UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse

Par :Moulay Aicha

Thème

Existence de solution pour inéquation variationnelle parabolique.

Soutenu publiquement le :21 /05/2015

Devant le jury composé de :

Mr. Merabet Smail	M. A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Président
Mr. Ghezal Abderrazek	M. A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr. Bensayah Abdallah	M. A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Dédication

Je dédie ce modeste travail :

-Aux joyaux de ma vie "mes parents" qui sont la source de ma réussite, je souhaite qu'ils trouvent à travers ce mémoire le faible témoignage de leurs efforts et sacrifices.

-A mes frères,

- A mes soeurs,

-A toute la famille et

- A mes chers amies,

- Je tiens à remercier tous les membres de ma promotion.

-Et a tous mes professeurs.

Remerciment

Tout d'abord, je remercie Dieu qui nous guident pour terminer ce travail humble.

J'exprime ma gratitude, mes remerciements á mes parents qui ont fait de leur mieux pour m'aider.

Je tiens a remercier vivement :

Mon encadreur **Mr.Abdallah Bensayah** qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils et ses dirigés du début á la fin de ce travail.

A Mr. Chacha Djamel Ahmed, Mr. Merabet Smail, Mr. Ghezal Abderrazek qui ont bien voulu faire partie du jury.

Je remercie aussi les personnes qui m'ont aidé et encouragé le long de ce travail.

Table des matières

Notations

- V : espace de Hilbert avec le produit scalaire (.,.) et la norme associée $\|.\|$.
- K : est un ensemble non vide convexe fermé de V.
- $a(.,.) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire, continue et V-elliptique sur $V \times V$ continue :$\exists\, c > 0\ \forall u, v \in V\ |a(u,v)| \leq c\|u\|_V \|v\|_V$.
  coercive :$\exists\, \alpha > 0\, \forall u, v \in V\ |a(u,v)| \geq \alpha \|u\|_V^2$.

- V' :l'espace dual de V.
- $\longrightarrow$ convergence forte.
- $\rightharpoonup$ convergence faible.
- En général, nous ne supposons pas $a(.,.)$ symétrique, puisque dans certaines applications formes bilinéaires non symétriques peuvent se produire naturellement.

Introduction

Dans les cinquante dernières années, les inéquations variationnelles sont devenues un outil pertinent dans l'étude des problèmes non linéaires en physique et en mécanique.

La théorie des inéquation variationnelles ont été faites a partir des résultats concernant les problèmes unilatéraux obtenus par Signorini [4] et Fichera [5]. La théorie mathématiques obtenus par Stampacchia [6], Lions et Stampacchia [7] et puis développés par : Brézis [8],[9], Stampacchia [10], Lions [11], Mosco [12], Kinderlehrer et Stampacchia[13], et pour l'approximation des inéquations variationnelles on rappelle, les contributions de Mosco [14], Glowinski, Lions et Trémolières [15] ou Glowinski [16].

Les inéquations variationnelles permettent souvent par une résolution approchée de proposer une modélisation des courants océaniques et des mouvements des masses d'air de l'atmosphère pour les météorologistes, la simulation numérique du comportement des gratte-ciel ou des ponts sous l'action du vent pour les architectes et ingénieurs, des avions, trains ou voitures á grandes vitesse pour leurs bureaux d'études concepteurs, mais aussi l'écoulement de l'eau dans un tuyau et de nombreux autres phénomènes d'écoulement de divers fluides.

D'après Lions-Stampacchia [7] en 1967 on trouve L'IV d'une façon générale, et plus précise en 1968 les problèmes unilatéraux par Jacque-Louis Lions [19] qui permet de voir l'existence et l'unicité d'IVE, après en généralise les résultats a partir [20], qui sera ensuite également être utilisé pour étudier les problèmes de type parabolique [17] avec l'ouvrage de Duvaut et Lions[18], ou on trouve des résultats plus de plus généraliser.

Ce mémoire est divisé en 3 chapitres.

On début notre travail par un chapitre reprend de façon générale, les définitions, et les résultats fondamentaux qui seront essentiels pour comprendre les chapitres suivantes.

Le deuxième chapitre est consacré á l'étude d'inéquation variationnelle elliptique (existence et unicité).
Au dernier chapitre, on s'intéresse de l'existence et l'unicité d'inéquation variationnelle parabolique.

Chapitre 1

Préliminaires mathématiques

Dans ce chapitre, nous abordons certains concepts mathématiques que nous devrions connaitre pour un usage dans notre thème.

1.1 Les espaces fonctionnelles

1.1.1 L'espace $L^p(0,T;V)$

Soit un intervalle $[0,T] \subset \mathbb{R}$ (en général $T < +\infty$)et un espace de Banach V avec un norme $\|.\|_V$, on désigne par $L^P(0,T,V)$ l'espaces des classes de fonctions $t \longrightarrow f(t)$, qui sont mesurables a partir de $[0,T] \longrightarrow V$ pour la mesure dt et telles que :

$$\|f\|_{L^p(0,T,V)} = (\int_0^T \|f(x)\|_V^p dx)^{\frac{1}{p}} < +\infty \qquad (p \neq +\infty)$$

$$\|f\|_{L^\infty(0,T,V)} = \sup_{t\in[0,T]} ess\|f(t)\|_V < +\infty$$

Les espaces $L^p(0,T,V)$ sont des espaces de Banach pour la première norme si $p \neq +\infty$, et pour la deuxième norme si $p = +\infty$.
Si V est un espace de Hilbert équipée avec un produit scalaire $(.,.)_V$, alors l'espace $L^2(0,T,V)$ est aussi un espace de Hilbert pour la produit scalaire :

$$(f,g)_{L^2(0,T,V)} = \int_0^T (f,g)_V dx$$

1.1.2 Les Espaces L^p

soit Ω est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$, pour p donné avec $1 \leq p < +\infty$ On désigne pour $L^p(\Omega)$ l'espaces des classes de fonctions v mesurables sur Ω et telles que :

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{1.1}$$

L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme(1.1)est un espace de Banach (évidemment (1.1)n'est pas une norme si $0 < p < 1$). De plus, il est séparable et pour $1 < p < \infty$ réflexif.
Les éléments de $L^p(\Omega)$. Comme classes d'équivalence de fonctions mesurables, seront identifier si elles sont égales presque partout dans Ω. Mais, pour simplifier l'écriture, on note $v \in L^p(\Omega)$ pour tout v satisfaisant (1.1), et on fait la convention $v = 0$ dans $L^p(\Omega)$ si $v(x) = 0$ p.p.dans Ω.
Pour $p = 2$, $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, le produit scalaire correspondante a la norme (1.1) étant donné par

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)\, dx$$

On va identifier l'espace $L^p(\Omega)$ a son dual (ce qui n'est pas vrais dans d'autres cas, pour $p \neq 2$).
Pour $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$, est l'espace des(classes de) fonction v mesurables et essentiellement bornées sur Ω i.e. Il existe une constant C telle que $|v(x)| \leq C$ p.p sur Ω. C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup ess_{x\in\Omega}|v(x)| = \inf\{C; |v(x)| \leq C \ \ p.p \ \ x \in \Omega\}$$

-La notion de convergence faible dans $L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$ devient comme suit :

- Si $1 \leq p < +\infty$, alors $v_n \rightharpoonup v$, faible dans $L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$ si :

$$\int_\Omega (v_n(x), u(x))\, dx \longrightarrow \int_\Omega (v(x), u(x)) \ \ \forall u \ \in L^q(\Omega; \mathbb{R}^N).$$

- Si $p = \infty$, alors $v_n \rightharpoonup v$ faible étoile dans $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$ si :

$$\int_\Omega (v_n(x), u(x))\, dx \longrightarrow \int_\Omega (v(x), u(x)) \ \ \forall u \ \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^N).$$

1.1.3 Espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

$1 \leq p \leq \infty$, on a $D(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow D^{'}(\Omega)$, soit Ω est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$, C'est la définition de l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

$$W^{m,p} = \{v, D^{\alpha}v \in L^p(\Omega), \;\; pour \;\; |\alpha| \leq m\}$$

ou $D^{\alpha}v$ est la dérivée au sens des distributions pour tout $v \in L^p(\Omega)$.

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^{\alpha}v\|^p_{L_p(\Omega)}\right)^{\dfrac{1}{p}} \quad si \;\; p \;\; \in [1,\infty] \; \|v\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha|\leq m} \|D^{\alpha}v\|_{L^{\infty}}(\Omega)$$

De façon évidente, on a $W^{m,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. La semi-norme sur $W^{m,p}(\Omega)$ est définie par

$$|v|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^{\alpha}v\|^p_{L_p(\Omega)}\right)^{\dfrac{1}{p}} \quad si \; p \in [1,\infty] \; |v|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha|=m} \|D^{\alpha}v\|_{L^{\infty}}(\Omega)$$

Dans le cas $p = 2$, on utilise la notation

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$$

Définition 1.1.1 *Soient B_1 et B_2 deux espaces de Banach, on dit que B_1 s'injecte d'une façon continue dans B_2 et on note $B_1 \hookrightarrow B_2$ si :*

-$B_1 \subset B_2$.

On dit que B_1 s'injecte d'une façon compacte dans B_2, $B_1 \hookrightarrow B_2$ si :

-L'image de tout borné de B_1 est relativement compact dans B_2.

Théorème 1.1.2 *(Rellich-Kondrochov) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ a frontière Lipschitzienne m, l entiers $0 \leq l < m$, $1 \leq p < +\infty$, les injections suivantes sont compactes :*

(1)- $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^l_B(\Omega) = \left\{u \in C^l(\Omega)/D^{\alpha}u \;\; est \;\; borné \;\; sur \;\; \Omega \; \forall \, |\alpha| \geq l \;\; si \; ; (m-p)p < n\right\}.$

(2)- $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^l(\bar{\Omega})$ *si* $(m-p)p > n$.

(3)- $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{l,q}(\Omega)$ *si* $(m-p)p < p$ *et* $1 \leq q \leq \dfrac{np}{n-(m-l)p}$ *ou si* $(m-l)p = n$ *et* $1 \leq q \leq \infty$.

(4)- *si* $(m-l)p > n \geq (m-l-1)p$ *et* $0 < \lambda < m-l-\dfrac{n}{p}$ *alors :* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{l\lambda}(\bar{\Omega}) = \big\{u \in C^l(\bar{\Omega}); \exists\ k > 0,\ \forall\ |\alpha| \leq l;\ \forall x, y \in \Omega : |D^\alpha u(x) - D^\alpha(y)| \leq k|x-y|^\lambda\big\}$.

Preuve. Voire ([1]) ■

1.2 Coercive

Définition 1.2.1 *$a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelé coercive s'il existe une constante $c > 0$, de telle sorte que $a(x,x) \geq c\|x\|^2$ pour tout x dans H.*
(voire [3])

1.3 Convexité

Définition 1.3.1 *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dit convexe lorsque :*
$\forall (x,y) \in I \quad \forall \lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Définition 1.3.2 *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dit strictement convexe si :*
$\forall (x,y) \in I \quad \forall \lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Définition 1.3.3 *Un ensemble C est dit convexe si :*

$$\forall (x,y) \in I \quad \forall \lambda \in [0,1] \qquad \lambda x + (1-\lambda)y \in C$$

Définition 1.3.4 *Une fonction J de V dans $\mathbb{R} \cup +\infty$ est semi-continue intérieurement sur V si elle satisfait aux conditions équivalentes :*

- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \{u \in V, J(u) \leq \alpha\}$ *est fermé*

- $\forall u^* \in V \qquad liminf j(u) \geqslant j(u^*)$

Définition 1.3.5 *Soit J une fonctionnelle de V dans $\bar{\mathbb{R}}$, convexe et semi-continue inférieurement. Soit K un sous-ensemble convexe, non vide et fermé de V. J est propre c'est-a-dire qu'il existe un élément v_0 de K tel que $J(v_0) < +\infty$.*

Définition 1.3.6 *V est un espace de Banach réflexif et séparable et A une application de V dans $V^{'}$ (en générale non linéaire).*

(i) A est monotone si

$$\forall u, v \in V, \qquad \langle A(u) - A(v), u - v\rangle \geq 0$$

(ii) A est strictement monotone si de plus $\langle A(u) - A(v), u - v\rangle = 0$ implique $u = v$.

(iii) A est hémicontinue si pour tous $u, v \ \in V$, l'application $t \longmapsto \langle A(u + tv), v\rangle$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

1.4 Théorème de Stampacchia

Théorème 1.4.1 *(Stampacchia) Soit H un espace de Hilbert et soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur H. Soit K un sous ensemble fermé et convexe de H. Ensuite, étant donné $f \in H$ il existe un unique $u \in K$ telle-que*
$a(u, v - u) \geq (f, v - u), \forall v \in K$

Preuve. voir. [1] ∎

1.5 Théorème de représentation de Riez

Théorème 1.5.1 *Soit H un espace de Hilbert, pour tout $F \in H^{'}$ (dual de H), il existe un unique $v \in H$ telle que :*

$$f(u) = (u, v), \quad \forall u \in H$$

et en plus :

$$\|F\|_{H'} = \|v\|_H$$

voir ([2])

Lemme 1.5.1 *Soit* $\left\{u \in L^2(0,T;V); u^{'} \in L^2(0,T;V^{'})\right\} \hookrightarrow C^0([0,T]\,,H)$

Preuve. voir([11]) ■

Chapitre 2

Inéquation variationnelles elliptique

Ce chapitre présente l'existence et l'unicité pour la solution des inéquations variationnelles elliptique de première et deuxième espèce.

2.1 Inéquation variationnelles elliptique de 1^{re}espèce

Définition 2.1.1 *On appelle inéquation variationnelle elliptique de 1^{re}espace tout inéquation de la forme :*

$$\begin{cases} Trouver\ u \in K\ \ tq \\ a(u, v-u) \geq L(v-u)\ \ \forall v \in K \end{cases} \tag{2.1}$$

Théorème 2.1.2 *Si $a(.,.) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ forme bilinéaire continue et coercive sur un espace vectoriel V, $L(.) :\longrightarrow \mathbb{R}$ forme linaire sur V est K sous ensemble convexe non vide de V alors l'inéquation variationnelle (2.1) admet une solution unique .*

Preuve.

1 L'unicité : supposons u_1, u_2 solution de (2.1) Donc

$$a(u_1, v-u_1) \geq L(v-u_1)\ \ \forall v \in K\ \ ; v = u_2 \tag{2.2}$$

$$a(u_2, v-u_2) \geq L(v-u_2)\ \ \forall v \in K\ \ ; v = u_1 \tag{2.3}$$

On trouve

$$a(u_1, u_2-u_1) \geq L(u_2-u_1) \tag{2.4}$$

$$a(u_2, u_1 - u_2) \geq L(u_1 - u_2) \tag{2.5}$$

On additionnée (2.4) et (2.5) on trouve $a(u_2 - u_1, u_1 - u_2) \geq 0$ et a cette inéquation on trouve $a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0$ alors

$$C\|u_1 - u_2\|_V^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0 \implies \|u_1 - u_2\|_V = 0 \Longrightarrow u_1 = u_2$$

d'où l'unicité .

2 L'existence :

On considère $(w, v - w) \geq \rho(-a(u, v - w) + L(v - w)) + (u, v - w)$ $\rho \geq 0$, u fixé dans V.

$a(u, v) = (Au, v)$ *et* $L(v) = (l, v)$ d'après théorème de représentation de Riez donc on a :

$$(w, v - w) \geq (-\rho Au + \rho l + u, v - w)$$

ou encore $(w - \tilde{u}, w - v) \leq 0$ $\forall v \in K$ avec $\tilde{u} = -\rho Au + \rho l + u$ donc $w = P_k\tilde{u}$ existe et unique.

On définit $T_\rho : u \longrightarrow w; T_\rho u = w$ Si $w = u$ alors w est solution du problème (2.1) donc on cherche si T_ρ admet un point fixe.

soit

$$w_1 = T_\rho u_1 \; alors \; (w_1 - \tilde{u}_1, w_1 - w) \leq 0 \forall v \in K \tag{2.6}$$

$$w_2 = T_\rho u_2 \; alors \; (w_2 - \tilde{u}_2, w_2 - v) \leq 0 \forall v \in K \tag{2.7}$$

On prend $v = w_2$ dans (2.6) et $v = w_1$ dans (2.7)donc on obtient :

$$(w_1 - \tilde{u}_1, w_1 - w_2) \leq 0 \tag{2.8}$$

$$(w_2 - \tilde{u}_2, w_2 - w_1) \leq 0 \tag{2.9}$$

(2.8)$\Longleftrightarrow (w_1, w_1 - w_2) \leq (\tilde{u}_1, w_1 - w_2)$

(2.9)$\Longleftrightarrow -(w_2, w_1 - w_2) \leq -(\tilde{u}_2, w_1 - w_2)$

d'où $(w_1 - w_2, w_1 - w_2) \leq (\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2, w_1 - w_2)$ d'où

$$\|w_1 - w_2, w_1 - w_2\|^2 \leq \|\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2\| \|w_1 - w_2\|^2$$

$$\Longrightarrow \|w_1 - w_2\| \leq \|\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2\| = \|(-\rho A + I)(u_1 - u_2)\| \leq \|-\rho A + I\|_{\mathcal{L}(v)}.\|u_1 - u_2\|$$

$$\exists!\, un\ \rho \quad tq\ \|-\rho A + I\| \leq 1$$

On a :

$$\|(-\rho A + I)v\|_V^2 = ((-\rho A + I)v, (-\rho A + I)v) = \rho^2(Av, Av) - 2\rho(Av, v) + (v, v) \leq$$

$$\leq \rho^2\|A\|^2.\|v\|^2 - 2\rho(Av, v) + \|v\|^2 \leq$$

$$\leq \rho^2\|A\|^2.\|v\|^2 - 2\rho\|A\|\|v\|^2 + \|v\|^2$$

On utilise la coercivité $(2\rho(Av, v) \leq -2\rho\alpha\|v\|^2)$ donc

$\|(-\rho A + I)v\|_V^2 \leq (\rho^2\|A\|^2.\|v\|^2 - 2\rho(Av, v) + \|v\|^2) \Longrightarrow \leq (\rho^2\|A\|^2 - 2\rho\alpha + 1)\|v\|^2$

Pour $\rho \in \left]0, \dfrac{2\alpha}{\|A\|^2}\right[\Longrightarrow \|-\rho A + I\| < 1$

D'où $T_\rho(O < \rho < \dfrac{2\alpha}{\|A\|^2})$est strictement contraction alors :

T_ρ admet un point fixe unique alors $w = u = T_\rho u$

- Par conséquent u vérifie (2.1)

■

2.2 Inéquation variationnelles elliptique de 2^{e}espèce

Définition 2.2.1 *On appelle inéquation variationnelle elliptique de 2^{e}espèce toute inéquation de la forme*

$$a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq L(v - u)\ \forall v \in K$$

Théorème 2.2.2 *Soient V un espèce de Hilbert,$K \neq \emptyset$ convexe fermé de V $j : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ propre convexe et semi continue inférieurement $a(.,.)V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ forme bilinéaire continue et coercive $f \in V$*
Alors l'inéquation variationnelle

$$\begin{cases} Trouver\ u \in K \\ a(u, v-u) + j(v) + j(u) \geq (f, v-u)\ \forall v \in K \end{cases} \tag{2.10}$$

Admet une solution unique.

Preuve.

1 L'unicité : Supposons u_1 et u_2 solution de(2.10) alors

$$a(u_1, v-u_1) + j(v) - j(u_1) \geq (f, v-u_1)\ \forall v \in K \tag{2.11}$$

$$a(u_2, v-u_2) + j(v) - j(u_2) \geq (f, v-u_2)\ \forall v \in K \tag{2.12}$$

On pose $v = u_2$ puis $v = u_1$ respectivement dans (2.11) et (2.12) on trouve par sommation :

$$a(u_1, u_2 - u_1) + a(u_2, u_1 - u2) \geq (f, u_2 - u_1) + (f, u_1 - u_2)$$

$$\alpha \|u_1 - u_2\|^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0$$

$\Longrightarrow u_1 = u_2$ D'où l'unicité .

2 L'existence : On définit le problème auxiliaire pour u fixé dans K et $\rho > 0$

$$\begin{cases} Trouverw \in K \\ (w, v-w) + \rho j(v) - \rho j(w) \geq -\rho(a(u, v-w) - (f, v-w)) + (u, v-w)\ \forall v \in K \end{cases} \tag{2.13}$$

Le problème (2.13) admet une solution unique (d'âpre le théorème de Weierstrass) $T_\rho : u \longmapsto w$ w solution du problème (2.13),on montre que T_ρ admet un point fixe. Il suffit de montrer que T_ρ est strictement contractant c.a.d
$\|T_\rho(u_1) - T_\rho(u_2)\| \leq C\|u_1 - u_2\|\ \forall u_1, u_2 \in V.\ c < 1$
$\|w_1 - w_2\| \leq C\|u_1 - u_2\|\ tq\ w_i = T_\rho(u_1)\ i = 1, 2$

Alors :

$$(w_1, v-w_1)+\rho j(v)-\rho j(w_1) \geq -\rho a(u_1, v-w_1)+\rho(f, v-w_1)+(u_1-v-w_1) \quad (2.14)$$

$$(w_2, v-w_2)+\rho j(v)-\rho j(w_2) \geq -\rho a(u_2, v-w_2)+\rho(f, v-w_2)+(u_2-v-w_2) \quad (2.15)$$

On prend $v = w_2$ et $v = w_1$ respectivement dans (2.14) et (2.15) on obtient

$$-\|w_1 - w_2\|^2 \geq \rho a(u_1 - u_2, w_1 - w_2) - (u_1 - u_2, w_1 - w_2)$$

$$\Longrightarrow \|w_1 - w_2\|^2 \leq -\rho a(u_1 - u_2, w_1 - w_2) - (u_1 - u_2, w_1 - w_2) \leq$$

$$\leq (-\rho A(u_1 - u_2) + (u_1 - u_2), w_1 - w_2) \leq ((-\rho A + I)(u_1 - u_2), w_1 - w_2) \leq$$

$$\leq \|-\rho A + I\|.\|u_1 - u_2\|\|w_1 - w_2\|$$

$$\Longrightarrow \|w_1 - w_2\| \leq \|-\rho A + I\|.\|u_1 - u_2\|$$

Alors $\exists \rho > 0?$ tq $\|I - \rho A\| < 1$

$\|(I - \rho A)v\|^2 = (v - \rho Av, v - \rho Av) = (v, v) - 2\rho(Av, v) + \rho^2(Av, Av) \leq$

$\leq \|v\|^2 - 2\rho(Av, v) + \rho^2\|Av\|^2$

On utilisant la coercivité $(Av, v) \geq \alpha\|v\|^2 \Longrightarrow -2\rho(Av, v) \leq -2\rho\alpha\|v\|^2$

alors $\|(I - \rho A)v\|^2 \leq \|v\|^2 - 2\rho\alpha\|v\|^2 + \rho^2\|A\|^2.\|v\|^2 \leq$

$\leq (1 - 2\rho\alpha + \rho\|A\|^2)\|v\|^2$

si $\rho \in \left]0, \dfrac{2\alpha}{\|A\|^2}\right] \Longrightarrow 1 - 2\alpha\rho + \rho^2\|A\|^2 < 1$

$\Longrightarrow \|I - \rho A\| < 1$ alors T_ρ est strictement contractante $\Longrightarrow T_\rho$ admet un point fixe unique .

$T_\rho u = u = w$ d'où u vérifié le problème (2.10)

■

Chapitre 3

Inéquation variationnelles parabolique

Il y a plusieurs méthodes d'approximations de solution u des inéquations variationnelles elliptique, parmi eux méthode de pénalisation, dualité I, dualité II, régularisation etc. et parmi les méthode que n'a déjà motionné on utilisent la méthode de Roth ([17]) et la méthode de régularisation dans ce chapitre qu'il s'intéresse de l'existence et l'unicité d'inéquation variationnelle parabolique.

3.1 Inéquation variationnelles parabolique de 1^{re}espèce

Définition 3.1.1 *On appelle inéquation variationnelle parabolique de 1^{re}espèce tout inéquation de la forme :*

$$\begin{cases} trouver \;\; u \in L^2(0,T;V) \\ \big(u^{'}(t) + Au(t) - f(t), v - u(t)\big) \geq 0 \; \forall v \in K \\ tellque \;\; u(t) \in K \;\; p.p \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Soient V un espace de Hilbert,$V^{'}$ le dual de V tell-que $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^{'}$

Théorème 3.1.2 *On suppose que $a(.,.)$ est une forme bilinéaire coercive, $K \neq \emptyset$ convexe fermé de V, et $f, \in L^2(0,T;V^{'})$ alors il existe une et une seule solution u dans $L^2(0,T;V) \cap C^0([0,T];H)$ telles que :*

$$\begin{cases} \big[u^{'}(t), v-u\big] + [Au, v-u] \geq [f, v-u] \\ u(t); v(t) \in K \;\; p.p \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{3.2}$$

Avec $\left[u^{'}(t), v-u\right] = \int_0^T (u^{'}(t), v(t)-u(t))$ *et* $[Au, v-u] = \int_0^T (Au(t), v(t)-u(t))$, $[f, v-u] = \int_0^T (f, v(t)-u(t))$.

Preuve.

(1) L'unicité : Il est utile d'introduire une notion de solution "plus faible" que (3.2) ne faisons pas intervenir $u^{'}$ on introduire :

$$\Phi = \left\{ v/v \in L^2(O,T,V);\ v^{'} \in L^2(0,T,V^{'});\ v(0) = u_0\ ; v(t) \in K.\ p.p \right\} \tag{3.3}$$

$$\left[v^{'}, v-u\right] + [Au, v-u] - [f, v-u] = \left[u^{'}, v-u\right] + [Au, v-u] - [f, v-u] + \left[v^{'} - u^{'}, v-u\right]$$

- Et on a $\left[u^{'}, v-u\right] + [Au, v-u] - [f, v-u] \geq 0$ d'après (3.2),même $\left[v^{'} - u^{'}, v-u\right] \geq 0$ car :

$$\left[v^{'} - u^{'}, v-u\right] = \int_0^T (v^{'} - u^{'}, v-u)\ dt = \int_0^T \frac{d}{2dt}(v-u, v-u)\ dt = \int_0^T \frac{d}{2dt}\|v-u\|^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\|(v-u)(T)\|^2 - \frac{1}{2}\|(v-u)(0)\|^2 =$$

$$= \frac{1}{2}|v(T) - u(T)|_H^2 \geq 0$$

-Donc

$$\left[v^{'}, v-u\right] + [Au, v-u] - [f, v-u] \geq 0\ \forall v \in \Phi \tag{3.4}$$

-On est donc finalement conduit au problème précise suivant

$$\begin{cases} trouver\ u\ \in L^2(0,T,V) \\ tq\ \left[v^{'}, v-u\right] + [Au, v-u] \geq [f, v-u]\ \ \forall v \in \Phi\ u(t) \in Kp.p \end{cases} \tag{3.5}$$

-Soient u_1 et u_2 deux solution donc

$$\begin{cases} \left[v^{'}, v-u_1\right] + [Au_1, v-u_1] \geq [f, v-u_1]\ \ \forall v \in \Phi \\ \left[v^{'}, v-u_2\right] + [Au_2, v-u_2] \geq [f, v-u_2]\ \ \forall v \in \Phi \end{cases} \tag{3.6}$$

On pose

$$w = \frac{u_1 + u_2}{2} \tag{3.7}$$

et on introduit w_n solution de

$$\begin{cases} w_n^{'} + n\ w_n = nw \\ w_n(0) = u_0 \end{cases} \tag{3.8}$$

La solution de (3.8)est le suivant :

on a $w_n^{'} + n\, w_n = nw \implies w_n^{'} = -n\, w_n + nw \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} y^{'} = -ny + b \\ y(0) = u_0 \end{cases}$$

Alors la solution c'est de la forme $w_n(t) = \alpha e^{-nt} + w$; , et on a $w_n(0) = \alpha + w = u_0$

alors $\alpha = u_0 - w$

-D'où $w_n(t) = (u_0 - w)e^{-nt} + w$

$w_n \in \Phi$, on peut donc prendre $v = w_n$ dans chacun des équation (3.6) on trouve :

$$\begin{cases} \left[w_n^{'}, w_n - u_1\right] + [Au_1, w_n - u_1] \geq [f, w_n - u_1]\ \forall w_n \in \Phi \\ \left[w_n^{'}, w_n - u_2\right] + [Au_2, w_n - u_2] \geq [f, w_n - u_2]\ \forall w_n \in \Phi \end{cases}$$

Par sommation on trouve :

$$\left[w_n^{'}, 2w_n - u_1 - u_2\right] + [Au_1, w_n - u_1] + [Au_2, w_n - u_2] \geq [f, 2w_n - u_1 - u_2]$$

$\Longrightarrow$

$$\left[2w_n^{'}, 2(w_n - (\frac{u_1 + u_2}{2}))\right] + [Au_1, w_n - u_1] + [Au_2, w_n - u_2] \geq \left[f, 2(w_n - (\frac{u_1 + u_2}{2}))\right]$$

$\Longrightarrow$

$$2\left[w_n^{'}, w_n - w\right] + [Au_1, w_n - u_1] + [Au_2, w_n - u_2] \geq 2\,[f, w_n - w] \tag{3.9}$$

Mais d'après (3.8) on a :

$$\left[w_n^{'}, w_n - w\right] = -\frac{1}{n}\left[w_n^{'}, w_n^{'}\right] \leq 0$$

-Donc (3.9)$\Longrightarrow$

$$[Au_1, w_n - u_1] + [Au_2, w_n - u_2] \geq 2\,[f, w_n - w] \tag{3.10}$$

-Quand $n \longrightarrow \infty$ dans(3.10) on obtient :

$$[Au_1, w - u_1] + [Au_2, w - u_2] \geq 0$$

i.e :

$$\left[Au_1, \frac{u_1+u_2}{2} - u_1\right] + \left[Au_2, \frac{u_1+u_2}{2} - u_2\right] \geq 0$$

Alors on trouve :

$$\frac{1}{2}\left[Au_2 - Au_1, u_1 - u_2\right] \geq 0$$

$\Longrightarrow$

$$[Au_1 - Au_2, u_1 - u_2] \leq 0$$

$\Longrightarrow$

$$\alpha\|u_1 - u_2\|^2 \leq [A(u_1 - u_2), u_1 - u_2] \leq 0$$

$\Longrightarrow u_1 = u_2$ d'où l'unicité

(2) L'existence : On applique la méthode du Roth

La 1^{re} étape de la méthode du Roth c'est on divisé l'intervalle de temps $[0, T]$ en intervalles égaux ($[t_{i-1}, t_i]$) de largeur $h = \frac{T}{n}$ ou $i = 1, 2, ...n$ $t_i = ih$ et h c'est le largeur de la maille $\dfrac{T}{n}$

- Pour chaque $i = 1, 2, ...n$, Obtenir une solution $u_i \in K$ de l'inéquation variationnelle elliptique

$$\left\langle \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - f, v - u_i \right\rangle + a\left(u_i, v - u_i\right) \geq 0 \;\; \forall v \in K \tag{3.11}$$

- Ou $u_{i-1} \in K$ est connu

- On construire la fonction de Roth $u_n(x, t)$

$$u_n(x,t) = u_{i-1}(x) + \frac{t - t_{i-1}}{h}\left(u_i(x) - u_{i-1}(x)\right); \;\; t \in [t_{i-1}, t_i]$$

- Observe que la fonction de Roth $u_n(x, t)$ est linéaire dans le temps sur chaque sous-intervalle $[t_{i-1}, t_i]$, La variable de temps joue le rôle d'un paramètre de liaison homotopie u_{i-1} au moment t_{i-1} à u_i au moment t_i.

- Pour prouver $u_n(x, t)$ converge vers une solution $u(x, t)$ de l'inéquation variationnelle parabolique suivant :

$$\int_0^T \left(u^{'}(t), v(t) - u(t)\right) + \int_0^T a\left(u(t), v(t) - u(t)\right) \geq \int_0^T \left(f, v(t) - u(t)\right) \;\; \forall v \in K \tag{3.12}$$

Quand $n \longrightarrow \infty$, nous établissons quelque estimation nécessaire pour $j \geq 2$

- Pour $i = j-1$ on prenons $v = u_j$ dans l'inéquation (3.11),et pour $i = j$ On prenons $v = u_{j-1}$ pour produire

$$\left\langle \frac{u_{j-1} - u_{j-2}}{h} - f, u_j - u_{j-1} \right\rangle + a(u_{j-1}, u_j - u_{j-1}) \geq 0 \qquad (3.13)$$

$$-\left\langle \frac{u_j - u_{j-1}}{h} - f, u_j - u_{j-1} \right\rangle - a(u_j, u_j - u_{j-1}) \geq 0 \qquad (3.14)$$

- On additionné (3.13) et (3.14)on trouve

$$\frac{1}{h}\|u_j - u_{j-1}\|^2 + a(u_j - u_{j-1}, u_j - u_{j-1}) \leq \frac{1}{h}\langle u_{j-1} - u_{j-2}, u_j - u_{j-1}\rangle \qquad (3.15)$$

On appliquant l'inégalité de Cauchy Schwartz et utilisent l'inégalité élémentaire $2ab \leq a^2 + b^2$ á cette inéquation et la coercivité de $a(.,.)$ on trouve

$$\|u_j - u_{j-1}\|^2 + 2\alpha h\|(u_j - u_{j-1})\|^2 \leq \|u_{j-1} - u_{j-2}\|^2 \; j \geq 2 \qquad (3.16)$$

Pour le cas $j = 1$,On choisissons $v = u_0$ dans (3.11) pour obtenir

$$\frac{1}{h}\|u_1 - u_0\|^2 + a(u_1 - u_0, u_1 - u_0) \leq (f, u_1 - u_0) + a(u_0, u_1 - u_0) \qquad (3.17)$$

de cette inéquation on trouve

$$\frac{1}{h}\|u_1 - u_0\|^2 + \alpha\|u_1 - u_0\|^2 \leq (\|f\| + \|u_0\|)\|u_1 - u_0\| \qquad (3.18)$$

Afin que nous ayons la borne de base

$$\|\frac{u_1 - u_0}{h}\| \leq c \qquad (3.19)$$

- Combinant cette estimation á l'inégalité (3.16) montre que

$$\|\frac{u_i - u_{i-1}}{h}\| \leq c \;\; i = 1, 2, ..., n. \qquad (3.20)$$

-Pour c une constante qui est indépendant de n,on choisissons $v = 0$ dans (3.11),on trouve :

$$\left\langle \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, -u_i \right\rangle + a(u_i, -u_i) \geq (f, -u_i)$$

-On trouve la norme de V suivant :

$$\|u_i\|_V \leq c; \;\; i = 1, 2, ..., n \tag{3.21}$$

-C'est obligation de fournir une estimation uniforme sur la dérivée $u_n^{'}$ depuis $u_n^{'} = \dfrac{u_i - u_{i-1}}{h}$

- Donc (3.20) dit que

$$\|u_n^{'}\| \leq c \; pour t \in [0, T] \tag{3.22}$$

- Qui est immédiatement donne le résultat de equicontinuité $|u_n(t) - u_n(\tau)| \leq c|t - \tau| \;\; pour \;\; t, \tau \in [0, T]$

-On définie $\overline{u}_n(t)$ comme la fonction de l'étape

$$\overline{u}_n(t) = u_i \;\; pour t \in [0, T] \tag{3.23}$$

- D'après (3.21) $\{\overline{u}_n\}$ á une suit converge faiblement dans V, que nous marquons que $\{\overline{u}_n\}$ on outre (3.20) donne la borne $|\overline{u}_n(t) - u_n(t)| \leq \dfrac{c}{n}$

-D'où il se ensuite que la limite faible de cette suit est u en exploitant la borne $\|u_n^{'}\| \leq c \; pour t \in [0, T]$ d'une manière similaire .

-On voie que $u_n^{'}$ converge faiblement vers $u^{'}$ dans $L^2(0, T, H)$

- En fonction de u_n et $\overline{u}_n$, l'inéquation elliptique (3.11) est :

$$\left\langle u_n^{'}(t), v(t) - \overline{u}_n(t) \right\rangle + a(\overline{u}_n(t), v(t) - \overline{u}_n(t)) \geq 0 \;\; \forall v \in K \tag{3.24}$$

-Qui déteint presque partout dans $[0, T]$, pour les points arbitraire τ_1 et τ_2 dans $[0, T]$ on intégré (3.24) á partir τ_1 a τ_2 donnée

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\langle u_n^{'}(t) - f, v(t) - \overline{u}_n(t) \right\rangle + a(\overline{u}_n(t), v(t) - \overline{u}_n(t)) \, dt \geq 0 \;\; \forall v \in K$$

On prend $\liminf$ quand $n \longrightarrow \infty$ dans cette inéquation on trouve

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\langle u^{'}(t) - f, v(t) - u(t) \right\rangle + a(u(t), v(t) - u(t)) \, dt \geq 0 \;\; \forall v \in K$$

Quand $\overline{u}_n \longrightarrow u$ et $u_n^{'} \rightharpoonup u^{'}$ dans $L^2(0, T, H)$ et la forme bilinéaire $a(., .)$ est faiblement Semi-continue alors u est solution de le problème variationnelle (3.2)

$\blacksquare$

3.2 Inéquation variationnelle parabolique de 2^{e}espèce

Soit $V,\ H,\ V^{'}$ des espaces Hilbert telle-que $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^{'}$.

Définition 3.2.1 *On appelle inéquation variationnelle parabolique de 2^{e}espèce tout inéquation de la forme :*

$$\begin{cases} u \in L^2(0,T;V); u^{'} \in L^2(0,T;V^{'}) \\ (u^{'}(t), v - u(t)) + a(u(t), v - u(t)) + J(v) - J(u(t)) \geq (f(t), v - u(t))\ \forall v \in K \\ tel\,que\ \ u(t) \in K\ \ p.p \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Telle que $u \in V$ (avec,$J(u_0) < \infty$) et $f \in L^2(0,T;V^{'})$

Théorème 3.2.2 *soit V et H deux espaces de Hilbert et $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue et coercive et $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe semi-continu inférieurement et propre, alors il existe une et une seule fonction u telle que :*

$$u \in L^2(0,T;V), \quad u^{'} \in L^2(0,T;V) \cap L^{\infty}(0,T;H), \tag{3.25}$$

$$(u^{'}(t), v - u(t)) + a(u(t), v - u(t)) + J(v) - J(u(t)) \geq (f(t), v - u(t))\ \forall v \in V \tag{3.26}$$

$$u(0) = u_0. \tag{3.27}$$

Preuve.

(I) l'unicité : Soit u et u_* deux solution, si on prend $v = u_*(t)$(resp. $v = u(t)$) dans l'inéquation (3.26)(resp.l'analogue de l'inéquation respectivement de u_*), et d'après les deux inéquations, on prend $w = u - u_*$:

$$-(w^{'}(t), w(t)) - a(w(t), w(t)) \geq 0$$

D'après la coercivité de $a(.,.)$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \alpha\|w(t)\|^2 \leq c|w(t)|^2$$

telle que en particulier :

$$\frac{d}{dt}|w(t)|^2 \leq 2c|w(t)|^2$$

D'où, de $w(0) = 0$, on trouve $w(t) = 0$.

II L'existence : il y a plusieurs étapes

Étape (1) :Régularisation de J.

- Et il existe une famille de fonctions J_ε, qui est différentiable dans V, telle que :

$$\begin{cases} \forall v \in L^2(0,T;V) \ on \ à \\ \int_0^T J_\varepsilon(v)dt \longrightarrow \int_0^T J(v)dt, \quad j \longrightarrow \infty \end{cases} \tag{3.28}$$

-Il existe une suite φ_ε, bornée dans V, telle que :

$$J_\varepsilon^{'}(\varphi_\varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon, \tag{3.29}$$

$$\begin{cases} si \ v_\varepsilon \rightharpoonup v \ et \ v_\varepsilon^{'} \rightharpoonup v^{'} \ dans \ L^2(0,T;V) \\ avec \ \int_0^T J(v)dt \ constant \ alors \\ \liminf \int_0^T J_\varepsilon(v)dt \geq \int_0^T J(v)dt. \end{cases} \tag{3.30}$$

soient :

$$f, f^{'} \in L^2(0,T;V^{'}) \tag{3.31}$$

$$\begin{cases} \exists \ u_{0\varepsilon} \in V \ tell-que \ u_{0\varepsilon} \longrightarrow u_0 \ dans \ V \\ \forall u_{0\varepsilon} \ \exists k_\varepsilon \in H \ tell-que \\ a(u_{0\varepsilon}, v) + (J_j^{'}(u_{0\varepsilon}), v) = (k_\varepsilon, v) \ \forall v \in V \\ et \ |k_\varepsilon| \leq constant \ \ quand \ \varepsilon \longrightarrow \infty \end{cases} \tag{3.32}$$

Et soient le problème suivant :

$$\begin{cases} u_\varepsilon \in L^2(0,T;V); u_\varepsilon^{'} \in L^2(0,T;V^{'}) \\ (u_\varepsilon^{'}(t), v - u_\varepsilon(t)) + a(u_\varepsilon(t), v - u_\varepsilon(t)) + J(v) - J(u_\varepsilon(t)) \geq (f(t), v - u_\varepsilon(t)) \ \forall v \in K \\ telle\,que \ \ u_\varepsilon(t) \in K \ \ p.p \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Théorème 3.2.3 *Soit* $a(.,.)$ *une forme bilinéaire continue et coercive et (3.30) et (3.31) alors il existe une et une seul solution* u *de :*

$$u_\varepsilon \in L^2(0,T;V), \quad u_\varepsilon^{'} \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H), \tag{3.33}$$

$$(u_\varepsilon^{'}(t), v - u_\varepsilon(t)) + a(u_\varepsilon(t), v - u_\varepsilon(t)) + J_\varepsilon(v) - J_\varepsilon(u_\varepsilon(t)) \geq (f(t), v - u_\varepsilon(t)) \ \forall v \in V \tag{3.34}$$

$$u_\varepsilon(0) = u_{0\varepsilon}. \tag{3.35}$$

Puis, comme $\varepsilon \longrightarrow \infty$, u désignant la solution fournie par le théorème (3.2.2), On a :

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u, \quad dans \ \ L^2(0,T;V) \tag{3.36}$$

$$u_\varepsilon^{'} \rightharpoonup u^{'} \quad dans \ \ L^2(0,T;H) \quad faible \ \ étoile \ \ dans \ \ L^\infty(0,T;H). \tag{3.37}$$

Remarque 3.2.4 *Si J_ε est différentiable le problème (3.34) est équivalent de l'équation suivante :*

$$(u_\varepsilon^{'}(t),v)+a(u_\varepsilon(t),v)+(\Phi_\varepsilon(u_\varepsilon(t)),v)=(f(t),v) \ \ \forall v \in V. \tag{3.38}$$

Nous ajoutons $\Phi_\varepsilon = J_\varepsilon^{'}$.

Preuve. Soit $w_1,...,w_m$ une "base" de V dans le sens suivant :$w_1,...,w_m$ sont linéairement indépendant $\forall m$, et les combinaisons finie $\sum_{\xi_\varepsilon w_\varepsilon}$ sont dense dans V, tells que ces bases toujours existant quand V est séparable, que nous supposons être le cas, nous choisissons w_1, w_2 de telle sorte que :

$$\{u_{0\varepsilon} \ \ et \ \ \varphi_\varepsilon \in \ \ l'espace \ \ [w_1,w_2]\} \tag{3.39}$$

On définie $u_{\varepsilon m}(t)$ comme une solution de

$$(u_{\varepsilon m}^{'}(t),w_k)+a(u_{\varepsilon m}(t),w_k)+(\Phi_j(u_{\varepsilon m}(t)),w_k)=(f(t),w_k), \ \ 1 \leq k \leq m, \tag{3.40}$$

$$u_{\varepsilon m}(t) \in [w_1,...,w_m] = l'espace \ \ engendré \ \ par \ \ w_1,...,w_m. \tag{3.41}$$

$$u_{\varepsilon m}(0) = u_{0\varepsilon} \quad m \geq 2 \tag{3.42}$$

Si $u_{\varepsilon m}(t) = \sum_{k=1} g_{\varepsilon k} w_k$

Alors on a un système différentiel à $g_{\varepsilon k}$ qui est définie $u_{\varepsilon m}$ dans un intervalle $[0,t_m]$, $t_m > 0$

Les estimations a priori ci-dessous montrent que $t_m = T$

Estimation à priori (I), d'après (3.39) on à :

$$(u_{\varepsilon m}^{'}(t),\varphi_\varepsilon)+a(u_{\varepsilon m}(t),\varphi_\varepsilon)+(\Phi_\varepsilon(u_{\varepsilon m}(t)),\varphi_\varepsilon)=(f(t),\varphi_\varepsilon). \tag{3.43}$$

En outre, si nous multiplions (3.40) avec $g_{\varepsilon k}(t)$ et prendre la somme sur k, puis soustraire, (observons que $\Phi_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) = 0$) on a :

$$(u_{\varepsilon m}(t), u_{\varepsilon m}(t) - \varphi_\varepsilon) + a(u_{\varepsilon m}(t), u_{\varepsilon m}(t) - \varphi_\varepsilon) + (\Phi_\varepsilon(u_{\varepsilon m}(t)) - \Phi_\varepsilon(\varphi), u_{\varepsilon m}(t) - \varphi_\varepsilon) \tag{3.44}$$

$$= (f(t), u_{\varepsilon m}(t) - \varphi_\varepsilon).$$

Mais Φ est monotone i.e :

$$(\Phi_\varepsilon(u) - \Phi_\varepsilon(v), v - u) \geq 0 \tag{3.45}$$

Par conséquent, il résulte de (3.44) que

$$(u_{\varepsilon m}(t), u_{\varepsilon m}(t) - \varphi_\varepsilon) + a(u_{\varepsilon m}(t), u_{\varepsilon m}(t) - \varphi_\varepsilon) \leq (f(t), u_{\varepsilon m}(t) - \varphi_\varepsilon). \tag{3.46}$$

D'où

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_{\varepsilon m}(t) - \varphi_\varepsilon|^2 + a(u_{\varepsilon m}(t), u_{\varepsilon m}(t)) \leq a(u_{\varepsilon m}(t), \varphi_\varepsilon) + (f(t), u_{\varepsilon m}(t) - \varphi)$$

Par conséquent(c désignant des constant différent)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_{\varepsilon m}(t) - \varphi_\varepsilon|^2 + \alpha\|u_{\varepsilon m}(t)\|^2 \leq c|u_{\varepsilon m}(t)|^2 + c\|u_{\varepsilon m}(t)\|\|\varphi_\varepsilon\| + c\|f(t)\|_*\|u_{\varepsilon m}(t) - \varphi_\varepsilon\|$$

(tell-que $\|f\|_* =$ norme dans V').

D'après (3.29) $\|\varphi\|_\varepsilon \leq c$, on a :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_{\varepsilon m}(t) - \varphi_\varepsilon|^2 + \alpha\|u_{\varepsilon m}(t)\|^2 \leq c|u_{\varepsilon m}(t) - \varphi_\varepsilon|^2 + \alpha\|u_{\varepsilon m}(t)\|^2 + c(1 + \|f(t)\|_*^2)$$

De ceci

$$|u_{\varepsilon m}(t) - \varphi_\varepsilon|^2 + \alpha\int_0^t \|u_{\varepsilon m}(\sigma)\|^2 d\sigma \tag{3.47}$$

$$\leq c\int_0^t |u_{\varepsilon m}(\sigma) - \varphi_\varepsilon|^2 d\sigma + c(t + \int_0^t \|f(\sigma)\|_*^{'} d\sigma) + |u_{0\varepsilon} - \varphi_\varepsilon|^2.$$

Tel que en particulier, si on pose $|u_{\varepsilon m}(t) - \varphi_\varepsilon(t)|^2 = \eta(t)$

$$\begin{cases} \eta(t) \leq c\int\limits_0^t \eta(\sigma)d\sigma + d \\ d \leq c(T + \int\limits_0^T \|f(\sigma)\|_*^2) + |u_{0\varepsilon} - \varphi_\varepsilon|^2 \end{cases} \tag{3.48}$$

Mais d'après l'inégalité de Gronwall (3.48) implique :

$$\eta(t) \leq d\ exp(ct) \tag{3.49}$$

De ceci nous déduisons :

$$\|u_{\varepsilon m}\| \leq c \ \ dans \ \ L^{\infty}(0,T,H) \tag{3.50}$$

c indépendant de ε et m.

Mais de (3.47) avec $t = T$, on voire que

$$\|u_{\varepsilon m}\| \leq c \ \ dans \ \ L^{2}(0,T,H) \tag{3.51}$$

c indépendant de ε et m.

Estimation a priori(II), nous allons maintenant obtenir des estimation pour u' analogue à (3.50) et(3.51).

Tout d'abord, on déduit de (3.40),(3.42) que

$$(u'_{\varepsilon m}(0), w_k) = (f(0), w_k) - [a(u_{0\varepsilon}, w_k) + (\Phi_{\varepsilon}(u_{0\varepsilon}), w_k)] = (de \ (3.32))(f(0) - k_{\varepsilon}, w_k)$$

De ceci

$$|u'_{\varepsilon m}(0)| \leq (f(0) - k_{\varepsilon}, u'_{\varepsilon m}(0))$$

Par conséquence

$$|u_{\varepsilon m}(0)| \leq |f(0) - k_{\varepsilon}|. \tag{3.52}$$

Nous différencier maintenant (3.40) par rapport à t, il en résulte que :

$$(u''_{\varepsilon m}(t), w_k) + a(u'_{\varepsilon m}(t), w_k) + ((\Phi_{\varepsilon m}(u_{\varepsilon m}(t)))', w_k) = (f'(t), w_k) \ \ \forall v \in V \tag{3.53}$$

Observe que

$$(\Phi_{\varepsilon}(u_{\varepsilon m}(t))', u'_{\varepsilon m}(t)) \leq 0 \tag{3.54}$$

Et d'après la monotonie de Φ_{ε}

$$(\Phi_{\varepsilon}(u_{\varepsilon m}(t+h)) - \Phi_{\varepsilon}(u_{\varepsilon m}(t)), u_{\varepsilon m}(t+h) - u_{\varepsilon m}(t)) \geq 0$$

Par conséquence, en utilisant (3.54) nous déduisons de (3.53) que :

$$(u''_{\varepsilon m}(t), u'_{\varepsilon m}(t)) + a(u'_{\varepsilon m}(t), u'_{\varepsilon m}(t)) \leq (f'(t), u'_{\varepsilon m}(t)) \tag{3.55}$$

Alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_{\varepsilon m}(t)|^2 + \alpha\|u'_{\varepsilon m}(t)\|^2 \leq c|u'_{jm}(t)|^2 + \|f'(t)\|_*\|u'_{\varepsilon m}(t)\|. \tag{3.56}$$

Mais de (3.52), (3.56) on déduire, comme avant pour $u_{\varepsilon m}$ que

$$\|u'_{\varepsilon m}\| \leq c \;\; dans \;\; L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H) \tag{3.57}$$

c indépendant de m, ε Par passage à la limite avec m, selon (3.57) et depuis $u_{\varepsilon m}(0) = u_{0\varepsilon}, \|u_{0\varepsilon}\| \leq c$ on a :

$$\|u_{\varepsilon m}\| \leq c \;\; dans \;\; L^2(0,T;V) \tag{3.58}$$

donc

$$\|\Phi_\varepsilon(u_{\varepsilon m})\| \leq c \;\; dans \;\; L^\infty(0,T;V') \tag{3.59}$$

Alors on peut extraire une sous suite $u_{\varepsilon\mu}$ telle que

$$\begin{cases} u_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup^* u_\varepsilon \quad dans \;\; L^\infty(0,T,V) \\ u'_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup u'_\varepsilon \quad dans\,^2(0,T;V) \;\; et \;\; faible \;\; étoile \;\; dans \;\; L^\infty(0,T,H) \\ \Phi_\varepsilon(u_{\varepsilon\mu}) \rightharpoonup^* \chi_\varepsilon \quad dans\, L^\infty(0,T;V') \end{cases} \tag{3.60}$$

et

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;V)} + \|u'_\varepsilon\|_{L^2(0,T;V)} + \|u'_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq c \tag{3.61}$$

D'après (3.60), $u_{\varepsilon\mu}(0) \rightharpoonup u_\varepsilon(0)$ dans V, alors

$$u_\varepsilon(0) = u_{0\varepsilon}$$

Par passage á la limite dans (3.40) avec $m = \mu$ (pour k fixé), on trouve que :

$$(u'_\varepsilon, w_k) + a(u_\varepsilon, w_k) + (\chi_\varepsilon, w_k) = (f, w_k)$$

et ceci $\forall k$; quand le combinaisons finit $\sum \xi_k w_k$ est dense dans V, on conclure que :

$$(u'_\varepsilon, v) + a(u_\varepsilon, v) + (\chi_\varepsilon, v) = (f, v) \;\; \forall v \in V \tag{3.62}$$

donc nous avons résolu (3.38), si nous pouvons montrer que :

$$\chi_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(u_\varepsilon). \tag{3.63}$$

Dans ce but, on utilise " argument monotonie", d'après la monotonie de Φ_ε, on a $\forall \varphi \in L^2(0,T;V)$:

$$X_m = \int_0^T (\Phi_\varepsilon(u_{\varepsilon m}) - \Phi_\varepsilon(\varphi), u_{\varepsilon m} - \varphi)dt \geq 0 \tag{3.64}$$

Mais selon (3.40)

$$X_m = -\int_0^T \left[(u'_{\varepsilon m}, u_{\varepsilon m}) + a(u_{\varepsilon m}, u_{\varepsilon m}) - (f, u_{\varepsilon m})\right] dt$$

$$- \int_0^T (\Phi_\varepsilon(u_{\varepsilon m}), \varphi)dt - \int_0^T (\Phi_\varepsilon(\varphi), u_{\varepsilon m} - \varphi)dt$$

$$= -\frac{1}{2}|u_{\varepsilon m}(T)|^2 + \frac{1}{2}|u_{0\varepsilon}|^2 - \int_0^T a(u_{\varepsilon m}, u_{\varepsilon m})dt$$

$$+ \int_0^T (f, u_{\varepsilon m})dt - \int_0^T (\Phi_\varepsilon(u_{\varepsilon m}), \varphi)dt - \int_0^T \Phi_\varepsilon(\varphi), u_{\varepsilon m} - \varphi)dt.$$

Quand $u_{\varepsilon m}(T) \rightharpoonup u_\varepsilon(T)$ dans V , on a :

$$\limsup(-|u_{\varepsilon m}(T)|^2) \leq -|u_\varepsilon(T)|^2$$

alors

$$0 \leq \limsup X_m \leq -\frac{1}{2}|u_\varepsilon(T)|^2 + \frac{1}{2}|u_{0\varepsilon}|^2 - \int_0^T a(u_\varepsilon, u_\varepsilon)dt \tag{3.65}$$

$$+ \int_0^T (f, u_\varepsilon)dt - \int_0^T (\chi_\varepsilon, \varphi)dt - \int_0^T (\Phi_\varepsilon(\varphi), u_\varepsilon - \varphi)dt.$$

Mais d'après (3.62) on conclure que :

$$-\frac{1}{2}|u_\varepsilon(T)|^2 + \frac{1}{2}|u_{0\varepsilon}|^2 - \int_0^T a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) + \int_0^T (f, u_\varepsilon)dt = \int_0^T (\chi_\varepsilon, u_\varepsilon)dt$$

et de (3.65) implique

$$\int_0^T (\chi_\varepsilon - \Phi_\varepsilon(\varphi), u_\varepsilon - \varphi)dt \geq 0. \tag{3.66}$$

On prend : $\varphi u_\varepsilon - \lambda\theta,\ \lambda > 0, \theta \in L^2(0,T;V)$ et après la division par λ on trouve :

$$\int_0^T (X_\varepsilon - \Phi_\varepsilon(u_\varepsilon - \lambda\theta), \theta)dt \leq 0$$

à partir de cet inéquation, en laissant $\lambda \longrightarrow 0$ en trouve :

$$\int_0^T (X_\varepsilon - \Phi_\varepsilon(u_\varepsilon), \theta)dt \leq 0\, V \ \forall \theta \in L^2(0,T;V)$$

Alors on a (3.63)

■

Étape (2) : **Estimation a priori pour** u_ε **et** $u_\varepsilon^{'}$.

On a toujours (3.61), on outre (3.34), ensuite (3.38). Soit $v_0 \in L^2(0,T;V)$ tel que :

$$\int_0^T J(v_0)dt < \infty$$

On prend $v = v(t) = v_0(t)$ dans (3.34), on trouve :

$$\int_0^T J_\varepsilon(u_\varepsilon(t))dt \leq \int_0^T (u_\varepsilon^{'}, v_0 - u_\varepsilon) + a(u_\varepsilon, v_0 - u_\varepsilon) + J_\varepsilon(v_0) - (f, v_0 - u_\varepsilon)dt. \quad (3.67)$$

De (3.61) et (3.28), on conclure de (3.58) que :

$$\int_0^T J_\varepsilon(u_\varepsilon(t))dt \leq C \quad (3.68)$$

Alors :

$$\begin{cases} \|u_\varepsilon\| \leq c; \ \ dans \ \ L^2(0,T;V) \\ \|u_\varepsilon^{'}\| \leq c; \ faible \ \ dans \ \ L^2(0,T;V) \ \ et \ \ faible \ \ étoile \ \ dans \ \ L^\infty(0,T;H) \end{cases} \quad (3.69)$$

Alors, on peut extraire une sous suit, on le note par u_ε tel que :

$$\begin{cases} u_\varepsilon \rightharpoonup u \ \ dans \ \ L^2(0,T;V) \\ u_\varepsilon^{'} \rightharpoonup u^{'} \ \ dans \ \ L^2(0,T;V) \ \ et \ \ faible \ \ étoile \ \ dans \ \ L^\infty(0,T;H) \end{cases} \quad (3.70)$$

Et d'après (3.30)

$$\liminf \int_0^T J_\varepsilon(u_\varepsilon)dt \geq \int_0^T J(u)dt. \quad (3.71)$$

Quand $u_{0\varepsilon} \longrightarrow u$ dans V et $u_\varepsilon(0) \longrightarrow u(0)$ faiblement dans V et $u_\varepsilon(0) = u_{0\varepsilon}$, on a (3.27)

Étape (3) :Passage à la limite.

Dans (3.34) on prenons $v = v(t)$ quand $t \longrightarrow v(t)$ est arbitraire dans $L^2(0,T;V)$. d'après ceci on conclure que :

$$\int_0^T \Big[(u_\varepsilon^{'}, v) + a(u_\varepsilon, v) + J_v - (f, v - u_\varepsilon)\Big]\, dt \geq \int_0^T \Big[(u_\varepsilon^{'}, u_\varepsilon) + a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) + J_\varepsilon(u_\varepsilon)\Big]\, dt. \tag{3.72}$$

De (3.72) égal :

$$Y_\varepsilon = \frac{1}{2}|u_\varepsilon(T)|^2 - \frac{1}{2}|u_{0\varepsilon}|^2 + \int_0^T a(u_\varepsilon, u_\varepsilon)dt + \int_0^T J_\varepsilon(u_\varepsilon)dt.$$

Et on utilisons en particulière (3.71), on trouve :

$$\begin{aligned} \liminf Y_\varepsilon &\geq \frac{1}{2}|u(T)|^2 - \frac{1}{2}|u_0|^2 + \int_0^T a(u,u)dt + \int_0^T \Phi(u)dt \\ &= \int_0^T \Big[(u^{'}, u) + a(u,u) + J(u)\Big]\, dt. \end{aligned}$$

Par conséquence on déduire de (3.72) que :

$$\int_0^T \left[(u', v - u) + a(u, v - u) + J(v) - J(u) - (f, v - u)\right] dt \geq 0 \ \ \forall v \in L^2(0,T;V) \tag{3.73}$$

■

Conclusion

- De ce travail, On établi des résultats d'existence et d'unicité d'IVE de première et deuxième espèce en plus l'existence et l'unicité d'IV même de première et deuxième espèce de type parabolique.
- Pour les perspectives, il serait intéressant de trouver l'existence et l'unicité de :

- Des problèmes de contacte avec frottement.
- L'IV hyperbolique de première espèce, malgré deuxième espèce et les problèmes avec frottement resté ouvert de même pour les problèmes non linéaire

Bibliographie

[1] H.Brizes,Analyse fonctionnelle théories et application.Dunod 1999.

[2] R.Glowinski.Lectures on Numerical Methods For Non-Linear variational Problems.Bombay 1980.

[3] S.AGMONN, A.DOUGlIS and L.NIRENBERG. Estimates near the boundary for solution of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions.Part II, Comm.Pure Appl. Math. 17(1965)35-92.

[4] A.Signorini,Sopra alcune questioni di elastostatica, Atii Societa Italianna per il Progresso della Scienze, 1933.

[5] G. Fichera, Problemi elastostatici con vincoli unilaterali ; il problema di Signorini con ambigue condizioni al contoro, Mem. Accad. Naz. dei Lincei , VIII(7), 91-140, 1964.

[6] G. Stampacchia, Formes bilinéaires coercives sur les ensembles convexes, C. R. Acad. Sci. Paris, 258, 1964.

[7] J. L. Lions, G. Stampacchia, Variational inequalities, Comm. Pure Appl. Math., XX, 493-519, 1967.

[8] H. Brézis, Problémes unilatéraux, J. Math. Pures Appl., 51, 1, 1-168, 1972.

[9] H. Brézis, équations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 18, 1, 115-175, 1968.

[10] G. Stampacchia, Variational inequalities, Theory and application of monotone operators, Proceedings of a NATO Advanced Study Institute, Venice, Italy, 1968.

[11] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaire Dunod, Paris, 1969.

[12] U. Mosco, Implicit variational problems and quasi-variational inequalities, Lect. Notes in Math., 543, 83-156, 1975.

[13] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, An introduction to Variational Inequalities an their Applications, Academic Press, New York, 1980.

[14] U. Mosco, An introduction to the approximate solution of variational inequalities, Constructive aspects of functional analysis, Erice 1971, 497-684, Ed. Cremonese, 1973.

[15] R. Glowinski, J. L. Lions, R. Trémoliéres, Numerical analysis of variational inequalities, Amsterdam : North-Holland, 1981.

[16] R. Glowinski, Numerical methods for nonlinear variational problems, Berlin Heidelberg New York, Springer, 1984.

[17] Matthew Rudd and Klaus Schmitt, Variational Inequalities of Elliptic and Parabolic Type, Salt Lake City, Utah 84112-0090,May 20,2002.

[18] G.Duvaut J.L.Lions, Inequalities in Mechanics and Physics, Berlin Heidelberg New York,1976.

[19] Jacques-Louis Lions, SUR LES Problèmes Unilatérale, 1968.

[20] R.Glowisski, Lectures on Numerical Methods for Non-Linear variational Problems,1980,Bomby.

Résumé

Le travail principal de ce mémoire est étudier L'existence et l'unicité d'inéquation variationnelle type parabolique.

Les mots clés : Inéquation variationnelles elliptique, inéquation variationnelles parabolique

ملخص

مبدأ هذه المذكرة هو دراسة وجود ووحدانية حل المتراجعات التغيرية من نوع قطع مكافئ

Abstract

The main work of this thesis is to study the existence and uniqueness of parabolic variational inequality.

Keywords: elliptic variational inequality, parabolic variational inequality