\theta|_{0,\ \omega}|\phi-\phi_h|_{0,\ \omega}|\zeta_{0h}|_{0,\ \infty,\ \omega}\\
&\leqq \varepsilon^{-1}C(C\varepsilon)(C|\phi-\phi_h|_{0,\ \omega})\\
&\leqq C^3|\phi-\phi_h|_{0,\ \omega}\\
&= C|\phi-\phi_h|_{0,\ \omega}. \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

De (4.15), (4.16), (4.17), (4.18), (4.19), donc on obtient :

$$|\lambda-\lambda_h|\leqq Ch^2+Ch^2\varepsilon^2+C\varepsilon|\sigma-\sigma_h|_{0,\ \omega}+Ch^2\varepsilon^2+C|\phi-\phi_h|_{0,\ \omega},$$

d'où on déduit (4.11). ■

Maintenant on donne les estimations finales.

Théorème 15 *On suppose que $\zeta_0 \in H^3(\omega) \cap H_0^2(\omega)$. Alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et de ε telle que, pour ε assez petit,*

$$|\sigma - \sigma_h|_{0,\omega} + |\zeta - \zeta_h|_{1,\omega} \leqq Ch + Ch^2\varepsilon + s_h, \tag{4.20}$$

$$|\lambda - \lambda_h| \leqq Ch^2 + Ch\varepsilon + Cr_h + C\varepsilon s_h, \tag{4.21}$$

où r_h est la apparaissant dans l'inéqualité (4.1) et $s_h \to 0$ lorsque $h \to 0$.

Preuve. On a d'abord :

$$S^\varepsilon \zeta = (\lambda - \lambda_0)[f,\ \sigma + \theta] + [\phi,\ \sigma + \theta], \tag{4.22}$$

$$S_h^\varepsilon \zeta_h = (\lambda_h - \lambda_{0h})[f,\ \sigma_h + \theta] + [\phi,\ \sigma_h + \theta]. \tag{4.23}$$

Choisissons $\tilde{\sigma_h},\ \tilde{\phi_h} \in \Sigma_h$ tels que $\|\sigma - \tilde{\sigma_h}\|_{1,\ \omega} \to 0,\ \|\phi - \tilde{\phi_h}\|_{1,\ \omega} \to 0$ lorsque $h \to 0$. On définit

$$\tilde{S_h^\varepsilon} \zeta_h = (\lambda_h - \lambda_{0h})[f,\ \sigma_h + \theta] + [\tilde{\phi_h},\ \tilde{\sigma_h} + \theta]. \tag{4.24}$$

On définit $(\beta_h^1,\ z_h^1),\ (\beta_h^2,\ z_h^2)$ dans $\Sigma_h \times V_h$ solutions de problème de Fredhölm (PF_h) avec second membres $P_{0h}(S^\varepsilon \zeta)$ et $P_{0h}(\tilde{S_h^\varepsilon} \zeta)$ respectivement, de sorte que l'on a

$$z = Q(S^\varepsilon \zeta),\ z_h = Q_h(S_h^\varepsilon \zeta_h),\ z_h^1 = Q_h(S^\varepsilon \zeta),\ z_h^2 = Q_h(\tilde{S_h^\varepsilon} \zeta_h). \tag{4.25}$$

(i) Tout d'abord, grâce au théorème 13 , on a
$|\beta - \beta_h^1|_{0,\ \omega} + |z - z_h^1|_{1,\ \omega} \leqq Ch(\|z\|_{3,\ \omega} + \|\zeta\|_{3,\ \omega}) \leqq Ch\varepsilon^2 + Ch,$
puisque

$$\|z\|_{3,\ \omega} \leqq C\|\sigma\|_{1,\ \omega}^2 \leqq Ch. \tag{4.26}$$

On utilise par la suite les definitions de $\beta_h = M_h z_h$ et $\beta_h^i = M_h z_h^i$ pour $i = 1,\ 2$.

(ii) Ensuite, grâce au même théorème 13, on a également

$$\begin{aligned}
|\beta_h^1-\beta_h^2|_{0,\ \omega}+|z_h^1-z_h^2|_{1,\ \omega} &= |M_hz_h^1-M_hz_h^2|_{0,\ \omega}+|z_h^1-z_h^2|_{1,\ \omega}\\
&= |M_h(z_h^1-z_h^2)|_{0,\ \omega}+|z_h^1-z_h^2|_{1,\ \omega}\\
&= |M_h(Q_h(S^\varepsilon\zeta)-Q_h(\tilde{S}_h^\varepsilon\zeta_h))|_{0,\ \omega}+|Q_h(S^\varepsilon\zeta)-Q_h(\tilde{S}_h^\varepsilon\zeta_h)|_{1,\ \omega}\\
&\leqq C|S^\varepsilon\zeta-\tilde{S}_h^\varepsilon\zeta_h|_{0,\ \omega}+C|S^\varepsilon\zeta-\tilde{S}_h^\varepsilon\zeta_h|_{1,\ \omega}
\end{aligned}$$

donc

$$|\beta_h^1-\beta_h^2|_{0,\ \omega}+|z_h^1-z_h^2|_{1,\ \omega}\leqq C|S^\varepsilon\zeta-\tilde{S}_h^\varepsilon\zeta_h|_{0,\ \omega}.$$

On utilise les relations (4.22) et (4.24) donc :

$$\begin{aligned}
C|S^\varepsilon\zeta-\tilde{S}_h^\varepsilon\zeta_h|_{0,\ \omega} &\leqq |((\lambda-\lambda_0)[f,\ \sigma+\theta]+[\phi,\ \sigma+\theta])\\
&- ((\lambda_h-\lambda_{0h})[f,\ \sigma_h+\theta]+[\tilde{\phi_h},\ \tilde{\sigma_h}+\theta])|_{0,\ \omega}.
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
R &= |(\lambda-\lambda_0)[f,\ \sigma+\theta]-(\lambda_h-\lambda_{0h})[f,\ \sigma_h+\theta]|_{0,\ \omega}\\
&= |\lambda[f,\ \sigma+\theta]-\lambda_0[f,\ \sigma+\theta]-\lambda_h[f,\ \sigma_h+\theta]+\lambda_{0h}[f,\ \sigma_h+\theta]|_{0,\ \omega}\\
&= |(\lambda-\lambda_h)[f,\ \sigma+\theta]+\lambda_h[f,\ \sigma+\theta]-\lambda_0[f,\ \sigma+\theta]-\lambda_h[f,\ \sigma_h+\theta]\\
&+ (\lambda_{0h}-\lambda_0)[f,\ \sigma_h+\theta]+\lambda_0[f,\ \sigma_h+\theta]|_{0,\ \omega}\\
&= |(\lambda-\lambda_h)[f,\ \sigma+\theta]+\lambda_h[f,\ \sigma-\sigma_h]+\lambda_0[f,\ \sigma_h-\sigma]+(\lambda_{0h}-\lambda_0)[f,\ \sigma_h+\theta]\\
&+ (\lambda_h+\lambda_0)[f,\ \sigma-\sigma_h]|_{0,\ \omega},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
R &\leqq |\lambda-\lambda_h||f|_{0,\ \omega}|\sigma+\theta|_{0,\ \omega}+|\lambda_h||f|_{0,\ \omega}|\sigma-\sigma_h|_{0,\ \omega}+|\lambda_0||f|_{0,\ \omega}|\sigma_h-\sigma|_{0,\ \omega}\\
&+ |\lambda_{0h}-\lambda_0|_{0,\ \omega}|f|_{0,\ \omega}|\sigma_h+\theta|_{0,\ \omega},+|\lambda_h+\lambda_0||f|_{0,\ \omega}|\sigma-\sigma_h|_{0,\ \omega}\\
&\leqq C(h^2+\varepsilon^2h+r_h+\varepsilon|\sigma-\sigma_h|_{0,\ \omega})(C\varepsilon)+2C|\sigma_h-\sigma|_{0,\ \omega}+Ch^2(C\varepsilon)+C|\sigma-\sigma_h|_{0,\ \omega}\\
&\leqq C(h^2+\varepsilon^2h+r_h+\varepsilon|\sigma-\sigma_h|_{0,\ \omega})(C\varepsilon)+3C|\sigma_h-\sigma|_{0,\ \omega}+Ch^2(C\varepsilon)\\
&\leqq Ch^2\varepsilon+Ch\varepsilon^3+C\varepsilon r_h+C\varepsilon^2|\sigma-\sigma_h|_{0,\ \omega}+3C|\sigma_h-\sigma|_{0,\ \omega}+Ch^2(C\varepsilon)\\
&\leqq Ch^2\varepsilon+Ch\varepsilon^2+C\varepsilon r_h+C\varepsilon^2|\sigma-\sigma_h|_{0,\ \omega}. \qquad (4.27)
\end{aligned}$$

Ensuite a :

$$\begin{aligned}
|[\phi,\ \sigma+\theta]-[\tilde{\phi_h},\ \tilde{\sigma_h}+\theta]|_{0,\ \omega} &= |[\phi-\tilde{\phi_h},\ (\sigma+\theta)+(\tilde{\sigma_h}+\theta)]-[\phi,\ \tilde{\sigma}_h+\theta]+[\tilde{\phi_h},\ \sigma+\theta]|_{0,\ \omega}\\
&= |[\phi-\tilde{\phi_h},\ (\sigma+\theta)+(\tilde{\sigma_h}+\theta)]-[\phi,\ \tilde{\sigma}_h+\theta]\\
&+ [\tilde{\phi_h},\ \sigma-\tilde{\sigma}_h]+[\tilde{\phi_h},\ \tilde{\sigma}_h+\theta]|_{0,\ \omega}\\
&\leqq |[\phi-\tilde{\phi_h},\ (\sigma+\theta)+(\tilde{\sigma_h}+\theta)]|_{0,\ \omega}+[\tilde{\phi_h},\ \sigma-\tilde{\sigma}_h]|_{0,\ \omega}\\
&+ |[\tilde{\phi_h}-\phi,\ \tilde{\sigma}_h+\theta]|_{0,\ \omega}\\
&\leqq \|\phi-\tilde{\phi_h}\|_{1,\ \omega}(\|\sigma+\theta)\|_{1,\ \omega}+\|(\tilde{\sigma_h}+\theta)\|_{1,\ \omega})+\|\tilde{\phi_h},\ \sigma-\tilde{\sigma}_h\|_{1,\ \omega}\\
&+ \|\tilde{\phi_h}-\phi,\ \tilde{\sigma}_h+\theta\|_{1,\ \omega}\\
&\leqq \|\phi-\tilde{\phi_h}\|_{1,\ \omega}(C\varepsilon)+(C\varepsilon^2)\|\sigma-\tilde{\sigma}_h\|_{1,\ \omega}+(C\varepsilon)\|\tilde{\phi_h}-\phi\|_{1,\ \omega}\\
&\leqq (2C\varepsilon)\|\phi-\tilde{\phi_h}\|_{1,\ \omega}+(C\varepsilon^2)\|\sigma-\tilde{\sigma}_h\|_{1,\ \omega}\\
&\leqq C\varepsilon^2\|\sigma-\tilde{\sigma}_h\|_{1,\ \omega}+C\varepsilon\|\phi-\tilde{\phi_h}\|_{1,\ \omega}. \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

Donc de (4.27) et (4.28), on obtient :

$$|\beta_h^1-\beta_h^2|_{0,\ \omega}+|z_h^1-z_h^2|_{1,\ \omega}\leqq C\varepsilon^2|\sigma-\sigma_h|_{0,\ \omega}+Ch^2\varepsilon+Ch\varepsilon^2+C\varepsilon r_h+C\varepsilon^2\|\sigma-\tilde{\sigma}_h\|_{1,\ \omega}+C\varepsilon\|\phi-\tilde{\phi_h}\|_{1,\ \omega}. \qquad (4.29)$$

(iii) Finalement, grâce au théorème 10, on a (puisque $\tilde{S}_h^\varepsilon\zeta_h - S_h^\varepsilon\zeta_h \in W_h^{2k}$) :

$$\begin{aligned}
|\beta_h^2-\beta_h|_{0,\ \omega}+|z_h^2-z_h|_{1,\ \omega} &= |M_hz_h^2-M_hz_h|_{0,\ \omega}+|z_h^2-z_h|_{1,\ \omega}\\
&= |M_h(z_h^2-z_h)|_{0,\ \omega}+|z_h^2-z_h|_{1,\ \omega}
\end{aligned}$$

on utilise (4.25) alors :

$$\begin{aligned}
|\beta_h^2-\beta_h|_{0,\ \omega}+|z_h^2-z_h|_{1,\ \omega} &\leqq |M_hQ_h(\tilde{S}_h^\varepsilon\zeta_h)-Q_h(S_h^\varepsilon\zeta_h)|_{0,\ \omega}+|Q_h(\tilde{S}_h^\varepsilon\zeta_h)-Q_h(S_h^\varepsilon\zeta_h)|_{1,\ \omega}\\
&\leqq C|Q_h(\tilde{S}_h^\varepsilon\zeta_h-S_h^\varepsilon\zeta_h)|_{0,\ 1,\ \omega}\\
&\leqq C|\tilde{S}_h^\varepsilon\zeta_h-S_h^\varepsilon\zeta_h|_{0,\ 1,\ \omega}.
\end{aligned}$$

De (4.23) et (4.24), on a :

$$\begin{aligned}
C|\tilde{S}_h^\varepsilon\zeta_h - S_h^\varepsilon\zeta_h|_{0,\ 1,\ \omega} &= C|((\lambda_h - \lambda_{0h})[f,\ \sigma_h + \theta] + [\tilde{\phi_h},\ \tilde{\sigma_h} + \theta]) \\
&- ((\lambda_h - \lambda_{0h})[f,\ \sigma_h + \theta] + [\phi_h,\ \sigma_h + \theta])| \\
&= C|[\tilde{\phi_h},\ \tilde{\sigma_h} + \theta] - [\phi_h,\ \sigma_h + \theta]| \\
&= C|[\tilde{\phi_h} - \phi_h,\ \tilde{\sigma_h} + \theta] + [\phi_h,\ \tilde{\sigma}_h + \theta] - [\phi_h,\ \sigma_h - \tilde{\sigma}_h] - [\phi_h,\ \tilde{\sigma}_h + \theta]| \\
&= C|[\tilde{\phi_h} - \phi_h,\ \tilde{\sigma_h} + \theta] - [\phi_h,\ \sigma_h - \tilde{\sigma}_h]| \\
&\leqq C\{|\phi_h|_{0,\ \omega}|\sigma_h - \tilde{\sigma}_h|_{0,\ \omega} + |\tilde{\sigma}_h + \theta|_{0,\ \omega}|\phi_h - \tilde{\phi}_h|_{0,\ \omega}\} \\
&\leqq C\{C\varepsilon^2|\sigma_h - \tilde{\sigma}_h|_{0,\ \omega} + C\varepsilon|\phi_h - \tilde{\phi}_h|_{0,\ \omega}\} \\
&\leqq C\{C\varepsilon^2|\sigma_h - \sigma + \sigma - \tilde{\sigma}_h|_{0,\ \omega} + C\varepsilon|\phi_h - \phi + \phi - \tilde{\phi}_h|_{0,\ \omega}\} \\
&\leqq C\{\varepsilon^2|\sigma - \sigma_h|_{0,\ \omega} + \varepsilon^2|\sigma - \tilde{\sigma}_h|_{0,\ \omega} + \varepsilon|\phi - \phi_h|_{0,\ \omega} + \varepsilon|\phi - \tilde{\phi}_h|_{0,\ \omega}\}.
\end{aligned}$$

Donc

$$|\beta_h^2 - \beta_h|_{0,\ \omega} + |z_h^2 - z_h|_{1,\ \omega} \leqq C\{\varepsilon^2|\sigma - \sigma_h|_{0,\ \omega} + \varepsilon^2|\sigma - \tilde{\sigma}_h|_{0,\ \omega} + \varepsilon|\phi - \phi_h|_{0,\ \omega} + \varepsilon|\phi - \tilde{\phi}_h|_{0,\ \omega}\}. \tag{4.30}$$

On a

$$\begin{aligned}
|\beta - \beta_h^1 + \beta_h^1 - \beta_h^2 + \beta_h^2 - \beta_h|_{0,\ \omega} &+ |z - z_h^1 + z_h^1 - z_h^2 + z_h^2 - z_h|_{1,\ \omega} \\
&\leqq |\beta - \beta_h^1|_{0,\ \omega} + |\beta_h^1 - \beta_h^2|_{0,\ \omega} + |\beta_h^2 - \beta_h|_{0,\ \omega} \\
&+ |z - z_h^1|_{1,\ \omega} + |z_h^1 - z_h^2\|_{1,\ \omega} + |z_h^2 - z_h|_{1,\ \omega} \\
&\leqq Ch\varepsilon^2 + Ch + Ch^2\varepsilon + Ch\varepsilon^2 + C\varepsilon r_h + C\varepsilon^2|\sigma - \sigma_h|_{0,\ \omega} \\
&+ C\varepsilon^2\|\sigma - \tilde{\sigma}_h\|_{1,\ \omega} + C\varepsilon\|\phi - \tilde{\phi}_h\|_{1,\ \omega} + C\varepsilon^2|\sigma - \sigma_h|_{0,\ \omega} \\
&+ C\varepsilon^2|\sigma - \tilde{\sigma}_h|_{0,\ \omega} + C\varepsilon|\phi - \phi_h|_{0,\ \omega} + C\varepsilon|\phi - \tilde{\phi}_h|_{0,\ \omega} \\
&\leqq Ch + Ch^2\varepsilon + 2Ch\varepsilon^2 + C\varepsilon r_h + 2C\varepsilon^2|\sigma - \sigma_h|_{0,\ \omega} \\
&+ Cs_h + C\varepsilon^2|\sigma - \tilde{\sigma}_h|_{0,\ \omega} + C\varepsilon|\phi - \phi_h|_{0,\ \omega} + C\varepsilon|\phi - \tilde{\phi}_h|_{0,\ \omega}.
\end{aligned}$$

De (4.27) (4.29) (4.30) et on pose

$$s_h = \varepsilon(\|\sigma - \tilde{\sigma}_h\|_{1,\ \omega} + \|\phi - \tilde{\phi}_h\|_{1,\ \omega}). \tag{4.31}$$

Puisque $s_h \to 0$ lorsque $h \to 0$. Alors on obtient :

$$|\beta - \beta_h|_{0,\ \omega} + |z - z_h|_{1,\ \omega} \leqq C\{s_h + \varepsilon^2|\sigma - \sigma_h|_{0,\ \omega}\} + Ch + Ch^2\varepsilon, \tag{4.32}$$

et donc

$$|\sigma - \sigma_h|_{0,\ \omega} + |\zeta - \zeta_h|_{0,\ \omega} \leqq Ch\varepsilon + Ch + Ch^2\varepsilon + s_h + C\varepsilon^2|\sigma - \sigma_h|_{0,\ \omega}. \tag{4.33}$$

Si ε est suffisamment petit pour que $C\varepsilon^2 \leqq 1/2$ (par exemple) on obtient (4.20). Alors :

$$|\sigma - \sigma_h|_{0,\ \omega} \leqq Ch\varepsilon + Ch + Ch^2\varepsilon + s_h + 1/2|\sigma - \sigma_h|_{0,\ \omega}$$

$$|\sigma - \sigma_h|_{0,\ \omega} \leqq Ch\varepsilon + Ch + Ch^2\varepsilon + s_h,$$

$$|\sigma - \sigma_h|_{0,\ \omega} + |\zeta - \zeta_h|_{0,\ \omega} \leqq Ch\varepsilon + Ch + Ch^2\varepsilon + s_h.$$

Donc l'estimation (4.21) est une conséquence directe de (4.11) et de (4.20).

$$|\lambda - \lambda_h| \leqq C(h^2 + \varepsilon^2 h + r_h + \varepsilon|\sigma - \sigma_h|_{0,\ \omega}),$$

$$|\sigma - \sigma_h|_{0,\omega} + |\zeta - \zeta_h|_{1,\omega} \leqq Ch + Ch^2\varepsilon + s_h.$$

Donc

$$|\sigma - \sigma_h|_{0,\omega} \leqq Ch + Ch^2\varepsilon + s_h,$$

alors

$$|\lambda - \lambda_h| \leqq C(h^2 + \varepsilon^2 h + r_h + \varepsilon(Ch + Ch^2\varepsilon + s_h)),$$

$$|\lambda - \lambda_h| \leqq Ch^2 + C\varepsilon^2 h + Cr_h + Ch\varepsilon + Ch^2\varepsilon^2 + C\varepsilon s_h,$$

$$|\lambda - \lambda_h| \leqq Ch^2 + Ch\varepsilon + Cr_h + C\varepsilon s_h.$$

■

Remarque 16 *Si $\zeta_0 \in H^4(\omega) \cap H_0^2(\omega)$, alors on a de même pour z et donc $\sigma,\ \phi \in (H^2(\omega))_s^4$. Par conséquent on a*

$$\|\sigma - \tilde{\sigma}_h\|_{1,\ \omega} \leqq Ch(\|\zeta\|_{4,\ \omega} + \|\zeta_0\|_{4,\ \omega})$$

et de même pour $\|\phi - \tilde{\phi}_h\|_{1,\ \omega}$. Dans ces conditions on obtient

$$|r_h| \leqq C\varepsilon h,\ \ |s_h| \leqq C\varepsilon h$$

et donc on a

$$\begin{cases} |\sigma - \sigma_h|_{0,\ \omega} + |\zeta - \zeta_h|_{1,\ \omega} \leqq Ch + Ch^2\varepsilon, \\ |\lambda - \lambda_h| \leqq Ch^2 + Ch\varepsilon. \end{cases} \tag{4.34}$$

Conclusion

La méthode de Miyoshi est bien adaptée pour les équations de Marguerre-von Kármán parce que l'on obtient l'approximation du déplacement, de la fonction d'Airy et du tenseur des contraintes (dérivées secondes de la fonction d'Airy). Mais on a va qu'il y a une difficulté sérieuse, même dans le cas linéaire, qui nous a conduit à supposer que f est un polynôme de degré 2. On a démontré la convergence de la méthode avec l'hypothèse minimale de régularité, de la solution dans $H^3(\omega)$.

Bibliographie

[1] F. Brezzi et P.A. Raviart, *Mixed Finite Element Methods for Fourth Order Elliptic Equations*, Rapport Interne, n 9, École polytechnique, palaiseau, (1976).

[2] F. Brezzi, On the Existance, Uniqueness and Approximation of Saddle-Point Problems Arising from Lagrangian Multipliers, R A I R O, Analyse numerique, vol R-2, (1974), p. 129-151.

[3] K. Marguerre, *Zur Theorie der gekrummten Platte grosser Formanderung, in : Proceedings, Fifth International Congress for Applied Mechanics*, (1938), p. 93-101.

[4] P.G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic problems*, North-Holland, Amasterdam, (1978).

[5] P.G Ciarlet et P.A. Raviart, A Mixed Finite Element Method for the Biharmonic Equation in Mathematical, Aspects of Finit Elements in Partial Differential Equations, C. De Boor, éd. (1974),p. 125-145.

[6] P.G. Ciarlet, J.C. Paumier, *A justification of the Marguerre-von Kármán equations*, Comput. Mech. 1 (1986), p. 177-202.

[7] S. Kesavan, *La méthode de Kikuchi appliquée aux équations de von Kármán*, Numerische Mathematik, vol. 32, (1979), p. 209-232.

[8] S. Kesavan, *Une méthode d'éléments finis mixte pour les équations de von Kármán*, RAIRO Anal. Numer., 14(2), (1980), p. 149-173.

[9] T. Miyoshi, *A Finite Element Method for the Solution of Fourth Order Partial Differential Equations*, Kumamoto J.Sc.(Math.), vol. 9, (1973), p. 87-116.

[10] T. von Kármán, H.S. Tsien, *The buckling of spherical shells by external pressure*, J. Aero. Sci. 7 (1939), p. 43-50.

[11] T. Von Kármán, *Festigkeitsproblem in Maschinenball. Encyl, du Math, Wissenschaften, Taubner*, IV-4, (1910), p. 311-385.

[12] Vivette Girault. Pierre-Arnaud Raviart, *Finite Element methods for Navier-Stokes Equation*, Springer-Verlag, (1986).

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة التقريب العددي للحلول الغير تافهة لمعادلات "مارغر- فون كارمان" من اجل انبعاج الهياكل ضعيفة الانحناء. نقدم طريقة العناصر المنتهية المختلطة ثم نعمم النتائج المتحصل عليها من "كيزافن"[8] من اجل معادلا ت " فون- كارما ن" الى معادلات "مارغر- فون كارمان" .

الكلمات المفتاحية :

المرونة الغير خطية, نظرية الهياكل ضعيفة الانحناء, طريقة العناصر المنهية المختلطة, معادلات "مارغر- فون كارمان" .

Résumé

L'objectif de ce travail est l'étude de l'approximation numérique des solutions non-triviales des équations de Marguerre-von Kármán pour le flambage d'une coque peu-profonde. On propose une méthode d' éléments finis mixte. On étend les résultats obtenu par Kesavan [8] pour les équations de von Kármán au les équations de Marguerre-von Kármán .

Mots clés:

Elasticité non linéaire, Théorie de coque peu-profonde, Méthode d'éléments finis mixtes, Équations de Marguerre-von Kármán.

Abstract

The aim of this work is to study the numerical approximation of non-trivial solutions of the Marguerre-von Kármán equations for the buckling for shallow shell. We propose mixed finite element method. We extend the results obtained by Kesavan [8] for the von Kármán equations to the Marguerre-von Kármán equations.

Key words:

Nonlinear elasticity, the shallow shell theory, Mixed finite element method, Marguerre-von Kármán equations.