



**UNIVERSITE KASDI MERBAH  
OUARGLA**

**Faculté des sciences et de la technologie et  
des sciences de la matière**

N° d'ordre :  
N° de série :

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

**MASTER**

**Spécialité : Mathématiques**

**Option : Analyse fondamentale**

**Par : Maria Naami**

**Thème**

**Problème de contact bilatéral avec l'adhésion et l'  
endommagement entre deux corps viscoélastique.**

**Soutenu publiquement le : 31/05/2015**

**Devant le jury composé de :**

Mr. Badidja Salim	M. A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Président
Mr. Amara Abd Elkader	M. A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Examineur
Mr. Aissaoui Adel	M. C. université de KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

# إهداء

الحمد لله الذي أشرقت بنوره السموات و الأرض و هدانا إلى الحق و إلى الطريق المستقيم .

إلى مصباح الهدى في الأرض سيد الأولين و الآخرين محمد صلى الله عليه وسلم

إلى منبع الخير أجدادي و جداتي ، أخوالي خالاتي ، عمي و عماتي كل باسمه

إلى أعظم كلمة في ديوان الود و دادك أمي و دادك أبي .

إليك أمي يا من بفضل الله و فضلك كبرت و بلغت سندي

إليك أبي السيد "نعامي لحسن " سبب وجودي

إليكم إخوتي : فاطمة , مولاي الصغير , عائشة , سعاد, مبارك, فائزة , مبروكة و لخصر

وإلى ابنة خالتي بدر البدور "نعامي بدرة" التي لها مكانة الأخت وهي خير صديقة في حياتي أتمنى

لها النجاح في شهادة البكالوريا و التوفيق من الله في تحقيق أهدافها التي فيها خير لها إن شاء الله .

إلى سكاني و أهلي كل بأسمه إليكم أصدقائي رفقاء دربي و مرآة شخصي

مسعودة , رقية بن احمد , سليمة , فطيمة , نجاة, نعيمة , نصيرة , مريم, أميمة

إلى كلمة طيبة كشجرة طيبة تؤتي أكلها كل حين أستاذي المشرف الدكتور الأستاذ "عادل عيساوي "

الذي لم يقصر معي في شيء أسأل الله أن يوفقه في بلوغ أعلى الدرجات في الدنيا و الآخرة.

إلى الأخ الزميل الأستاذ "أحمد وذان" الذي لم يقصر معي بنصائحه الثمينة التي كانت سدا كبيرا لي

في تجاوز الصعوبات و المشاكل التي واجهتني

إلى أرواح من حرروا هذا الوطن شهداءنا الأبرار

إليكم جميعا أهديكم مذكرتي ثمرة جهدي و إخلاص و دكم.

## مربية

# شكر و عرفان

إن الحمد لله ، نحمده ونستعينه ، ونستغفره ، ونتوب إليه ، ونعوذ بالله من شرور أنفسنا ومن

سيئات أعمالنا ، من يهده الله فلا مضل له ، ومن يضلل فلا هادي له .

إن هذه الدراسة لم تكن لتخرج إلى حيز الوجود ولا ترى النور أو تصل إلى هذه المرحلة إلا

بفضل الله تعالى أولاً ، ثم بفضل أصحاب الفضل الذين بذلوا الجهد ، وآثروني بأوقاتهم وذلوا

لي ما واجهتني من صعاب ولم يدخروا نصحاً أو توجيهاً أو إرشاداً إلا أفادوني به فآثرت هذا

الجهد وكانت هذه الدراسة .

والشكر موصول إلى من قدره الله أن يكون راعياً لهذه الرسالة وأن يشرفني بإشرافه و تشجيعه الأستاذ

الدكتور عادل عيساوي فجزاه الله عني خير الجزاء.

كما أتقدم بأصدق عبارات الشكر والتقدير إلى أساتذتي الأفاضل أعضاء لجنة المناقشة الأستاذ بديجة سليم و

الأستاذ عمارة عبد القادر الذين تفضلوا بقبول مناقشة هذه الرسالة فلهم مني كل احترام وتقدير.

وأتوجه بخالص الشكر والتقدير والاعتراف والامتنان لكل أفراد أسرتي و إلى ابنة خالتي بدرة . كذلك

خالتي جمعة وصديقاتي مسعودة. رقية وسليمة. وجزاهم الله عني خير الجزاء .

وكذلك لكل من نسيهم قلبي و تذكرهم قلبي ولم يتم ذكرهم وكان لهم دوراً في إنجاز هذا البحث فلهم مني

كل الشكر والتقدير.

# Table des matières

<b>Dédication</b>	<b>i</b>
<b>Remerciement</b>	<b>ii</b>
<b>Notations</b>	<b>vii</b>
<b>Introduction</b>	<b>viii</b>
<b>1 Formulation mathématique des problèmes aux limites</b>	<b>1</b>
1.1 Cadre physique de problème mécanique . . . . .	2
1.2 Rappels de la mécanique des milieux continus . . . . .	3
1.2.1 Contrainte et déformations . . . . .	3
1.2.2 Lois comportement avec endommagement . . . . .	5
1.2.3 Conditions aux limites de contact avec adhésion. . . . .	7
1.2.4 Formulation des problèmes . . . . .	11
<b>2 Problème bilatéral de contact avec adhésion et endommagement entre deux corps viscoélastique</b>	<b>13</b>
2.1 Formulation du problème mécanique-Hypothèses . . . . .	14
2.2 Formulation variationnelle . . . . .	20
2.3 Existence et unicité de la solution . . . . .	24
<b>A Elements d'analyse non-linéaire dans les espaces de Hilbert</b>	<b>37</b>
A.1 Elements d'analyse non-linéaire dans les espaces de Hilbert. . . . .	37
A.1.1 Rappels sur les espaces de Hilbert . . . . .	38

A.1.2	Opérateurs fortement monotones . . . . .	39
A.1.3	Théorème du point fixe-Théorème de Lax-Milgram . . . . .	39
A.1.4	Sous différentiabilité . . . . .	40
A.1.5	Equations et inéquations variationnelles d'évolution . . . . .	41
A.1.6	Inéquation variationnelle d'évolution . . . . .	42
A.1.7	Lemme de Gronwall . . . . .	43
<b>B</b>	<b>Espace fonctionnels</b>	<b>44</b>
B.1	Espace liés à l'opérateur déformation . . . . .	45
B.2	Espace liés à l'opérateur divergence . . . . .	47
B.3	Espaces des fonctions à valeurs vectorielles . . . . .	49

# Notations

## l'ensembles

- $\mathbb{N}$  l'ensemble des nombres naturelle .
- $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels .
- $\overline{\mathbb{R}}$  la ligne réelle étendue des nombres réels .
- $\mathbb{R}^d$  l'espace euclidien de dimension  $(d = 1, 2; 3)$  .
- $\mathbb{S}^d$  l'espace de second ordre sur les tenseurs symétriques on  $\mathbb{R}^d$  tell que  $(d = 1, 2, 3)$ .
- $\Omega^\ell$  est un domaine de  $\mathbb{R}^d(d = 2, 3)$ .
- $\overline{\Omega}^\ell$  l'adhérence de  $\Omega^\ell$ .
- $\Gamma^\ell$  la frontière de  $\Omega^\ell$  supposée régulière.
- $\Gamma_i^\ell(i = 1, 2, 3)$  une partie mesurable de la frontière  $\Gamma^\ell$  .
- $mes\Gamma_1^\ell$  la mesure de Lebesgue  $(d - 1)$  dimensionnelle de  $\Gamma_1^\ell$ .
- $[0, T]$  l'intervalle de temps  $T > 0$  .

## L'opérateur

- $\varepsilon^\ell$  opérateur des déformations ou linéarisées petits i,e
- $\varepsilon^\ell = \varepsilon(u^\ell)$  ,  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i^\ell + \partial_i u_j^\ell)$ .
- Div l'opérateur de divergence .
- $\nabla$  l' opérateur gradient.
- $\Delta$  l' opérateur de Laplace .
- $\gamma : H \rightarrow H_\Gamma$  l' opérateur de trace pour l'espace  $H$  .
- $\partial_k$  l'opérateur de dérivation partielle par rapport à la variable  $x_k$ .
- $I$  l'édentiti de l' opérateur en l'espace  $\mathbb{R}^3$  .

## Espaces fonctionnels

soit  $\ell = 1, 2$ .

$C^1(\overline{\Omega^\ell})$  l'espace des fonctions réel continument différentiables sur  $\overline{\Omega^\ell}$ .

$\mathcal{D}(\Omega^\ell)$  l'espace des fonctions réel indéfiniment différentiables et à support compact continu dans  $\overline{\Omega^\ell}$ .

$\mathcal{D}'(\Omega)$  l'espace des distributions sur  $\Omega$ .

$H^\ell$  l'espace  $L^2(\Omega^\ell)^N$ .

$H_1^\ell$  l'espace  $H^1(\Omega^\ell)^N$ .

$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$  l'espace de Sobolev d'ordre  $\frac{1}{2}$  sur  $\Gamma^\ell$ .

$H_{\Gamma^\ell}$  l'espace  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)^d$ .

$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$  l'espace dual de  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$ .

$H_\Gamma^\ell$  l'espace dual de  $H_{\Gamma^\ell} = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)^d$ .

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1^1 + \mathcal{H}_2^2$

$E_0 = L^2(\Omega^1) + L^2(\Omega^1)$

$E_1 = H^1(\Omega^1) + H^1(\Omega^2)$

$\mathcal{H}^\ell$  l'espace  $L^2(\Omega^\ell)_s^{d \times d}$ .

$\mathcal{H}_1^\ell$  l'espace  $\{\sigma \in \mathcal{H} / \text{div} \sigma = (\partial_j \sigma_{ij}) \in H\}$ .

$\gamma : H^\ell \rightarrow H_\Gamma^\ell$  l'application trace pour les fonctions vectorielles.

Si  $H^\ell$  est un espace de Hilbert réel et  $d \in \mathbb{N}^*$ , on utilise les notations suivantes.

$H^N$  l'espace  $\{x \in (x_i) / x_i \in H, \quad i = \overline{1, N}\}$ .

$H_s^{d \times d}$  l'espace  $\{x \in (x_{ij}) / x_{ij} = x_{ji} \in H, \quad i, j = \overline{1, N}\}$ .

$(\cdot, \cdot)_{H^\ell}$  le produit scalaire de  $H$ .

$\|\cdot\|_{H^\ell}$  la norme de  $H^\ell$ .

$H^{\ell\prime}$  l'espace dual de  $H^\ell$ .

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{\ell\prime} \times H^\ell}$  le produit de entre  $H^{\ell\prime}$  et  $H^\ell$ .

$\mathcal{L}(H^\ell)$  l'espace des applications linéaires et continues de  $H^\ell$  dans  $H^\ell$ .

Si de plus  $[0, T]$  un intervalle de temps,  $k \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq p \leq +\infty$ , on note par.

$C([0, T]; H^\ell)$  l'espace des fonctions continues de  $[0, T]$  dans  $H^\ell$ .

$C^1([0, T]; H^\ell)$  l'espace des fonctions continument dérivables de  $[0, T]$  dans  $H^\ell$ .

$L^p(0, T; H^\ell)$  l'espace des fonctions  $f$  mesurables de  $[0, T]$  dans  $H^\ell$ .

$W^{k,p}(0, T; H^\ell)$  l'espace de Sobolev de paramètres  $k$  et  $p$ .

Si  $H^1$  et  $H^2$  sont deux espaces de Hilbert réels, on note par

$\mathcal{L}(H^1, H^2)$  l'espace des applications linéaires et continues de  $H^1$  dans  $H^2$ .

$\|\cdot\|_{\mathcal{L}(H^1, H^2)}$  la norme de  $\mathcal{L}(H^1, H^2)$

## D'autres symboles

$\nu$  la normale unitaire sortante à  $\Gamma^\ell$ .

$\vartheta_v^\ell, \vartheta_\tau^\ell$  les composante normale et tangentielle du champ vectoriel  $\vartheta^\ell$  défini sur  $\overline{\Omega}$ .

Pour une fonctions  $f^\ell$ , on note

$\dot{f}, \ddot{f}$  les dérivées première et seconde de  $f$  par rapport au temps.

$\partial_i f$  la dérivée partielle de  $f$  par rapport à la  $i$ ème composante  $x_i$ .

$\nabla f$  le gradient de  $f$ .

$\varepsilon(f)$  la partie symétrique du gradient de  $f$  qui vaut  $\frac{1}{2}(\nabla f + \nabla^T f)$ .

$Div f$  la divergence de  $f$ .

$\partial f$  le sous différentiel (classique) de  $f$ .



# Introduction

La théorie mathématique de la mécanique du contact a fait impressionnante progrès ces dernières années. A présent, de nombreux résultats mathématiques et numériques traitant de divers aspects de la théorie sont dispersés à travers un variété de revues savantes et actes de conférence. Le principal intérêt de cette théorie réside dans ce qui se passe sur les frontières des domaines sous enquête. En effet, les modèles sont sous la forme d'équations variationnelles ou les inégalités avec des termes de limites non standard. Le temps est venu de mettre ces résultats et les méthodes mathématiques sous-jacentes dans un format unifié qui est plus accessible aux professionnels et aux études supérieures spécialisées étudiants. Des mesures dans ce sens ont été accomplis récemment dans le monographies de Han et Sofonea [13], et Shillor, Sofonea et Telega [26].

Les problèmes de contact avec ou sans frottement entre corps déformables ou entre deux corps viscoélastiques sont abondants en industrie et dans la vie de tous les jours. le simple contact entre une roue de voiture et une route, le piston avec la chemise, du train d'atterrissage avec le sol, ne sont que quelques exemples parmi bien d'autres.

Le contact entre corps déformables abonde dans l'industrie et tous les jours vie. En raison de l'importance industrielle des processus physiques qui aura lieu lors d'un contact, un effort considérable a été fait dans leur modélisation, l'analyse, l'analyse numérique, et des simulations numériques. Même si on se restreint aux publications traitant uniquement avec les processus impliqués dans collage ou dommages matériels, on trouve que l'ingénierie et la littérature de calcul sur ces questions et de sujets connexes est vaste. Par ailleurs, la littérature mathématique concernant ces sujets est en croissance rapide.

Le but de ce mémoire est de fournir une contribution dans l'étude de problème de contact bilatéral sans frottement avec adhésion pour les matériaux viscoélastiques avec

endommagement.

Partout dans ce manuscrit le comportement du matériau est modélisé à l'aide d'une équation constitutive viscoélastique de Kelvin-Voigt, le contact est décrit à l'aide de compliance normale ou bilatéral, avec adhésion et endommagement.

Chacun des problèmes est étudié selon le formalisme général suivant, nous commençons par décrire le problème mécanique de départ, et, après avoir précisé les hypothèses sur les données, nous présentons une formulation variationnelle du problème mécanique pour laquelle nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution faible pour le modèle considéré.

Outre les problèmes cités ci-dessus, il y a d'autres phénomènes réels et qui sont très importants tels que l'endommagement du matériau et l'adhésion des corps. Le sujet d'endommagements est extrêmement important dans l'ingénierie de conception, car il affecte directement la durée de vie utile de la structure ou du composant conçu. Il existe une très grande littérature d'ingénierie sur elle. Les modèles prenant en compte l'existence de les dommages internes de la matière sur le processus de contact ont été étudiés mathématiquement. Nouveaux modèles généraux pour les dommages ont été tirées dans [7, 8] de la principe de la puissance virtuelle. L'analyse mathématique de problèmes unidimensionnels peut être trouvé dans [9]. Dans tous cette memoire l'endommagement du matériau est décrit par un endommagement la capacité. La fonction d'endommagement  $\alpha^\ell$  varie entre 0 et 1. Quand  $\alpha = 1$  il n'y a pas d'endommagement dans le matériau, quand  $\alpha^\ell = 0$  le matériau est complètement endommagé, quand  $0 < \alpha^\ell < 1$  l'endommagement est partiel. Les problèmes de contact quasistatiques ont été investi dans [9,10].

Un autre phénomène sera considéré dans ce mémoire, ce phénomène a reçu récemment une très grande attention dans la littérature mathématique. L'analyse des modèles de contact avec adhésion est peut être trouver dans [1,3,8,9,10,12,21,24].

Processus d'adhésion sont importants dans l'industrie où les parties, habituellement non métallique, sont collés ensemble. Récemment, les matériaux composites ont atteint la prééminence, car ils sont très forts et la lumière, et par conséquent, d'une importance considérable dans l'aviation, l'exploration de l'espace et dans le l'industrie automobile.

Cependant les matériaux composites peuvent subir une délamination sous l'effet des tensions, où les différentes couches se détachent et bougent réciproquement une par rapport à l'autre. Pour modéliser le processus quand l'assemblage n'est pas permanent et le détachement peut se produire, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact.

nous devons décrire le contact adhésif entre les corps, quand une colle est ajoutée pour maintenir la surface visages du mouvement relatif, a aussi récemment reçu une attention accrue dans la littérature mathématique. L'analyse des modèles de contact adhésif peut être trouvée dans [8, 14, 13, 27, 16] et dans les monographies récemment [17, 18]. Analyse des modèles pour adhésif de contact par. La nouveauté dans tous les documents ci-dessus est l'introduction d'un de surface variable interne, le domaine de liaison, désigné dans ce document par, il décrit dans cette memoire on introduit une variable interne d'état  $\beta$  définie sur  $\Gamma_3 \times (0, T)$  qui représente l'intensité d'adhésion sur la surface de contact, telle que  $0 \leq \beta \leq 1$ . Quand  $\beta = 1$  l'adhésion est complète et tous les liens sont actifs, quand  $\beta = 0$  tous les liens sont désactivés et il n'y a pas d'adhésion, quand  $0 < \beta < 1$  c'est le d'une adhésion partielle et mesure la fraction des liens. Nous renvoyons le lecteur à l'étendue bibliographie sur le sujet dans [26, 17].

Ce mémoire est composé de deux chapitres et deux annex.

Dans le premier chapitre, le but est d'établir le modèle mathématique décrivant l'évolution deux corps déformable ayant une loi viscoélastique sous l'action des efforts extérieurs, et rappelle de quelque notation de base de la mécanique des milieux continus. on commence par définir le cadre physique, Contrainte et déformations, les lois de comportement avec endommagement, les conditions aux limites et puis la formulation mécanique de problème à étudier.

Dans le second chapitre du mémoire nous considérons une version d'un modèle quasi-statique décrivant le contact bilatéral, sans frottement, avec adhésion entre deux corps viscoélastiques non linéaires et endommagement.

Le problème se formule par un système qui comporte une équation variationnelle par rapport au champ de déplacement, une inéquation variationnelle du type parabolique par

rapport au champ d'endommagement, une équation différentielle d'ordre un par rapport au champ d'adhésion. On établit un résultat d'existence et d'unicité de la solution. La démonstration est basée sur des arguments d'équations variationnelles, un résultat classique concernant les inéquations paraboliques et des arguments de point fixe.

Finalement, ce mémoire se termine par une conclusion dont on résumé les principaux résultats obtenus durant l'étude du problème considéré .

# Historique générale de contact

La mécanique de contact modernes est vieille d'environ 130 ans. Il a commencé en 1882 avec le publication du fameux papier de Hertz sur les contacts des élastiques solides , qui donne la solution pour le contact sans frottement entre deux corps ellipsoïdales. Cette problème est venu de l'interférence optique entre les lentilles de verre. Plus loin développements de la théorie de contact apparaissent seulement au début du 20ème siècle en application aux chemins de fer, des réducteurs et des roulements à contact de roulement. Les progrès réalisés dans la mécanique de contact a été associée à la suppression des restrictions de la théorie de Hertz : élasticité linéaire, le contact sans frottement et petites déformations. L'école russe de mécaniciens, à partir de Galin , et Muskhelishvili , apporté une contribution importante à ce développement. Une synthèse des analyses des solutions et des approches pour des problèmes de contact peuvent être trouvées,

Depuis la solution analytique est réalisable seulement pour quelques géométries simples, conditions aux limites et surtout pour les matériaux linéaires, il ne peut fournir rugueuse approximations pour des problèmes de contact industrielle complexes, qui comprennent complexe géométries, la friction, l'usure, l'adhérence, grandes déformations et des matériaux non linéaires. Des outils plus puissants sont nécessaires pour répondre à la demande industrielle pour un rapide et précis solution de ces problèmes.

Depuis 1965 (NASTRAN), la MEF est l'un des plus utilisable et efficace des outils pour le traitement des problèmes dans la mécanique des structures. Pour répondre à la exigences de l'industrie, la communauté scientifique ont élaboré un rigoureux cadre mathématique valable pour l'incorporation du contact dans la MEF, qui exigé des efforts considérables de mathématiciens et mécaniciens. Tout d'abord, la problème de frottement Signorini (de contact unilatéral entre un corps déformable et une fondation rigide) a été

traité, outre les approches développées ont été étendues le cas de contact avec frottement unilatérale dans les petites et grandes déformations et enfin à bilatéral ou le contact de corps multiples. Dans le même temps, la pratique du génie teste les régimes de solutions et de nouvelles tâches difficiles proposées. Le travail sur un précis et méthode fiable pour traiter de grandes couissant contact de frottement est toujours en cours.

L'histoire de contacts de calcul a commencé en 1933 avec les travaux de Signorini. Il fut le premier qui a formulé la problématique générale de l'équilibre d'un linéaire corps élastique en contact sans frottement avec une fondation rigide . La ouvres d'Fichera représentent le premier traitement des questions de l'existence et unicité de la solution de inéquations variationnelles résultant de la minimisation de fonctionnelles sur convexes d'espaces de Banach, ce qui donne de sa rigoureuse analyse d'une classe de problèmes de Signorini . Variational inégalité est une nouvelle structure dans le domaine de la théorie de l'optimisation ; de nouvelles approches sont nécessaire pour utiliser une telle formulation pour les problèmes pratiques de la physique et de la mécanique.

"Les inégalités dans la mécanique et la physique" par Duvaut et les Lions a été une percée scientifique dans ce direction, les auteurs ont étudié la solution des problèmes de contact de frottement et contact de grande déformation. Parmi les contributions pertinentes début, nous pouvons énumérer Cocu , Panagiotopoulos et Rabier et Un cohérente description de l'approche de l'inégalité variationnelle problèmes de contact est donnée dans le livre de Kikuchi et Oden , où, entre autres résultats importants du existence et l'unicité de la solution du problème de Signorini est prouvée. La les questions de la stabilité de la solution de contacts problème ont été discutés par Klarbring , les exemples de non-unicité ou la non-existence étaient démontré par Klarbring et par Martins . L'existence et les résultats d'unicité pour des problèmes de contact dynamiques peuvent être trouvés dans Martins et Oden , Jarusek et Eck et d'autres.

Le problème de contact sans frottement formulée comme une inéquation variationnelle présente une type particulier de problème de minimisation avec contraintes d'inégalité, qui peut être efficacement traitée de manière standard (méthode de pénalité (PM), multiplicateur de Lagrange méthode (LMM), méthode lagrangienne augmentée (ALM)). Mal-

heureusement, il n'y a pas principe de minimisation associé pour le contact de friction problème . Un tel problème est compliqué et inhabituel pour théorie d'optimisation que l'énergie du système (en fonction objective optimisation) dépend de l'état de frottement, ce qui dépend à son tour le contact normale pression, qui dépend elle-même sur les déplacements, enfin l'énergie dépend de la solution du problème, qui est inconnue. Comme il n'y a pas d'énergie en douceur fonctionnelle associée au problème du contact de frottement, sa formulation et résolution présentent de véritables défis.

Ce n'est qu 'environ cent ans plus tard, en 1971, que Johnson, Kendall, et Roberts trouveront une solution similaire pour le cas des contacts adhésifs.

L'hypothèse d'une interface de contact priori connu du courant les résultats de l'étape de calcul dans une reformulation de l'inégalité variationnelle dans un problème de l'égalité variationnelle avec une durée de contact spéciale; la forme de ce terme dépend de la méthode choisie pour respecter les contraintes de contact. Parmi les méthodes bien connues et largement utilisées, il ya des méthodes barrière et pénalités, LMM et leurs combinaisons. Une autre branche de méthodes fait usage de différents techniques de programmation mathématique : application de la méthode simplex à problèmes de contact, la programmation quadratique paramétrique méthode . Indépendamment de ces deux branches, il existe un groupe de méthodes directes, qui traite le problème de contact indépendamment de la problème structurel. La méthode de flexibilité proposé par Francavilla et Zienkiewicz et modifié et amélioré par Jean est rarement mentionné dans la littérature scientifique sur le contact de calcul. À la pratique , cette méthode démontre une plus grande robustesse et rapidité de comparaison avec les méthodes ordinaires si le nombre de neuds en contact reste modérée. Mais il est non applicable pour les grands problèmes de contact et la parallélisation de la méthode est difficilement possible. Une liste complète des méthodes utilisées pour le numérique le traitement des problèmes de contact .

# Chapitre 1

## Formulation mathématique des problèmes aux limites

L'objet de ce premier chapitre est d'établir le modèle mathématique décrivant l'évolution d'un corps déformable ayant une loi viscoélastique sous l'action des efforts extérieurs. Ceci se traduit mathématiquement par l'établissement d'un système d'équations aux dérivées partielles posées sur un domaine de  $\mathbb{R}^d (d = 2; 3)$ .

Ce système comprend la loi de comportement du matériau, l'équation du mouvement entre deux corps ainsi que les conditions initiales et aux limites auxquelles il est soumis.

Ce chapitre est consacré aux rappels de quelques notions de base de la mécanique des milieux continus telles que le tenseur des contraintes, le tenseur des déformations linéarisées et l'introduction des lois de comportement viscoélastiques. Il traite aussi les conditions aux limites de contact sans frottement avec adhésion entre deux corps viscoélastiques.

La suite est réservée à la formulation des différents problèmes aux limites qui vont faire l'objet de cette mémoire.



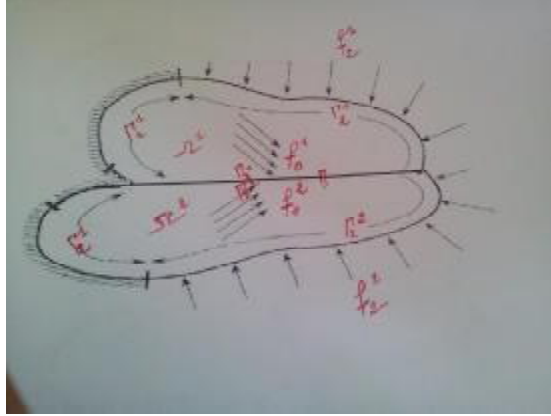


FIGURE 1.1 – Cadre physique de problème mécanique

## 1.1 Cadre physique de problème mécanique

Dans cette section, nous allons introduire le cadre physique et les modèles mathématiques des problèmes utilisés dans ce mémoire. Ensuite, nous indiquerons les formulations mathématiques pour les problèmes de contact avec adhésion et endommagement entre deux corps viscoélastique.

Soit deux corps matérielles qui occupent les domaines bornées  $\Omega^1$  et  $\Omega^2$  de  $\mathbb{R}^d$ , ( $d = 2, 3$ ), avec les surfaces frontières régulières  $\Gamma^\ell$ , partitionnée en trois parties mesurables  $\Gamma_1^\ell$ ,  $\Gamma_2^\ell$  et  $\Gamma_3^\ell$ , telles que  $\text{mes } \Gamma_1^\ell > 0$ . Nous notons par  $\nu^\ell$  la normale unitaire sortante à  $\Gamma^\ell$ . Les corps sont encastrés sur  $\Gamma_1^\ell$  dans une structure fixe. Sur  $\Gamma_2^\ell$  agissent des tractions surfaciques de densité  $\mathbf{f}_2^\ell$  et dans agissent des forces volumiques de densité  $\mathbf{f}_0^\ell$ . Nous supposons que  $\mathbf{f}_2^\ell$  et  $\mathbf{f}_0^\ell$  varient très lentement par rapport au temps et par conséquent le processus est quasistatique. Soit  $T > 0$  et soit  $[0, T]$  l'intervalle de temps en question. Les corps sont en contact sans frottement et adhésion avec un obstacle sur la partie  $\Gamma_3$ .

Nous prenons en considération les propriétés mécaniques du corps. Notre objectif sera d'étudier l'évolution de ces propriétés dans le temps, sous l'hypothèse des petites transformations.

Nous utiliserons ce cadre physique dans le dixième chapitre de ce mémoire.

## 1.2 Rappels de la mécanique des milieux continus

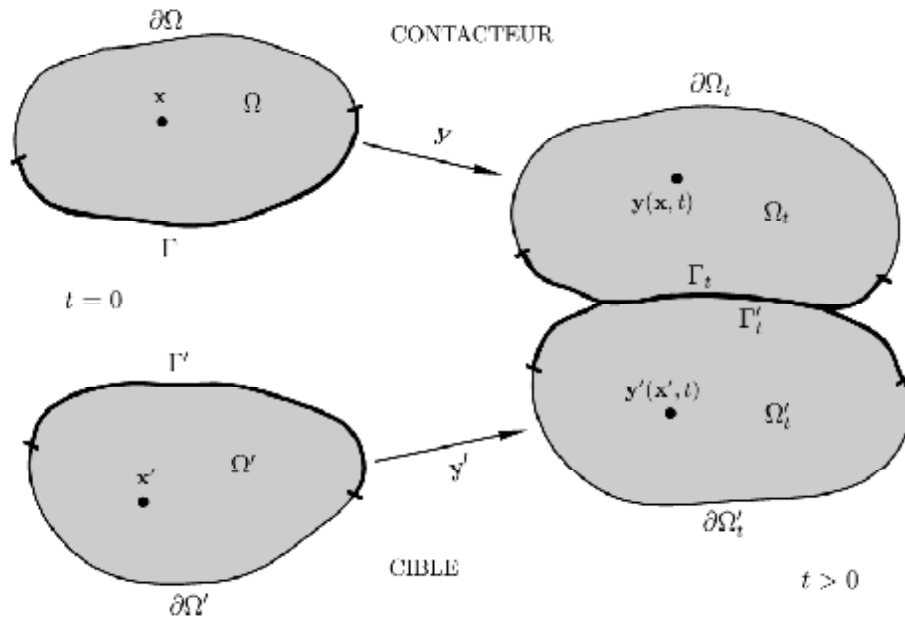


FIGURE 1.2 – Contact entre deux solides d'éformables.

Dans cette partie, après quelques rappels de mécanique des milieux continus, en partant de la modélisation du problème physique, nous présentons le formalisme des lois de comportement viscoélastiques. Ensuite, nous rappelons le système d'équations aux dérivées partielles qui sera l'objet de notre étude. Pour compléter le modèle, on présente quelques considérations physiques sur les conditions aux limites de contact sans frottement avec adhésion.

### 1.2.1 Contrainte et déformations

On considère un corps déformable occupant un domaine borné  $\Omega^\ell$  et  $\Omega^\ell \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$  et  $\ell = 1, 2$ ), avec une surface frontière régulière et de Lipschitz continue  $\Gamma^\ell$ . L'objet du problème, du point de vue mécanique est l'étude dans un intervalle de temps  $[0, T]$  de l'évolution entre deux corps matériels due à l'application des forces extérieurs sur l'intérieur deux corps et sur sa frontières et en adhésion avec endommagement.

Les inconnues du problème sont le champ des déplacements  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2)$  tel que  $\mathbf{u}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , et le champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2)$  tel que  $\boldsymbol{\sigma}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ ,  $\mathbb{S}^d + \mathbb{R}_s^{d \times d}$  est l'espace des tenseurs symétriques du dixième ordre sur  $\mathbb{R}^d$  et le champ endommagement  $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2)$  tel que  $\alpha^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  et le champ d'adhésion  $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , et par  $\varepsilon^\ell = \varepsilon(\mathbf{u}^\ell)$  le tenseur de déformation linéarisé.

La loi fondamentale de la mécanique des milieux continus exprimant l'équivalence entre des efforts extérieurs et le torseur des accélérations pour un système quelconque, conduit à l'équation du mouvement

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}^\ell = \text{Div } \boldsymbol{\sigma}^\ell + \mathbf{f}_0^\ell, \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (1.1.1)$$

Dans cette équation,  $\rho$  désigne la densité de masse,  $\ddot{\mathbf{u}}$  est le champ des accélérations,  $\mathbf{f}_0 : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  et le champ des densités des forces volumiques appliquées sur le corps et qui sont des données du problème,  $\text{Div } \boldsymbol{\sigma}^\ell$  est la divergence du champ des contraintes.

Ces processus d'évolution modélisée par (1.1.1) s'appellent processus dynamiques, dans certaines situations l'équation (1.1.1) peut se simplifier, par exemple dans le cas où  $\dot{\mathbf{u}}^\ell = 0$ , il s'agit d'un processus d'équilibre (processus statiques), ou bien dans le cas où le champ des vitesses  $\dot{\mathbf{u}}^\ell$ , varie très lentement par rapport au temps, c'est-à-dire que le terme  $\rho^\ell \dot{\mathbf{u}}^\ell = 0$ , peut être négligé (processus quasistatiques). Dans ces deux cas l'équation (1.1.1) devient :

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma}^\ell + \mathbf{f}_0^\ell = 0, \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (1.1.2)$$

Dans la suite, on va considérer des matériaux élastiques et viscoélastiques dans le cadre des petites transformations. Dans ce cas, on a besoin du champ des déformations linéarisé  $\varepsilon^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$  défini par :

$$\varepsilon^\ell(u_{ij}), \quad \varepsilon_{ij}^\ell = \frac{1}{2}(\partial_j u_i^\ell + \partial_i u_j^\ell), \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T). \quad (1.1.3)$$

où  $\partial_k$  représente l'opérateur de dérivation partielle par rapport à la variable  $x_k^\ell$ . On précise en outre qu'on adopte la convention de l'indice muet. Souvent, pour marquer la dépendance du champ des déformations par rapport au champ des déplacements  $\mathbf{u}$ , on va le noter  $\varepsilon^\ell(\mathbf{u}^\ell)$ .

Les équations précédentes sont insuffisantes à elles seules pour décrire les mouvements des milieux continus, elles doivent être complétées par d'autres relations caractérisant le comportement de chaque matériau, ce sont les lois de comportement que nous décrivons dans la section suivante.

### 1.2.2 Lois comportement avec endommagement

Les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement des lois de comportement. L'équation du mouvement (1.1.1) ou l'équation d'équilibre (1.1.2), chacune des deux équations équivaut à  $d$  relations scalaires, et du point de vue mathématique cette équation ne suffit pas à modéliser le problème d'équilibre du corps car, par exemple les  $d$  composantes  $u_i^\ell$  champ de déplacement ne figurent pas dans cette équation. Du point de vue physique, chacune des équations (1.1.1) et (1.1.2) exprime une loi universelle valable pour tous les matériaux. Si donc cette équation suffit à déterminer tous les paramètres, cela signifierait que, soumis à des conditions identiques, les divers milieux continus auraient des comportements identiques. Ceci est naturellement absurde. Donc chaque équation (1.1.1) ou (1.1.2) est insuffisante, à elle seule, à décrire l'équilibre des corps matériels, elle doit être complétée par d'autres relations qui caractérisent le comportement de chaque type de matériau et que l'on désigne sous le vocable général la loi de comportement qui est une relation reliant le tenseur de contrainte, le tenseur de déformation et leurs dérivées. On présente dans cette mémoire, la loi de comportement de matériaux viscoélastiques avec endommagement.

#### (a) Lois de comportement des matériaux élastiques

La loi de comportement est de la forme

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell = \mathcal{F}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}^\ell(\mathbf{u}^\ell).$$

où  $\mathcal{F}^\ell$  est une application linéaire ou non linéaire. Cette loi peut modeler quelques propriétés mises en évidence par les expériences de chargement monotone : linéarité de la courbe

$\boldsymbol{\sigma}^\ell = \boldsymbol{\sigma}^\ell(\varepsilon)$  (suivant que  $\mathcal{F}$  soit linéaire ou non), durcissement ou adoucissement de la courbe  $\boldsymbol{\sigma}^\ell = \boldsymbol{\sigma}^\ell(\varepsilon)$  (suivant que  $\mathcal{F}^\ell$  soit monotone ou non). Par contre, ni le fluage, ni la relaxation ne peuvent être décrits par la loi (1.1.4).

En élasticité linéaire  $\boldsymbol{\sigma}^\ell$  est une fonction linéaire de  $\varepsilon^\ell$ , c'est à dire  $\boldsymbol{\sigma}^\ell = \mathcal{E}^\ell(\varepsilon^\ell)$ , où  $(\sigma_{ij}^\ell = \mathcal{E}_{ijkl}^\ell)$  est un tenseur d'ordre quatre.

## b) Lois de comportement des matériaux viscoélastiques.

La loi de comportement est de la forme

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell) + \mathcal{G}^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}^\ell)), \quad (1.1.4)$$

Où  $\mathcal{A}^\ell$  et  $\mathcal{G}^\ell$  sont des fonction constitutives non linéaires.  $\mathcal{A}^\ell$  repérateur de viscosité et  $\mathcal{G}^\ell$  désigne l'opérateur d'élasticité. Et pour un corps élastique lorsque  $\mathcal{A}^\ell = 0$ , la loi se réduit à

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell = \mathcal{G}^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \alpha^\ell) \quad (1.1.5)$$

Nous rappelons qu'en viscoélasticité linéaire, le tenseur de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}^\ell = (\sigma_{ij}^\ell)$  est donné par

$$(\sigma_{ij}^\ell) = a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\dot{\mathbf{u}}^\ell) + g_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}^\ell) \quad (1.1.6)$$

$\mathcal{A}^\ell = (a_{ijkl}^\ell)$  est le tenseur de viscosité et  $\mathcal{G}^\ell = (g_{ijkl})$  le tenseur d'élasticité, pour  $i, j, k, l = 1, \dots, d$ . La loi de comportement (1.1.5) est une loi viscoélastique du type Kelvin-Voigt.

L'investigation des propriétés mécaniques des matériaux tels que les pâtes, les huiles et les cires, a mis en évidence que certains phénomènes, tels que le fluage et la relaxation, ne peuvent être décrits par les lois de comportement élastique. C'est pour cela que les lois viscoélastique ont été introduites. Elles décrivent le comportement des matériaux comme les métaux, les polymères, les caoutchoucs et les roches. Nous envisageons ici des matériaux qui ont des propriétés élastique, mais on même temps, les essais monotone indiquent que la courbe  $\boldsymbol{\sigma}^\ell = \boldsymbol{\sigma}^\ell(\varepsilon)$  dépend de ,  $\varepsilon^\ell = \varepsilon^\ell(\dot{\mathbf{u}}^\ell)$ . Ces sont les matériaux

viscoélastiques. Parmi les lois viscoélastiques, nous citons la loi de viscoélastiques de Kelvin-Voigt.

### c) Loi de comportement viscoélastique avec endommagement.

Si nous prenons en considération l'effet de l'endommagement du matériau durant le contact, nous arrivons à une généralisation de la loi (1.1.5) qui est la loi de comportement viscoélastique avec endommagement ayant la forme

$$\sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell) + \mathcal{G}^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \alpha^\ell), \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T). \quad (1.1.7)$$

Notons que les valeurs de la fonction d'endommagement  $\alpha^\ell$  sont comprises entre zéro et un. Lorsque  $\alpha^\ell = 1$ , il n'y a pas d'endommagement dans le matériau, quand  $\alpha^\ell = 0$ , le matériau est complètement endommagé, pour  $0 < \alpha^\ell < 1$ , il y a un endommagement partiel et le système a une capacité de résistance réduite.

L'inclusion différentielle suivante sera utilisée pour décrire l'évolution du champ d'endommagement

$$\dot{\alpha}^\ell - k^\ell \Delta \alpha^\ell + \partial \varphi_{K^\ell}(\alpha^\ell) \ni \mathbf{S}^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \alpha^\ell) \quad (1.1.8)$$

L'ensemble des fonctions d'endommagement admissibles  $K^\ell$  défini par

$$K^\ell = \{\xi^\ell \in H_1(\Omega^\ell) \mid 0 \leq \xi^\ell \leq 1 \quad \text{dans } \Omega^\ell\} \quad (1.1.9)$$

$k^\ell$  est un coefficient positif,  $\partial \varphi_{K^\ell}$  représente le sous-différentielle de la fonction indicatrice  $\varphi_{K^\ell}$ , est  $\mathbf{S}$  une fonction constitutive donnée qui représente la source d'endommagement dans le système.

### 1.2.3 Conditions aux limites de contact avec adhésion.

Comme  $\Gamma^\ell$  est partitionnée en trois parties mesurables et disjointes  $\Gamma_1^\ell$ ,  $\Gamma_2^\ell$  et  $\Gamma_3$ , nous donnons dans ce paragraphe les conditions aux limites sur chacune des trois parties.

### La condition aux limites de déplacement.

Les corps sont encastré à la partie  $\Gamma_1^\ell \times (0, T)$ , le champ des déplacements  $y$  est par conséquent nul

$$\mathbf{u}^\ell = 0, \quad \text{sur} \quad \Gamma_1^\ell \times (0, T) \quad (1.1.12)$$

### Les conditions aux limites de traction.

Une traction surfacique de densité  $f_2^\ell$  agit sur la partie  $\Gamma_2^\ell \times (0, T)$ , et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy  $\sigma^\ell \nu^\ell$  satisfait

$$\sigma^\ell \nu^\ell = f_2^\ell, \quad \text{sur} \quad \Gamma_2^\ell \times (0, T) \quad (1.1.13)$$

Cette condition représente la condition aux limites de traction, sa signification consiste en ce que le vecteur des contraintes de Cauchy  $\sigma^\ell \nu^\ell$  est imposé sur la partie  $\Gamma_2^\ell$  de la frontière  $\Gamma^\ell$  la fonction  $\mathbf{f}_2^\ell$  représente la densité des forces appliquées de surface et constituant une donnée du problème.

Si  $\Gamma_1^\ell = \emptyset$  le problème aux limites est un problème de traction pure et si  $\Gamma_2^\ell = \emptyset$ . le problème aux limites est un problème de déplacement pur. Si les parties  $\Gamma_1^\ell$  et  $\Gamma_2^\ell$  sont toutes les deux de mesure de Lebesgue  $N - 1$  dimensionnelle strictement positive, le problème considéré est un problème mixte déplacement-traction.

### Les conditions aux limites bilatéral de contact

dans (fig (1.3)) soit  $g_n$  la déplacement normal de contact

si  $g_n > 0$ , les deux corps sont séparés

si  $g_n = 0$ , les deux corps sont en contact

si  $g_n = 0$ , les deux corps sont sèpètration

Le contact dite bilatèrale décrit la situation lorsque le contact entre le corps et la fondation est maintenue en tout temps. Ça peut être trouvé dans beaucoup de machines et de pièces et composants de mécanique mobile équipement. Ensuite, il n'y a pas d'écarr

Le terme «contacts bilatéraux» a ce sens tout au long de cette monographie. Cependant, dans la littérature de l'ingénierie «contact bilatéral» des moyens parfois que

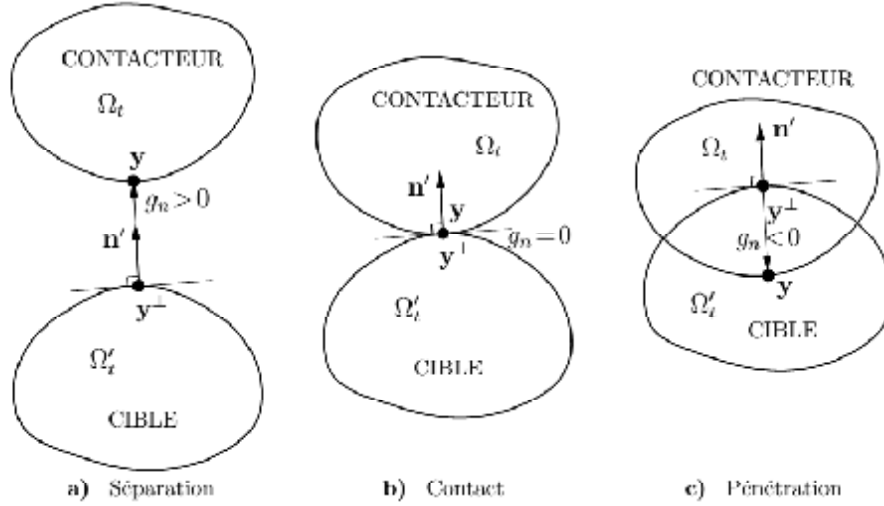


FIGURE 1.3 – Etat d'écart, de contact et de pénétration du point  $y(x, t)$ .

le système est restreint pour se déplacer entre deux obstacles ou les fondations. A titre d'exemple, on peut considérer les vibrations d'un faisceau entre deux butées.

Le contact entre les deux corps est bilatéral si le contact est maintenu pendant le mouvement. Cette propriété se traduit mathématiquement par

$$\sigma_v^1 = \sigma_v^2 \quad , \quad u_v^1 + u_v^2 = 0 \quad , \quad \text{sur} \quad \Gamma_3^\ell \times (0, T) \quad (1.1.14)$$

### Condition aux limites de contact avec adhésion.

On considère deux corps déformable (voir .g 1) occupent les domaines bornées  $\Omega^1$  et  $\Omega^2$  de  $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ , avec une surface frontière  $\partial\Omega^\ell = \Gamma^\ell$  supposée assez régulière, partitionnée en trois parties mesurables disjointes deux à deux  $\Gamma^\ell = \Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell \cup \Gamma_3^\ell$ ,  $\Gamma_i^\ell \cap \Gamma_j^\ell = \emptyset$ , pour  $i \neq j$ . Soit  $\nu^\ell$  la normale unitaire sortante à  $\Gamma^\ell$ .

On va décrire les conditions aux limites de contact avec adhésion  $\Gamma_3 \times (0, T)$ , on introduit une variable interne d'état  $\beta$  définie sur  $\Gamma_3 \times (0, T)$  qui représente l'intensité d'adhésion sur la surface de contact, telle que  $0 \leq \beta \leq 1$ . Quand  $\beta = 1$  l'adhésion est complète et tous les liens sont actifs, quand  $\beta = 0$  tous les liens sont désactivés et il n'y a pas d'adhésion, quand  $0 < \beta < 1$ , c'est le d'une adhésion partielle et mesure la fraction des liens(voir .g 1.4).



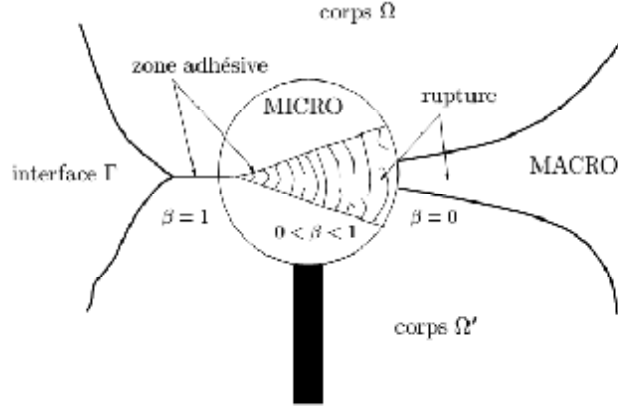


FIGURE 1.4 – Variable interne  $\beta$  de mesure de l'adhésion.

On suppose que la contrainte normale satisfait

$$\sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (1.1.15)$$

On suppose que la résistance au mouvement tangentiel entre deux corps est générée par la colle en comparaison à ce que la traction tangentielle soit négligeable. Ainsi, elle dépend seulement de l'intensité d'adhésion et du déplacement tangentiel.

$$-\sigma_\tau^1 = \sigma_\tau^2 = p_\tau(\beta, \mathbf{u}_\tau^1 - \mathbf{u}_\tau^2) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (1.1.16)$$

En particulier, on doit considérer le cas :

$$p_\tau(\beta, r) = \begin{cases} q_\tau(\beta)r & \text{si } \|r\| < L_0, \\ q_\tau(\beta)\frac{r}{\|r\|} & \text{si } \|r\| > L_0, \end{cases} \quad (1.1.17)$$

Où  $L_0$  est la longueur limite liée, et  $p_\tau$  est une fonction de raideur tangentielle non négative. Le processus est supposé être gouverné par l'équation différentielle

$$\dot{\beta} = H_{ad}(\beta, R(|\mathbf{u}_\tau^1 - \mathbf{u}_\tau^2|)) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.1.18)$$

$H_{ad}$  est une fonction générale qui s'annule quand le premier de ses variables s'annule.

La fonction  $R : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une troncature définie par

$$R(s) = \begin{cases} s & \text{si } 0 \leq s \leq L \\ L & \text{si } s > L \end{cases} \quad (1.1.19)$$

où  $L > 0$  est la longueur caractéristique des liens.

On donne quelques exemples de ce genre de fonctions

$$H_{ad}(\beta, r) = -\gamma_\nu \beta_+ r^2.$$

où  $\gamma_\nu$  est la constante de l'énergie de collage.

#### 1.2.4 Formulation des problèmes

L'évolution deux corps déformable sous l'action des efforts extérieurs est modélisée mathématiquement par un système d'équations aux dérivées partielles contenant l'équation de mouvement (ou d'équilibre) des corps la les comportement du matériau ainsi que les condition initiales et au limites auxquelles il est soumis. On considère dans les dixième chapitre des matériaux avant des lois comportements viscoélastiques soumis à des condition aux limites de contact avec adhésion citées dans la paragraphe, dans le cas quasistatique.

## Problème

Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2)$  tel que  $\mathbf{u}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , et le champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2)$  tel que  $\boldsymbol{\sigma}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ , et le champ endommagement  $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2)$  tel que  $\alpha^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  et le champ d'adhésion  $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}^\ell &= \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell) + \mathcal{G}^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \alpha^\ell), && \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \\
\dot{\alpha}^\ell - k^\ell \Delta \alpha^\ell + \partial \varphi_{K^\ell}(\alpha^\ell) &\ni S^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \alpha^\ell), && \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \\
\text{Div } \boldsymbol{\sigma}^\ell + f_0^\ell &= \mathbf{0}, && \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \\
\mathbf{u}^\ell &= \mathbf{0}, && \text{sur } \Gamma_1^\ell \times (0, T), \\
\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell &= f_2^\ell, && \text{sur } \Gamma_2^\ell \times (0, T), \\
\boldsymbol{\sigma}_\nu^1 &= \boldsymbol{\sigma}_\nu^2, \quad \mathbf{u}_\nu^1 + \mathbf{u}_\nu^2 = \mathbf{0}, && \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \\
-\sigma_\tau^1 &= \sigma_\tau^2 = p_\tau(\beta, u_\tau^1 - u_\tau^2), && \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \\
\dot{\beta} &= H_{ad}(\beta, R(|u_\tau^1 - u_\tau^2|)), && \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \\
\frac{\partial \alpha^\ell}{\partial \boldsymbol{\nu}^\ell} &= 0, && \text{sur } \Gamma^\ell \times (0, T), \\
\mathbf{u}^\ell(0) &= \mathbf{u}_0^\ell \quad \alpha^\ell(0) = \alpha_0^\ell, && \text{dans } \Omega^\ell, \\
\beta(0) &= \beta_0, && \text{sur } \Gamma_3.
\end{aligned}$$

## Chapitre 2

# Problème bilatéral de contact avec adhésion et endommagement entre deux corps viscoélastique

Dans ce chapitre nous considérons une version d'un modèle quasistatique décrivant le contact bilatéral, sans frottement, avec adhésion entre deux corps viscoélastiques non linéaires et endommagement.

Le processus d'adhésion sur la surface commune de contact est modélisé par une surface variable, le champ d'adhésion. L'endommagement causé par les déformations élastiques du matériau est modélisé par une variable interne du corps appelée champ d'endommagement, la contrainte tangentielle, due à l'adhésion est incluse.

Le problème est formulé comme un système qui comporte une équation variationnelle par rapport au champ de déplacement, une équation intégro différentielle pour le champ d'adhésion et une inéquation variationnelle du type parabolique par rapport au champ d'endommagement. Notre but est d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité par la construction des applications qui sont des contractions dans les espaces de Hilbert.

Cette section est divisée en trois paragraphes. Dans le premier paragraphe, nous commençons par formuler le problème mécanique, puis nous indiquons les hypothèses sur les données. Ensuite, dans le deuxième paragraphe nous donnons la formulation variationnelle du problème mécanique.

Enfin, dans le troisième paragraphe, nous énonçons et démontrons un théorème d'existence et d'unicité de la solution faible relatif au problème.

La démonstration est réalisée en plusieurs étapes et s'appuie sur la théorie des opérateurs fortement monotones suivie d'une version du théorème de Cauchy-Lipschitz et des arguments du point fixe.

## 2.1 Formulation du problème mécanique-Hypothèses

Les particules matérielles des corps occupent les domaines bornés  $\Omega^1$  et  $\Omega^2$  de  $\mathbb{R}^d$ . Dans la suite, nous employons un indice supérieur  $\ell$  pour indiquer que la quantité est liée au domaine  $\Omega^\ell$ ,  $\ell = 1, 2$ . Pour chaque domaine  $\Omega^\ell$ , nous supposons que sa frontière  $\Gamma^\ell$  est lipschitzienne continue, et divisée en trois parties disjointes mesurables  $\Gamma_1^\ell$ ,  $\Gamma_2^\ell$  et  $\Gamma_3^\ell$  avec  $\text{mes}(\Gamma_1^\ell) > 0$ ,

La normale unitaire extérieur à  $\Gamma^\ell$  est noté par  $\boldsymbol{\nu}^\ell = (\nu_i^\ell)$

Ces deux corps sont encastrés dans  $\Gamma_1^\ell \times (0, T)$ , soumis à une densité de forces volumiques  $f_0^\ell$  qui agissent sur  $\Omega^\ell \times (0, T)$ , et des forces surfaciques de densité  $f_2^\ell$  qui agissent sur  $\Gamma_2^\ell \times (0, T)$ . Les deux corps sont en contact avec adhésion le long de la partie commune  $\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2$  qui sera noté  $\Gamma_3$  ci-dessous.

On note par  $\mathbf{u}^\ell$  les vecteurs des déplacements, et par  $\boldsymbol{\sigma}^\ell$  le tenseur des contraintes, et par  $\boldsymbol{\varepsilon}^\ell = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell)$  le tenseur de déformation linéarisé. La loi de comportement pour un matériau viscoélastique non linéaire et endommagement est de la forme

$$\boldsymbol{\sigma}(t)^\ell = \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell) + \mathcal{G}^\ell(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \alpha^\ell)$$

où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{G}$  sont des fonctions constitutives non linéaires.  $\mathcal{A}$  représente l'opérateur de viscosité et  $\mathcal{G}$  désigne l'opérateur d'élasticité.

On note par  $\mathbf{u} = (u^1, u^2)$ ,  $\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2)$ ,  $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2)$  et, pour la simplicité on note aussi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) &= (\varepsilon^1, \varepsilon^2) \in \mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^2, \quad \varepsilon^1 = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^1), \varepsilon^2 = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^2), \quad \forall \mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \in V, \\ \mathcal{A}(\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{v}})) &= (\mathcal{A}^1(\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{v}}^1)), \mathcal{A}^2(\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{v}}^2))), \quad \forall (\varepsilon^1, \varepsilon^2) \in \mathcal{H}, \\ \mathcal{G}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \alpha) &= (\mathcal{G}^1(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^1), \alpha^1), \mathcal{G}^2(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^2), \alpha^2)), \quad \forall (\varepsilon^1, \varepsilon^2) \in \mathcal{H}, \forall (\alpha^1, \alpha^2) \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

On décrit maintenant les conditions sur la surface de contact  $\Gamma_3$ . On suppose que le contact est bilatéral, i.e., il n'y'aura pas de séparation entre les corps pendant le processus.

Par conséquent

$$u_\nu^1 + u_\nu^2 = 0 \quad \text{on } \Gamma_3 \times [0, T]. \quad (2.1.1)$$

De plus

$$\nu^1 = -\nu^2 \quad \text{sur } \Gamma_3, \quad \text{et } \boldsymbol{\sigma}^1 \nu^1 = -\boldsymbol{\sigma}^2 \nu^2, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T].$$

Par conséquent

$$\sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau^1 = -\boldsymbol{\sigma}_\tau^2 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \quad (2.1.2)$$

On suppose que la résistance au mouvement tangentiel est générée par la colle en comparaison à ce que la traction tangentielle soit négligeable. Ainsi, elle dépend seulement de l'intensité d'adhésion et du déplacement tangentiel

$$-\boldsymbol{\sigma}_\tau^1 = \boldsymbol{\sigma}_\tau^2 = p_\tau(\beta, \mathbf{u}_\tau^1 - \mathbf{u}_\tau^2) \quad \text{on } \Gamma_3 \times [0; T]. \quad (2.1.3)$$

Le processus est supposé être gouverné par l'équation différentielle

$$\dot{\beta} = H_{ad}(\beta, R(|\mathbf{u}_\tau^1 - \mathbf{u}_\tau^2|)). \quad (2.1.4)$$

$H_{ad}$  est une fonction générale qui s'annule quand son premier argument s'annule, et la fonction  $R$

est une tracature Soit  $\beta_0$  les conditions initiales du champ de liaison, nous supposons que le processus est quasistatique et ainsi nous négligeons le terme d'inertie dans les équations du mouvement.

La formulation classique du problème mécanique de contact bilatéral sans frottement avec adhésion entre deux corps viscoélastiques correspondant est la suivante .

## Problème P

Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2)$  tel que  $\mathbf{u}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , et le champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2)$  tel que  $\boldsymbol{\sigma}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$  le champ d'endommagement  $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2)$  tel que  $\alpha^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  et le champ d'adhésion  $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow [0, 1]$  tels que

$$\boldsymbol{\sigma}(t)^\ell = \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell) + \mathcal{G}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell, \alpha^\ell) \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (2.1.5)$$

$$\dot{\alpha}^\ell - k^\ell \Delta \alpha^\ell + \partial \varphi_{K^\ell}(\alpha^\ell) \ni S^\ell(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \alpha^\ell), \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T) \quad (2.1.6)$$

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma}^\ell + \mathbf{f}_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.1.7)$$

$$\mathbf{u}^\ell = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times (0, T), \quad (2.1.8)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell = \mathbf{f}_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times (0, T), \quad (2.1.9)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\nu^1 = \boldsymbol{\sigma}_\nu^2, \mathbf{u}_\nu^1 + \mathbf{u}_\nu^2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3^\ell \times (0, T), \quad (2.1.10)$$

$$-\boldsymbol{\sigma}_\tau^1 = \boldsymbol{\sigma}_\tau^2 = p_\tau(\beta, u_\tau^1 - u_\tau^2) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.1.11)$$

$$\dot{\beta} = H_{ad}(\beta, R(|u_\tau^1 - u_\tau^2|)) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.1.12)$$

$$\frac{\partial \alpha^\ell}{\partial \nu^\ell} = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\ell \times (0, T), \quad (2.1.13)$$

$$\mathbf{u}^\ell(0) = \mathbf{u}_0^\ell, \alpha^\ell(0) = \alpha_0^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell, \quad (2.1.14)$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (2.1.15)$$

L'équation (2.1.5) représente la loi de comportement viscoélastique non linéaire avec l'endommagement. L'évolution du champ d'endommagement est modélisée par l'inclusion du type parabolique donnée par la relation (2.1.6) où  $S^\ell$  est la fonction source d'endommagement, supposé être une fonction générale radher des souches et se nuire, et  $\partial \varphi_K$  est le sous-différentiel de la fonction indicatrice des fonctions d'endommagement admissibles fixé  $K$ . L'équation (2.1.7) représente l'équation d'équilibre du mouvement, (2.1.8)-(2.1.9) sont respectivement, des conditions aux limites de déplacement-traction. Les conditions (2.1.10)-(2.1.12) représentent les conditions de contact avec adhésion est endommagement sur la partie  $\Gamma_3$  de la frontière  $\Omega^\ell$ . L'équation (2.1.13) représente une condition aux limites de Neumann homogène où  $\frac{\partial \alpha^\ell}{\partial \nu^\ell}$  représente la dérivée normale de  $\alpha^\ell$ .

Dans (2.1.14) nous considérons les conditions initiales où  $\mathbf{u}_0^\ell$  est le déplacement initial,

et  $\alpha_0^\ell$  le endommagement initial.

Finalement, la relation, (2.1.15) est la condition initiale, dans laquelle  $\beta_0$  désigne l'adhésion initiale.

Pour l'étude du problème mécanique (2.1.5)-(2.1.15) on considère les hypothèses suivantes

Nous supposons que l'opérateur de viscosité  $\mathcal{A}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{A}^\ell} > 0 \text{ tel que} \\ \quad |\mathcal{A}^\ell(\mathbf{x}^\ell, \boldsymbol{\xi}_1) - \mathcal{A}^\ell(\mathbf{x}^\ell, \boldsymbol{\xi}_2)| \leq L_{\mathcal{A}^\ell} |\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2| \\ \quad \forall \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x}^\ell \in \Omega^\ell. \\ \text{(b) Il existe } m_{\mathcal{A}^\ell}^\ell > 0 \text{ tel que} \\ \quad (\mathcal{A}^\ell(\mathbf{x}^\ell, \boldsymbol{\xi}_1) - \mathcal{A}^\ell(\mathbf{x}^\ell, \boldsymbol{\xi}_2)) \cdot (\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2) \geq m_{\mathcal{A}^\ell}^\ell |\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2|^2 \\ \quad \forall \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ P.P. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{A}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega^\ell, \\ \quad \text{pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(d) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{A}^\ell(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \in \mathcal{H}^\ell. \end{array} \right. \quad (2.1.16)$$

L'opérateur d'élasticité  $\mathcal{G}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{G}^\ell} > 0 \text{ tel que} \\ \quad |\mathcal{G}^\ell(\mathbf{x}^\ell, \boldsymbol{\xi}_1, \alpha_1) - \mathcal{G}^\ell(\mathbf{x}^\ell, \boldsymbol{\xi}_2, \alpha_2)| \leq L_{\mathcal{G}^\ell} (|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2| + |\alpha_1 - \alpha_2|). \\ \quad \forall \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x}^\ell \in \Omega^\ell. \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x}^\ell \mapsto \mathcal{G}^\ell(\mathbf{x}^\ell, \boldsymbol{\xi}^\ell) \text{ est} \\ \quad \text{Lebesgue mesurable sur } \Omega^\ell. \\ \quad \text{pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d, \alpha \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x}^\ell \mapsto \mathcal{G}^\ell(\mathbf{x}, 0, 0) \in \mathcal{H}^\ell. \end{array} \right. \quad (2.1.17)$$

La fonction de la source d'endommagement  $S^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } M_{S^\ell} > 0 \text{ tel que} \\ \quad |S^\ell(\mathbf{x}^\ell, \boldsymbol{\xi}_1, \alpha_1^\ell) - S^\ell(\mathbf{x}^\ell, \boldsymbol{\xi}_2, \alpha_2^\ell)| \leq M_{S^\ell} (|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2| + |\alpha_1^\ell - \alpha_2^\ell|). \\ \quad \forall \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x}^\ell \in \Omega^\ell. \\ \text{(b) Pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d, \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{x}^\ell \mapsto S^\ell(\mathbf{x}^\ell, \boldsymbol{\xi}^\ell, \alpha) \text{ est} \\ \quad \text{Lebesgue mesurable sur } \Omega^\ell \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x}^\ell \mapsto S^\ell(\mathbf{x}, 0, 0) \in L^2(\Omega^\ell). \end{array} \right. \quad (2.1.18)$$

La fonction de contact tangentiel  $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_\nu > 0 \text{ tel que} \\ \quad |p_\nu(\mathbf{x}, r_1) - p_\nu(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_\nu |r_1 - r_2| \\ \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3 \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \mapsto p_\nu(\mathbf{x}, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \\ \quad r \in \mathbb{R}^d \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto p_\nu(\mathbf{x}, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0 \end{array} \right. \quad (2.1.19)$$



La fonction de contact tangentiel  $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_\tau > 0 \text{ tel que} \\ \quad |p_\tau(\mathbf{x}, \beta_1, r_1) - p_\tau(\mathbf{x}, \beta_2, r_2)| \leq L_\tau(|\beta_1 - \beta_2| + |r_1 - r_2|) \\ \quad \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}^d, \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \mapsto p_\tau(\mathbf{x}, \beta, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \\ \quad \forall \beta \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}^d. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto p_\tau(\mathbf{x}, 0, 0) \in L^\infty(\Gamma_3)^d. \\ \text{(d) } p_\tau(\mathbf{x}, \beta, r) \cdot \nu(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall r \in \mathbb{R}^d \text{ tel que } r \cdot \nu(\mathbf{x}) = 0, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (2.1.20)$$

La fonction d'adhésion  $H_{ad} : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{Had} > 0 \text{ tel que} \\ \quad |H_{ad}(\mathbf{x}, b_1, r_1) - H_{ad}(\mathbf{x}, b_2, r_2)| \leq L_{Had}(|b_1 - b_2| + |r_1 - r_2|) \\ \quad \forall b_1, b_2 \in [0, 1], \quad r_1, r_2 \in [0, L], \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \mapsto H_{ad}(\mathbf{x}, b, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \\ \quad \forall b, \quad r \in [0, L], \\ \text{(c) L'application } (b, r) \mapsto H_{ad}(\mathbf{x}, b, r) \text{ est continu sur} \\ \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, L], \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \\ \text{(d) } H_{ad}(\mathbf{x}, 0, r) = 0, \quad \forall r \in [0, L], \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \\ \text{(e) } H_{ad}(\mathbf{x}, b, r) \geq 0, \quad \forall b \leq 0, \quad r \in [0, L], \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3 \\ \text{et} \\ \quad H_{ad}(\mathbf{x}, b, r) \leq 0 \quad \forall b \geq 1, \quad r \in [0, L], \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (2.1.21)$$

On note que si  $\beta \in L^\infty(\Gamma_3)$ ,  $z \in L^\infty(\Gamma_3)$  et  $r : \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction mesurable, alors les conditions (2.1.17) impliquent que

$$x \rightarrow H_{ad}(x, \beta(x), z(x), Rr(x)) \in L^\infty(\Gamma_3).$$

Et on suppose que les forces volumiques et la traction surfacique ont la régularité

$$f_0^\ell \in C(0, T; H^\ell), \quad f_2^\ell \in C(0, T; L^2(\Gamma_2^\ell)^d), \quad (2.1.22)$$

Finalement, les conditions initiales suivantes

$$\mathbf{u}_0^\ell \in V^\ell, \quad (2.1.23)$$

$$\alpha_0^\ell \in K^\ell, \quad (2.1.24)$$

$$\beta_0 \in L^\infty(\Gamma_3) \text{ et } 0 \leq \beta_0 \leq 1 \text{ p.p. } \mathbf{x} \text{ sur } \Gamma_3. \quad (2.1.25)$$

Nous définissons la forme bilinéaire  $a : H^1(\Omega^\ell) \times H^1(\Omega^\ell) \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$a(\zeta, \varphi) = \sum_{\ell=1}^2 k^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \zeta^\ell \cdot \nabla \varphi^\ell dx. \quad (2.1.26)$$

La diffusion de la microfissure de coefficients est vérifie

$$k^\ell > 0. \quad (2.1.27)$$

Pour l'étude du problème  $P$ , on définit le sous-espace fermé  $\mathbb{V}$  de  $H_1$  par :

$$\mathbb{V} = \{\mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \in V^1 \times V^2 \mid v_\nu^1 + v_\nu^2 = 0 \text{ on } \Gamma_3\} \quad (2.1.28)$$

Nous définissons l'application  $\mathbf{f} = (\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2) : [0, T] \rightarrow V$  par l'égalité

$$(\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V = \sum_{\ell=1}^2 \left( (\mathbf{f}_0^\ell(t), \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} + \int_{\Gamma_2^\ell} \mathbf{f}_2^\ell(t) \cdot \mathbf{v}^\ell da \right) \quad (2.1.29)$$

$\forall \mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \in V$ , p.p. $t \in (0; T)$ . Nous notons que, en utilisant (2.1.22), nous obtenons la régularité suivante

$$\mathbf{f} \in C(0, T; V). \quad (2.1.30)$$

Soit  $j : L^\infty(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  la fonctionnelle

$$j(\beta, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} \mathbf{p}_\tau(\beta, \mathbf{u}_\tau^1 - \mathbf{u}_\tau^2) \cdot (\mathbf{v}_\tau^1 - \mathbf{v}_\tau^2) da. \quad (2.1.31)$$

Alors, la formulation variationnelle du problème mécanique de contact bilatéral sans frottement, avec adhésion est endomagement entre deux corps viscoélastiques est la suivante.

## 2.2 Formulation variationnelle

En utilisant la formule de Green

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{Div } \boldsymbol{\sigma}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell.$$

on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\ell) dx + \int_{\Omega^\ell} \text{Div } \boldsymbol{\sigma}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell dx &= \int_{\Gamma_1^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell d\Gamma^\ell \\ &+ \int_{\Gamma_2^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell d\Gamma^\ell + \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell d\Gamma^\ell \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

La formule de Green pour  $\ell = 1$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^1} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^1) dx + \int_{\Omega^1} \text{Div } \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \mathbf{v}^1 dx &= \int_{\Gamma_1^1} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot \mathbf{v}^1 d\Gamma^1 \\ &+ \int_{\Gamma_2^1} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot \mathbf{v}^1 d\Gamma^1 + \int_{\Gamma_3^1} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot \mathbf{v}^1 d\Gamma^1 \quad \forall \mathbf{v}^1 \in V^1 \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

La formule de Green pour  $\ell = 2$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^2} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^2) dx + \int_{\Omega^2} \text{Div } \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \mathbf{v}^2 dx &= \int_{\Gamma_1^2} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot \mathbf{v}^2 d\Gamma^2 \\ &+ \int_{\Gamma_2^2} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot \mathbf{v}^2 d\Gamma^2 + \int_{\Gamma_3^2} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot \mathbf{v}^2 d\Gamma^2 \quad \forall \mathbf{v}^2 \in V^2 \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

En combinant les relations précédentes et utilisant (2.1.3), (2.1.4), (2.1.5) on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\ell) dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \mathbf{f}_0^\ell(t) \cdot \mathbf{v}^\ell da &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} \mathbf{f}_2^\ell(t) \cdot \mathbf{v}^\ell da \\ &+ \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell da \quad \forall \mathbf{v} \in V \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

et, puisque

$$\boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot \mathbf{v}^1 = \boldsymbol{\sigma}_\tau^1 \cdot \mathbf{v}_\tau^1 + \sigma_\nu^1 v_\nu^1 = -p_\tau(\beta, u_\tau^1 - u_\tau^2) \mathbf{v}^1 + \sigma_\nu^1 v_\nu^1,$$

et

$$\boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot \mathbf{v}^2 = \boldsymbol{\sigma}_\tau^2 \cdot \mathbf{v}_\tau^2 + \sigma_\nu^2 v_\nu^2 = -p_\tau(\beta, u_\tau^2 - u_\tau^2) \mathbf{v}^2 - \sigma_\nu^1 v_\nu^2,$$

il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \sigma^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell da &= \int_{\Gamma_3} -p_\tau(\beta, u_\tau^1 - u_\tau^2) \mathbf{v}^1 + \sigma_\nu^1 v_\nu^1 \\
&+ \int_{\Gamma_3} -p_\tau(\beta, u_\tau^2 - u_\tau^1) \mathbf{v}^2 - \sigma_\nu^1 v_\nu^2 \\
&= - \int_{\Gamma_3} p_\tau(\beta, u_\tau^1 - u_\tau^1) (\mathbf{v}_\tau^1 - \mathbf{v}_\tau^2) da + \sigma_\nu^1 v_\nu^1 - \sigma_\nu^1 v_\nu^2
\end{aligned}$$

nous avons  $\sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2$  on trouve

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \sigma^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell da = - \int_{\Gamma_3} p_\tau(\beta, u_\tau^1 - u_\tau^1) (\mathbf{v}_\tau^1 - \mathbf{v}_\tau^2) da$$

Ainsi, la relation devient plus simplification

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) dx &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \mathbf{f}_0^\ell(t) \cdot \mathbf{v}^\ell da + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} \mathbf{f}_2^\ell(t) \cdot \mathbf{v}^\ell da \\
&- \int_{\Gamma_3} p_\tau(\beta, u_\tau^1 - u_\tau^1) (\mathbf{v}_\tau^1 - \mathbf{v}_\tau^2) da
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

D'après (2.1.24) et (2.1.26) obtenons

$$\sum_{\ell=1}^2 (\sigma^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + j(\beta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = \sum_{\ell=1}^2 (\mathbf{f}^\ell(t), \mathbf{v}^\ell)_{V^\ell} \tag{2.2.6}$$

$$\forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell, \quad \text{p.p. } t \in (0, T).$$

Enfin, soit  $\alpha^\ell(t) \in K^\ell$  et pour tout  $t \in [0, T]$ , de la définition (A.4.2) de  $\partial\varphi_{K^\ell}(\alpha^\ell)$  et (2.1.6), on obtient

$$\begin{aligned}
(\dot{\alpha}^\ell(t), \xi^\ell - \alpha^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} - k^\ell(\Delta\alpha^\ell(t), \xi^\ell - \alpha^\ell(t)) \\
\geq (S(\varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \alpha^\ell(t)), \xi^\ell - \alpha^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \xi^\ell \in K^\ell
\end{aligned}$$

Pour  $\ell = 1$

$$\begin{aligned}
(\dot{\alpha}^1(t), \xi^1 - \alpha^1(t))_{L^2(\Omega^1)} - k^1(\Delta\alpha^1(t), \xi^1 - \alpha^1(t)) \\
\geq (S(\varepsilon(\mathbf{u}^1(t)), \alpha^1(t)), \xi^1 - \alpha^1(t))_{L^2(\Omega^1)}, \quad \xi^1 \in K^1
\end{aligned}$$

Pour  $\ell = 2$

$$\begin{aligned}
(\dot{\alpha}^2(t), \xi^2 - \alpha^2(t))_{L^2(\Omega^2)} - k^2(\Delta\alpha^2(t), \xi^2 - \alpha^2(t)) \\
\geq (S(\varepsilon(\mathbf{u}^2(t)), \alpha^2(t)), \xi^2 - \alpha^2(t))_{L^2(\Omega^2)}, \quad \xi^2 \in K^2
\end{aligned}$$

En combinant les relations précédentes on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\alpha}^\ell(t), \xi^\ell - \alpha^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} - \sum_{\ell=1}^2 k^\ell (\Delta \alpha^\ell(t), \xi^\ell - \alpha^\ell(t)) \\ \geq \sum_{\ell=1}^2 (S^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \alpha^\ell(t)), \xi^\ell - \alpha^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \xi^\ell \in K^\ell \end{aligned}$$

En appliquant l'intégrale par partie de la formule de Green avec (2.1.13) et (2.1.26), on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\alpha}^\ell(t), \xi^\ell - \alpha^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\alpha(t), \xi - \alpha(t)) \\ \geq \sum_{\ell=1}^2 (S^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \alpha^\ell(t)), \xi^\ell - \alpha^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \xi^\ell \in K^\ell \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

De (2.1.5), (2.1.12), (2.1.14)-(2.1.15) (2.2.6) et (2.2.7), on obtient la formulation variationnelle du problème **P**.

### Problème *PV*

Trouver le champ de déplacement  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) : [0, T] \rightarrow \mathbb{V}$ , à le champ de contrainte  $\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2) : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ , le champ endommagement  $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2) : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$  et le champ d'adhésion  $\beta : [0, T] \rightarrow L^\infty(\Gamma_3)$  tels que

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell(t) = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) + \mathcal{G}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t), \alpha^\ell) \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (2.2.8)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V, \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (2.2.9)$$

p.p.  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} \alpha(t) \in K, \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\alpha}^\ell(t), \xi^\ell - \alpha^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\alpha(t), \xi - \alpha(t)) \\ \geq \sum_{\ell=1}^2 (S^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \alpha^\ell(t)), \xi^\ell - \alpha^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \xi \in K \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

p.p.  $t \in [0, T]$ ,

$$\dot{\beta}(t) = H_{ad}(\beta(t), R(|\mathbf{u}_r^1(t) - \mathbf{u}_r^2(t)|)), \quad 0 \leq \beta(t) \leq 1 \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \quad (2.2.11)$$

$$\mathbf{u}(0) = (\mathbf{u}^1(0), \mathbf{u}^2(0)) = \mathbf{u}_0(\mathbf{u}_0^1, \mathbf{u}_0^2), \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \beta(0) = \beta_0. \quad (2.2.12)$$

Nous remarquons que le problème variationnel  $PV$  est formulée en termes de déplacement, champ de contrainte, terrain de endommages et champ d'adhérence. L'existence d'une solution unique de problème  $PV$  est déclaré et prouvé dans la section suivante.

Notre résultat principal concernant le bien posé du problème  $PV$  est la suivante.

**Théorème 2.2.1** *Supposons que (2.1.16)-(2.1.21) détiennent. Alors il existe une solution unique  $\{\mathbf{u}, \sigma, \alpha, \beta\}$  qui satisfait*

$$\mathbf{u} \in C^1(0, T; V), \quad (2.2.13)$$

$$\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H}), \quad \text{Div } \sigma \in L^2(0, T; H), \quad (2.2.14)$$

$$\alpha \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (2.2.15)$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Gamma_3)). \quad (2.2.16)$$

Un quadruplet  $\{\mathbf{u}, \sigma, \alpha, \beta\}$  qui satisfait (2.2.2)- (2.2.5) est appelé solution faible pour le problème  $P$ . Nous concluons que, dans les hypothèses énoncées, le problème (2.1.5)-(2.1.15) a une satisfaying unique solution (2.2.13)-(2.2.16). La preuve du théorème 2.2.1 sera réalisée en plusieurs étapes et est basé sur les équations d'évolution de la théorie avec des opérateurs monotones, un argument de point fixe et une existence classique et résultat d'unicité pour les inégalités paraboliques cette fin, nous supposons dans la suite que (2.1.12)-(2.1.22) tenir. Ci-dessous,  $C$  désigne une constante positive générique qui peut dépendre de  $\Omega^\ell, \Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell, \Gamma_3^\ell, \mathcal{A}^\ell, \mathcal{G}^\ell, p_\tau, L$  et  $T$ , mais ne dépend pas de  $t$  et sur le reste des données d'entrée, et dont la valeur peut changer d'un endroit à l'autre. En outre, pour des raisons de simplicité, nous suppress, dans ce qui suit, la dépendance explicite des différentes fonctions sur  $\mathbf{x}^\ell \in \Omega^\ell \cup \Gamma^\ell$ .

La démonstration du théorème 2.2.1 sera fournie dans la section suivante.

## 2.3 Existence et unicité de la solution

**Lemme 2.3.1** *Pour tout  $u \in C(0, T; V)$ , il existe une unique solution*

$$\beta_u \in W^{1, \infty}(0, T; L^\infty(\Gamma_3))$$

*satisfait*

$$\dot{\beta}_u(t) = H_{ad}(\beta_u(t), R(|\mathbf{u}_\tau^1(t) - \mathbf{u}_\tau^2(t)|)), \quad p.p. \ t \in (0, T), \quad (2.3.1)$$

$$\beta_u(0) = \beta_0. \quad (2.3.2)$$

*ainsi,*

$$0 \leq \beta_u(t) \leq 1 \quad \forall t \in [0, T] \text{ pour tout } , p.p. \text{ sur } \Gamma_3, \quad (2.3.3)$$

*et il existe une constante  $C > 0$ , tel que, pour tout  $\mathbf{u}_i = (u^{1,i}, u^{2,i}) \in C(0, T; V)$ ,*

$$\|\beta_{\mathbf{u}_1}(t) - \beta_{\mathbf{u}_2}(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq C \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V^2 ds,$$

**Preuve.** Nous considérons l'application  $H : [0, T] \times L^\infty(\Gamma_3) \longrightarrow L^\infty(\Gamma_3)$  défini par

$$H(t, \beta) = H_{ad}(\beta, R(|\mathbf{u}_\tau^1(t) - \mathbf{u}_\tau^2(t)|)), \quad p.p. \ t \in (0, T), \quad \forall \beta \in L^\infty(\Gamma_3).$$

Il est facile de vérifier que  $H$  est Lipschitz continue par rapport à la seconde variable uniformément dans le temps, en outre, pour tout  $t \in [0, T]$  et  $\beta \in L^\infty(\Gamma_3)$ .

L'application  $t \longrightarrow H(t, \beta)$  appartient à  $L^\infty(0, T, L^\infty(\Gamma_3))$ . Ainsi, l'existence d'une fonction de  $\beta_{\mathbf{u}}$  unique es satisfait (2.3.1) - (2.3.2), suit à partir d'une version du théorème de Cauchy Lipschitz.

Enfin, la preuve de (2.3.3) est une conséquence des hypothèses (2.1.21) et (2.1.25), voir [16] pour les détails.

Maintenant soit  $\mathbf{u}_1 = (u_1^1, u_1^2)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (u_2^1, u_2^2)$ ,  $\mathbf{u}_1 \in C(0, T, V)$ ,  $\mathbf{u}_2 \in C(0, T, V)$  et soit  $t \in [0, T]$ . Nous avons, pour  $i = 1, 2$

$$\beta_{\mathbf{u}_i}(t) = \beta_0 + \int_0^t H_{ad}((\beta_{\mathbf{u}_i}(s), R(|\mathbf{u}_\tau^{1i}(s) - \mathbf{u}_\tau^{2i}(s)|))) ds, \quad i = 1, 2$$

on lorsque  $\mathbf{u}_i = (u^{1i}, u^{2i})$  et  $\beta_{\mathbf{u}_i} = \beta_i$  utiliser maintenant 2.1.21 et 1.1.19. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\| &\leq C \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\| ds \\ &\quad + \int_0^t (|\mathbf{u}_\tau^{11}(s) - \mathbf{u}_\tau^{21}(s) - (\mathbf{u}_\tau^{12}(s) - \mathbf{u}_\tau^{22}(s))| ds) \end{aligned}$$

Ensuite, nous appliquons l'inégalité de Gronwall de déduire

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)| \leq C \left( \int_0^t (|\mathbf{u}_\tau^{11}(s) - \mathbf{u}_\tau^{21}(s) - (\mathbf{u}_\tau^{12}(s) - \mathbf{u}_\tau^{22}(s))| ds) \right)$$

ce qui implique

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)|^2 \leq C \int_0^t (|\mathbf{u}^{11}(s) - \mathbf{u}^{12}(s)|^2 + |\mathbf{u}^{21}(s) - \mathbf{u}^{22}(s)|^2 ds)$$

L'intégration de la dernière inégalité plus  $\Gamma_3$  et en gardant à l'esprit (B.1.12) nous trouvons

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq C \int_0^t (\|\mathbf{u}^{11}(s) - \mathbf{u}^{12}(s)\|_V^2 + \|\mathbf{u}^{12}(s) - \mathbf{u}^{22}(s)\|_V^2) ds$$

Tenant compte de (B.1.13) nous déduisons

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq C \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V^2 ds$$

■

## Problème QV

Trouver le champ de déplacement  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) : [0, T] \rightarrow \mathbf{V}$ , le champ de endamageement  $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2) : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$  et le champ de contraintes  $\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2) : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ , satisfaisant (2.2.8), (2.2.11) et

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell(t) = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) + \mathcal{G}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t), \alpha^\ell) \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (2.3.4)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}^\ell} + j(\beta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) &= (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V, \\ \forall \mathbf{v} \in V, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0. \quad (2.3.6)$$

Soit  $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\eta}^1, \boldsymbol{\eta}^2) \in C(0, T; H)$ , et considérer le problème variationnel suivant.



### Problème $QV_\eta$

Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u}_\eta = (\mathbf{u}_\eta^1, \mathbf{u}_\eta^2) : [0, T] \rightarrow \mathbb{V}$ , et le champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}_\eta = (\boldsymbol{\sigma}_\eta^1, \boldsymbol{\sigma}_\eta^2) : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$  telle que

$$\boldsymbol{\sigma}_{\eta^\ell}^\ell(t) = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_{\eta^\ell}^\ell(t)) + \eta^\ell(t), \quad (2.3.7)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{v})^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} + j(\beta_{u_\eta}(t), \mathbf{u}_\eta(t), \mathbf{v}) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V, \quad (2.3.8)$$

$$\forall \mathbf{v} \in V, \quad t \in [0, T],$$

$$\mathbf{u}_\eta(0) = \mathbf{u}_0 \quad (2.3.9)$$

Pour résoudre le problème  $QV_\eta$  nous considérons  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}^1, \boldsymbol{\theta}^2) \in C(0, T; V)$  et nous construisons le problème intrmédiaire suivant.

### Problem $QV_{\eta\theta}$

Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u}_{\eta\theta} = (\mathbf{u}_{\eta\theta}^1, \mathbf{u}_{\eta\theta}^2) : [0, T] \rightarrow \mathbb{V}$ , et le champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}_{\eta\theta} = (\boldsymbol{\sigma}_{\eta\theta}^1, \boldsymbol{\sigma}_{\eta\theta}^2) : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$  tel que

$$\boldsymbol{\sigma}_{\eta\theta}^\ell(t) = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_{\eta\theta}^\ell(t)) + \eta^\ell(t), \quad (2.3.10)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}_{\eta\theta}^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{v})^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} + (\boldsymbol{\theta}(t), \mathbf{v})_V = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V, \quad (2.3.11)$$

$$\forall \mathbf{v} \in V, \quad t \in [0, T],$$

$$\mathbf{u}_{\eta\theta}(0) = \mathbf{u}_0 \quad (2.3.12)$$

**Lemme 2.3.2** *Il existe une unique solution  $\mathbf{u}_{\eta\theta}, \boldsymbol{\sigma}_{\eta\theta}$  de problème  $PQ_{\eta\theta}$  qui satisfait (2.2.13)-(2.2.14).*

**Preuve.** Par le théorème de représentation de riesz nous pouvons définir l'opérateur  $A : V \rightarrow V$  par

$$(Au, v)_V = (\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \quad (2.3.13)$$

$$(\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} = \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell}, \quad \forall \mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell \in V^\ell \quad (2.3.14)$$

En utilisant (B.1.1),(B.1.11) et( 2.1.16) on montre que  $A$ est fortement monotone et de Lipschitz.

En effet  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \omega \in V$

$$\begin{aligned}
\|(A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \omega)_V\| &= \|(\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{u}) - \mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{v}), \omega)_{\mathcal{H}}\| \\
&= \left\| \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{v}^\ell), \omega^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} \right\| \\
&\leq \sum_{\ell=1}^2 \|(\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{v}^\ell), \omega^\ell)_{\mathcal{H}^\ell}\| \\
&\leq \sum_{\ell=1}^2 \|\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{v}^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} \|\varepsilon(\omega^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} \\
&\leq \sum_{\ell=1}^2 L_{A^\ell} \|\mathbf{u}^\ell - \mathbf{v}^\ell\|_{V^\ell} \|\omega^\ell\|_{V^\ell} \\
&\leq L_A \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V \|\omega\|_V \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \omega \in V.
\end{aligned}$$

d'où  $A$  est lipschitzienne avec  $L_A = \mathbf{max}(L_{A^1} + L_{A^2})$

De même pour tout  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  on a

$$\begin{aligned}
(A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_V &= (\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{u}) - \mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{v}), \varepsilon(\mathbf{u}) - \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \\
&= \left\| \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{v}^\ell), \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \right\| \\
&\geq \sum_{\ell=1}^2 m_\ell \|\varepsilon(\mathbf{u}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{v}^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell}
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Korn, il vient

$$\begin{aligned}
(A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_V &\geq \sum_{\ell=1}^2 m_\ell \|\mathbf{u}^\ell - \mathbf{v}^\ell\|_{V^\ell} \\
&\geq m \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V
\end{aligned}$$

d'où est  $A$  est fortement monotone avec  $m = \mathbf{min}(m_1, m_2)$

Utilisation (2.1.16), il se ensuit que  $A$  est un opérateur Lipschitz fortement monotone, donc  $A$  est inversible et  $A^{-1} : V \rightarrow V$  est également un opérateur Lipschitz fortement monotone.

Il suit qu'il existe une fonction unique  $v_{\eta\theta}$  qui satisfait

$$v_{\eta\theta} \in C(0, T, V), \quad (2.3.15)$$

$$Av_{\eta\theta}(t) = h_{\eta\theta}(t), \quad (2.3.16)$$

avec  $h_{\eta\theta} \in C(0, T, V)$  est tels que

$$(h_{\eta\theta}(t), v)_V = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V - (\eta(t), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}}, (\theta(t), \mathbf{v})_V, \forall \mathbf{v} \in V. \quad (2.3.17)$$

Soit  $\mathbf{u}_{\eta\theta} : [0, T] \rightarrow V$  est un fonction defini par il

$$\mathbf{u}_{\eta\theta} = \int_0^t \mathbf{v}_{\eta\theta} ds + \mathbf{u}_0, \forall \in [0, T] \quad (2.3.18)$$

Il resulte de (2.3.18) ,(2.3.15) et (2.3.19) que  $\mathbf{u}_{\eta\theta} \in C(0, T, V)$  considérez  $\boldsymbol{\sigma}_{\eta\theta}$  définie en (2.3.8) ,depuis  $\eta \in C(0, T, V)$ ,  $\mathbf{u}_{\eta\theta} \in C^1(0, T, V)$  et apartir de la relation (2.1.16), en déduit que  $\boldsymbol{\sigma}_{\eta\theta} \in C(0, T, H)$ ,depuis  $\text{Div } \boldsymbol{\sigma}_{\eta\theta} = -\mathbf{f}_0 \in C(0, T, H)$ , nous avoir de plus amples  $\boldsymbol{\sigma}_{\eta\theta} \in C(0, T, \mathcal{H}_\infty)$ , ce ci conclut la partie de l'existence du lemme 2.3.3 ■

Nous considérons maintenant l'opérateur  $\Lambda : L^\infty(0, T; V) \rightarrow L^\infty(0, T; V)$ , donnée par

$$(\Lambda\theta(t), \mathbf{v})_V = j(\beta_{\mathbf{u}_{\eta\theta}}(t), \mathbf{u}_{\eta\theta}(t), \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad t \in [0, T], \quad (2.3.19)$$

Nous avons le résultat suivant.

**Lemme 2.3.3** *Pour chaque  $\theta \in L^\infty(0, T; V)$  la fonction  $\Lambda\theta : [0, T] \rightarrow V$  appartient a  $L^\infty(0, T; V)$ . En outre, il existe un élément unique  $\theta^* \in L^\infty(0, T; V)$  pour chaque  $\Lambda\theta^* = \theta^*$ .*

**Preuve.** Soit  $\boldsymbol{\theta}_i = (\boldsymbol{\theta}_i^1, \boldsymbol{\theta}_i^2) \in C(0, T, V)$ , nous utilison la notation  $\mathbf{u}_{\eta\theta}^i = \mathbf{u}^i = (\mathbf{u}^{1i}, \mathbf{u}^{2i})$ ,et  $\beta_{\mathbf{u}^i} = \beta_i$  pour tout  $i=1,2$ .

Les égalités et inégalités ci-dessous sont valables pour tout  $v \in V$  p.p,  $t \in (0, T)$ .

Utilisation (2.3.19), (2.1.30) et les propriétés de la fonction  $p_\tau$ , on obttient

$$\begin{aligned} \|\Lambda\theta_1(t) - \Lambda\theta_2(t), v)_V\| &\leq C(\|\mathbf{u}^{11}(t) - \mathbf{u}^{12}(t)\|_{L^2(\Gamma_3)^d} + \|\mathbf{u}^{21}(t) - \mathbf{u}^{22}(t)\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \\ &\quad + \|(\beta_1(t) - \beta_2(t))\|_{L^2(\Gamma_3)})(\|v^1\|_{L^2(\Gamma_3)^d} + \|v^2\|_{L^2(\Gamma_3)^d}) \end{aligned}$$

En outre, en gardant à l'esprit B.1.12 etB.1.13 nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \|(\Lambda\theta_1(t) - \Lambda\theta_2(t), v)_V\| &\leq C(\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\quad + \|\mathbf{u}^{11}(t) - \mathbf{u}^{12}(t)\|_{V^1} + \|\mathbf{u}^{21}(t) - \mathbf{u}^{22}(t)\|_{V^2})(\|v^1\|_{V^1} + \|v^2\|_{V^2}) \end{aligned}$$

et former cette inégalité nous trouvons

$$\|(\mathbf{\Lambda}\theta_1(t) - \mathbf{\Lambda}\theta_2(t))\|_V \leq C\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V. \quad (2.3.20)$$

alors par le lemme 2.3.2, nous avons

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{\Lambda}\theta_1(t) - \mathbf{\Lambda}\theta_2(t))\|_V^2 &\leq C(\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V^2 + \int_0^1 \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V^2 ds) \\ \|(\mathbf{\Lambda}\theta_1(t) - \mathbf{\Lambda}\theta_2(t))\|_V^2 &\leq C \int_0^1 \|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_V^2 ds. \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

En outre, à partir de (2.3.8) il se ensuit que

$$(\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{v}_1) - \mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{v}_2), \varepsilon(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2))_{\mathcal{H}} + (\theta_1 - \theta_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_V = 0 \quad \text{sur } (0, T) \quad (2.3.22)$$

ainsi

$$\|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_V \leq C\|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_V, \quad \forall s \in [0, T] \quad (2.3.23)$$

Maintenant des inégalités (2.3.20) et (2.3.23), nous avons

$$\|(\mathbf{\Lambda}\theta_1(t) - \mathbf{\Lambda}\theta_2(t))\|_V^2 \leq C \int_0^1 \|(\theta_1(s) - \theta_2(s))\|_V^2, \quad \forall s \in [0, T]$$

Réitérant cette inégalité  $n$  fois rendements

$$\|(\mathbf{\Lambda}^n\theta_1(t) - \mathbf{\Lambda}^n\theta_2(t))\|_{C(0,T;V)}^2 \leq \frac{(CT)^n}{n!} \|\theta_1 - \theta_2\|_{C(0,T;V)}^2.$$

Nous concluons que, pour un nombre suffisamment grand  $n$ , l'application  $\mathbf{\Lambda}^n$  de  $\mathbf{\Lambda}$  est une contraction dans l'espace de Banach  $C(0, T; V)$ . Par conséquent, il existe un unique  $\theta^* \in C(0, T; V)$  telle que  $\mathbf{\Lambda}^n\theta^* = \theta^*$  est,  $\theta^*$  est un point fixe de  $\mathbf{\Lambda}$ . ■

**Lemme 2.3.4** *Il existe une unique solution de problème  $\mathcal{QV}_\eta$  satisfying  $\mathbf{u}_\eta \in C^1(0, T; V)$  et  $\sigma_\eta \in C(0, T; \mathcal{H}_1)$ . Nous utilisons la notation  $\mathbf{u}^i = (\mathbf{u}^{1i}, \mathbf{u}^{2i})$ , et  $\beta_{\mathbf{u}^i} = \beta_i$  pour tout  $i = 1, 2$ .*

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{\Lambda}\theta^1(t) - \mathbf{\Lambda}\theta^2(t), v)\| &\leq C(\|u^{11}(t) - u^{12}(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|u^{21}(t) - u^{22}(t)\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \\ &\quad + \|\beta_1\|_{L^2(\Gamma_3)})(\|v^1\|_{L^2(\Gamma_3)} + (\|v^2\|_{L^2(\Gamma_3)^d})^d) \end{aligned}$$

**Preuve.** Soit  $\theta^* \in C(0, T; V)$  est une point fixe de  $\Lambda$ , lemme (2.3.6) implique que  $(\mathbf{u}_{\eta\theta^*}, \boldsymbol{\sigma}_{\eta\theta^*}) \in C(0, T; V) \times C(0, T, H_1)$  est un unique solution de problème  $\mathcal{QV}_{\eta\theta}$  pour  $\theta = \theta^*$  since  $\Lambda\theta^* = \theta^*$  et on les relations (2.3.19), (2.3.7), (2.3.8) est (2.3.9), est obtenie  $(\mathbf{u}_\eta, \boldsymbol{\sigma}_\eta) = (\mathbf{u}_{\eta\theta^*}, \boldsymbol{\sigma}_{\eta\theta^*})$  est un unique solution de  $\mathcal{QV}_\eta$ . L'unicité de solution est une conséquence de l'unicité de point fixe de l'opérateur  $\Lambda$  given en (2.3.19). ■

Soit  $\omega \in C(0, T; L^2(\Omega))$ . Nous supposons que les hypothèses du théorème 2.2.1 détenir et nous considérons le problème intermédiaire suivant pour le champ de endommagement

### Problème $\mathbf{PV}_\omega$

Trouver le champ de endommagement  $\alpha_\omega = (\alpha_\omega^1, \alpha_\omega^2) : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$  telle que  $\alpha_\omega(t) \in K$ , pour tout  $t \in [0, T]$  et

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\alpha}_\omega^\ell(t), \xi^\ell - \alpha_\omega^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\alpha_\omega(t), \xi - \alpha_\omega(t)) \\ \geq \sum_{\ell=1}^2 (\omega^\ell(t), \xi^\ell - \alpha_\omega^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} \quad \forall \xi \in K, \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

p.p.  $t \in (0, T)$ ,

$$\alpha_\omega(0) = \alpha_0, \quad (2.3.25)$$

Où  $K = K_1 \times K_2$ ,

$$(\dot{\alpha}_\omega(t), \xi - \alpha_\omega)_{L^2(\Omega)} = \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\alpha}_\omega^\ell(t), \xi^\ell - \alpha_\omega^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}$$

et

$$(\omega(t), \xi - \alpha_\omega(t))_{L^2(\Omega)} = \sum_{\ell=1}^2 (\omega^\ell(t), \xi^\ell - \alpha_\omega^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)}$$

Pour résoudre  $\mathbf{PV}_\omega$  nous rappelons le résultat standard suivant les inégalités variationnelles paraboliques (voir par exemple [18] p. 124]) et note  $E_0 = L^2(\Omega^1) \times L^2(\Omega^2)$  et  $E_1 = H^1(\Omega^1) \times H^1(\Omega^2)$ .

**Lemme 2.3.5** *Problème  $\mathbf{PV}_\omega$  possède une solution unique  $\alpha_\omega(t)$  telle que*

$$\alpha_\omega \in W^{1,2}(0, T; E_0) \cap L^2(0, T; E_1) \quad (2.3.26)$$

**Preuve.** L'application d'inclusion de  $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$  dans  $(E_0, \|\cdot\|_{E_0})$  est continue et à image dense. Notant par  $(E_1)'$  l'espace dual de  $E_1$  et identifiant le dual de  $E_0$  avec lui-même, nous pouvons écrire le triplet de Gelfand

$$E_1 \subset E_0 = (E_0)' \subset (E_1)', \quad \forall \alpha \in E_0 \quad \zeta \in E_1.$$

Nous utilisons la notation  $(\cdot, \cdot)_{(E_1)' \times (E_1)'}$  pour désigner le produit de dualité entre  $(E_1)'$  et  $(E_1)'$ , nous avons

$$(\alpha, \zeta)_{(E_1)' \times (E_1)'} = (\alpha, \zeta)_{E_0}$$

On sait que l'ensemble des endommagements admissibles  $K$  est un sous-ensemble non vide, fermé et convexe dans  $E_1$ . Ainsi, le champ d'endommagement initial  $\alpha_0 \in K$ .

Maintenant, en utilisant la définition (3.1.32) de la forme bilinéaire  $a$ , pour tout  $\alpha, \zeta \in E_1$ , on a

$$a(\varphi, \xi) = a(\xi, \varphi),$$

et

$$\begin{aligned} a(\varphi, \xi) &\leq 3k \|\nabla \varphi\|_H \|\nabla \xi\|_H, \\ &\leq c \|\varphi\|_{E_1} \|\xi\|_{E_1}, \end{aligned}$$

donc,  $a$  est continue et symétrique. Ainsi, pour tout  $\varphi \in E_1$ , nous avons

$$a(\varphi, \xi) \leq k \|\nabla \varphi\|_H^2,$$

alors

$$a(\varphi, \varphi) = (k+1) \|\varphi\|_{E_0}^2 \geq k \left( \|\nabla \varphi\|_H^2 + \|\varphi\|_{E_0}^2 \right)$$

et d'où

$$a(\varphi, \varphi) = c_0 \|\varphi\|_{E_0}^2 \geq c_1 \|\varphi\|_{E_1}^2, \quad \text{avec } c_0 = k+1 \text{ et } c_1 = k.$$

Nous remarquons que toutes les conditions du théorème 1.5.19 sont vérifiées. Ce qui conclut la preuve du lemme 2.3.5. ■

En conséquence des problèmes  $\mathbf{QV}_\eta$  et  $\mathbf{PV}_\omega$  nous pouvons définir l'opérateur  $\mathcal{L} : C(0, T, V \times L^2(\Omega)) \rightarrow C(0, T; V \times L^2(\Omega))$  par

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}, \omega)(t) = \left( \mathcal{L}^1(\boldsymbol{\eta}, \omega)(t), \mathcal{L}^2(\boldsymbol{\eta}, \omega)(t) \right) \in V \times L^2(\Omega), \quad (2.3.27)$$

avec

$$(\mathcal{L}^1(\boldsymbol{\eta}, \omega)(t), \mathbf{v}) = \sum_{\ell=1}^2 \left( \mathcal{G}^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}_\eta^\ell), \alpha_\omega^\ell), v \right)_{\mathcal{H}^\ell}, \quad (2.3.28)$$

$$\mathcal{L}^2(\boldsymbol{\eta}, \omega)(t) = (S^1(\varepsilon(\mathbf{u}_\eta^1(t)), \alpha_\omega^1(t)), S^2(\varepsilon(\mathbf{u}_\eta^2(t)), \alpha_\omega^2(t))). \quad (2.3.29)$$

Pour tout  $(\boldsymbol{\eta}, \omega) \in C(0, T; V \times L^2(\Omega))$ . Alors nous devons

**Lemme 2.3.6** *Il existe un élément unique  $(\boldsymbol{\eta}^*, \omega^*) \in C(0, T; V \times L^2(\Omega))$  tel que*

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}, \omega) = (\boldsymbol{\eta}^*, \omega^*)$$

**Preuve.** Soit  $(\boldsymbol{\eta}_1, \omega_1), (\boldsymbol{\eta}_2, \omega_2) \in C(0, T, V \times E_0)$ . Soit  $t \in [0, T]$  et utiliser la notation  $\mathbf{u}_{\eta_i} = \mathbf{u}_i, \dot{\mathbf{u}}_{\eta_i} = \mathbf{v}_{\eta_i} = \mathbf{v}_i$  et  $\alpha_{\omega_i} = \alpha_i$  pour  $i = 1, 2..$  Compte tenu de la relations (2.1.17), (2.1.18) et (2.3.26), on en déduit que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}^1(\boldsymbol{\eta}_1, \omega_1)(t) - \mathcal{L}^1(\boldsymbol{\eta}_2, \omega_2)(t)\|_V &= \sum_{\ell=1}^2 \|\mathcal{G}^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell(t)), \alpha_1^\ell(t)) - \mathcal{G}^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell(t)), \alpha_2^\ell(t))\|_{\mathcal{H}^\ell}, \\ &\leq \sum_{\ell=1}^2 \left( \|\varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell(t)) - \varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell(t))\|_{\mathcal{H}^\ell} + \|\alpha_1^\ell(t) - \alpha_2^\ell(t)\|_{\mathcal{H}^\ell} \right), \\ &\leq \sum_{\ell=1}^2 \left( \|\mathbf{u}_1^\ell(t) - \mathbf{u}_2^\ell(t)\|_{V^\ell} + \|\alpha_1^\ell(t) - \alpha_2^\ell(t)\|_{\mathcal{H}^\ell} \right), \\ &\leq (\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V + \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{E_0}) \end{aligned} \quad (2.3.30)$$

Maintenant, de (2.3.29) et (2.1.18), on obtient

$$\|\mathcal{L}^2(\boldsymbol{\eta}_1, \omega_1)(t) - \mathcal{L}^2(\boldsymbol{\eta}_2, \omega_2)(t)\|_{E_0} \leq (\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V + \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{E_0}). \quad (2.3.31)$$

Alors, depuis (2.3.30) et (2.3.31), on a

$$\|\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}_1, \omega_1) - \mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}_2, \omega_2)\|_{V \times L^2(\Omega)} \leq (\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V + \|\alpha_1 - \alpha_2\|_{L^2(\Omega)}) \quad (2.3.32)$$

En outre, en utilisant (2.1.8), nous obtenons

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{v}_1) - \mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{v}_2), \varepsilon(\mathbf{v}_1) - \varepsilon(\mathbf{v}_2))_{\mathcal{H}} &= j(\beta_{\mathbf{u}_2}, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \\ &- j(\beta_{\mathbf{u}_1}, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + (\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_4, \varepsilon(\mathbf{v}_1) - \varepsilon(\mathbf{v}_2))_{\mathcal{H}} \text{ p.p. } t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

Compte tenu (2.1.16) et (2.1.20), nous trouvons

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)\|_V^2 &\leq C \left( \|\beta_{\mathbf{u}_1}(t) - \beta_{\mathbf{u}_2}(t)\|_{L^2(\Gamma^3)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V^2 + \|\boldsymbol{\eta}_1(t) - \boldsymbol{\eta}_2(t)\|_V^2 \right). \end{aligned} \quad (2.3.34)$$

on utiliser lemme 2.3.2 on a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)\|_V^2 &\leq C(\|\boldsymbol{\eta}_1(t) - \boldsymbol{\eta}_2(t)\|_V^2 + \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V^2 ds) \\ &\leq C(\|\boldsymbol{\eta}_1(t) - \boldsymbol{\eta}_2(t)\|_V^2 + \int_0^t \|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_V^2 ds) \end{aligned} \quad (2.3.35)$$

Application Grönwall d'inégalité yields

$$\|\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)\|_V^2 \leq C(\|\boldsymbol{\eta}_1(t) - \boldsymbol{\eta}_2(t)\|_{\mathcal{H}}^2) \quad (2.3.36)$$

depuis  $\mathbf{u}_1(0) = \mathbf{u}_2(0)$  on a

$$\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V \leq C \int_0^t \|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_V ds$$

De les deux inégalités précédentes, nous trouvons

$$\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V \leq C \int_0^t \|\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)\|_V ds \quad (2.3.37)$$

De (2.3.24) on en déduit que

$$(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2, \alpha_1 - \alpha_2)_{L^2(\Omega)} + a(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) \leq (\omega_1 - \omega_2, \alpha_1 - \alpha_2)_{L^2(\Omega)}, \quad \text{p.p. } t \in [0, T]$$

Intégration de l'inégalité par rapport au temps, en utilisant les conditions initiales  $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = \alpha_0$  est le inequality  $a(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) \geq 0$  we find

$$\frac{1}{2} \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t (\omega_1(s) - \omega_2(s), \alpha_1(s) - \alpha_2(s))_{L^2(\Omega)} ds.$$

ce qui implique que

$$\|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t \|\omega_1(s) - \omega_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \int_0^t \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds,$$



Cette inégalité combiné avec l'inégalité de Gronwall conduit à

$$\|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \int_0^t \|\omega_1(s) - \omega_2(s)\|_{L^2(\Omega)} ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.3.38)$$

En substituant (2.3.37) et (2.3.38) dans (2.3.32), nous obtenons

$$\|\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}_1, \omega_1)(t) - \mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}_2, \omega_2)(t)\|_{V \times E_0} \leq C \int_0^t \|(\boldsymbol{\eta}_1, \omega_1)(s) - (\boldsymbol{\eta}_2, \omega_2)(s)\|_{V \times E_0} ds$$

Reitérant cette inégalité  $m$  fois on trouve

$$\|\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}_1, \omega_1) - \mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}_2, \omega_2)\|_{C([0, T]; V \times E_0)} \leq C \int_0^t \|(\boldsymbol{\eta}_1, \omega_1)(s) - (\boldsymbol{\eta}_2, \omega_2)(s)\|_{L^\infty((0, T); V \times E_0)} ds$$

qui implique que pour  $m$  suffisamment grand, un itéré  $\Lambda^n$  de  $\Lambda$  est une contraction dans l'espace de Banach  $L^\infty(0, T; V \times E_0)$  tel que  $\mathcal{L}^1(\boldsymbol{\eta}^*, \omega^*) = (\boldsymbol{\eta}^*, \omega^*)$  est aussi l'unique point fixe de  $\mathcal{L}$  ■

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour résoudre  $\mathcal{QV}$ .

**Lemme 2.3.7** *Il existe une solution unique  $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \alpha\}$  de problème  $\mathcal{QV}$  satisfaisant (2.2.13)-(2.2.16).*

**Preuve.** Soit  $(\boldsymbol{\eta}^*, \omega^*) \in L^\infty((0, T); V \times E_0)$  est une point fixe de  $\mathcal{L}$  donnée par (2.3.37), par lemme 2.3.5, nous concluons que  $\{\mathbf{u}_\eta, \boldsymbol{\sigma}_\eta\} = \{\mathbf{u}_{\eta\theta^*}, \boldsymbol{\sigma}_{\eta\theta^*}\} \in C(0, T, V) \times C(0, T, \mathcal{H}_1)$  est un unique solition de  $\mathcal{QV}_\eta$ . Depuis  $\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}^*, \omega^*) = (\boldsymbol{\eta}^*, \omega^*)$  à partir des relations (2.3.4), (2.3.5), (2.3.6) et le lemme 2.3.7  $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \alpha\} = \{\mathbf{u}_{\eta^*\theta^*}, \boldsymbol{\sigma}_{\eta^*\theta^*}, \alpha_{\eta^*\theta^*}\}$  est un unique solition de  $\mathcal{QV}$ . La régularité de la solution suit du lemme 2.3.5 et lemme 2.3.6. L'unicité de la solution conduit à partir de l'unicité de la fixe point de l'opérateur  $\mathcal{L}$  ■

Théorème 2.2.1 est maintenant une conséquence du lemme 2.3.2 et le lemme 2.3.7

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour prouver le théorème 2.2.1.

**Preuve de l'existence.** Soit  $(\boldsymbol{\eta}^*, \omega^*) \in C(0, T; V \times E_0)$  être le point de fixe  $\mathcal{L}(\cdot, \cdot)$  et dénoter

$$\mathbf{u}_*^\ell = \mathbf{u}_{\eta^*}^\ell, \quad \alpha_*^\ell = \alpha_{\omega^*}^\ell, \quad \beta_* = \beta_{\eta^*}, \quad (2.3.39)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_*^\ell = \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_*^\ell) + \mathcal{G}^\ell(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*^\ell) + \alpha_*^\ell), \quad (2.3.40)$$

Nous prouvons que le  $\{\mathbf{u}_*, \alpha_*, \beta_*\}$  satisfait (2.2.8)–(2.2.12) et les régularités (2.2.13)–(2.2.16).

En effet, nous écrivons (2.3.8) pour  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^*$  et l'utilisation (2.3.39) pour trouve

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_*^\ell), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + j(\beta_{\mathbf{u}_\eta}(t), \mathbf{u}_\eta(t), \mathbf{v}) + (\boldsymbol{\eta}^*(t), \mathbf{v})_V = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V \quad (2.3.41)$$

$\forall \mathbf{v} \in V$ , p.p.  $t \in [0, T]$ . et nous écrivons (2.3.24) pour  $\omega = \omega^*$  et l'utilisation (2.3.39) on obtenir

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\alpha}_*^\ell(t), \xi^\ell - \alpha_*^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\alpha_*(t), \xi - \alpha_*(t)) \\ & \geq \sum_{\ell=1}^2 \left( S^\ell(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*^\ell(t)), \alpha_*^\ell(t)), \xi^\ell - \alpha_*^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)}, \end{aligned} \quad (2.3.42)$$

pour tout  $\xi \in K$ , p.p.  $t \in (0, T)$ .

Les égalités  $\mathcal{L}^1(\boldsymbol{\eta}^*, \omega^*) = \boldsymbol{\eta}^*$  et  $\mathcal{L}^2(\boldsymbol{\eta}^*, \omega^*) = \omega^*$  combiné avec (2.3.27)–(2.3.29) montrer que

$$(\boldsymbol{\eta}^*(t), \mathbf{v})_V = \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{G}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*^\ell), \alpha_*, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \quad \forall \mathbf{v} \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T), \quad (2.3.43)$$

$$\omega_*^\ell(t) = S^\ell(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*^\ell(t)), \alpha_*^\ell(t)), \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \ell = 1, 2. \quad (2.3.44)$$

Nous substituons maintenant (2.3.43) dans (2.3.41) on obtenir

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_*^\ell)(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{G}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*^\ell)(t), \alpha(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\ & + j(\beta_*(t), \mathbf{u}_*(t), \mathbf{v}) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \text{ p.p. } t \in [0, T], \end{aligned} \quad (2.3.45)$$

et nous substituons (2.3.44) dans (2.3.42) à avoir  $\alpha_*(t) \in K$  et

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\alpha}_*^\ell(t), \xi^\ell - \alpha_*^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\alpha_*(t), \xi - \alpha_*(t)) \\ & \geq \sum_{\ell=1}^2 \left( \phi^\ell(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*^\ell(t)), \alpha_*^\ell(t)), \xi^\ell - \alpha_*^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)}, \end{aligned} \quad (2.3.46)$$

pour tout  $\xi \in K$ , p.p.  $t \in (0, T)$ .

et nous écrivons pour  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^*$  et l'utilisation (2.3.39) pour trouver

$$\dot{\beta}_*(t) = H_{ad}(\beta_*, R(|\mathbf{u}_{*\tau}^1(t) - \mathbf{u}_{*\tau}^2(t)|)), \quad (2.3.47)$$

p.p.  $t \in [0, T]$ .

Les relations (2.3.45), (2.3.46) et (2.3.47) nous permettent de conclure que  $(\mathbf{u}_*, \alpha_*, \beta_*)$  satisfait (2.2.8)–(2.2.11). Suivant, (2.2.12) et la régularité (2.2.13)–(2.2.16) suivez les lemmes 2.3.1, 2.3.3 et 2.3.5. Depuis  $\mathbf{u}_*$ , et  $\alpha_*$  satisfait (2.2.13) et (2.2.15), respectivement, il résulte de (2.3.40) avec  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^2$  tel que

$$\boldsymbol{\sigma}_* \in C(0, T, \mathcal{H}). \quad (2.3.48)$$

pour  $\ell = 1, 2$ , nous choisissons  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} \pm \phi$  dans (2.3.45), avec  $\phi = (\phi^1, \phi^2)$ ,  $\phi^\ell \in D(\Omega^\ell)^d$  et  $\phi^{3-\ell} = 0$ , on obtine

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma}_*^\ell(t) = -\mathbf{f}_0^\ell(t) \quad \forall t \in [0, T], \quad \ell = 1, 2,$$

où  $D(\Omega^\ell)$  est l'espace infiniment différentiables fonctions réelles avec un support compact  $\Omega^\ell$ . Nous utilisons (2.1.22) et (2.3.48) pour trouver

$$\boldsymbol{\sigma}_* \in C(0, T, \mathcal{H}_1).$$

Enfin, nous concluons que la solution faible  $\{\mathbf{u}_*, \boldsymbol{\sigma}_*, \alpha_*, \beta_*\}$  **PV** a un problème de la régularité (2.2.13)–(2.2.16), qui conclut la partie de l'existence du théorème 2.2.1. ■

**Preuve de l'unicité.** L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur  $\lambda$  définie par (2.3.27)–(2.3.29) et les solutions unique de la problèmes PV  $\frac{u}{\eta}$ , PV  $\frac{\beta}{\eta}$ , et PV  $\frac{\alpha}{\eta}$ . ■

# Annexe A

## Elements d'analyse non-linéaire dans les espaces de Hilbert

Afin de faciliter la lecture de cet ouvrage, il nous est paru utile de rappeler, dans cette dernière chapitre de la mémoire, quelques éléments d'analyse fonctionnelle. Cet annexe est divisé en deux parties.

Nous commençons de rappeler quelques éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert, et sur les opérateurs fortement monotones, et particulièrement des résultats d'existence et d'unicité concernant les inéquations variationnelles elliptiques, et à la présentation du théorème de Cauchy-Lipschitz.

La deuxième partie concerne les espaces fonctionnels. On y introduit les espaces de distributions et les espaces de type Sobolev associés à l'opérateur déformation et à l'opérateur divergence, et on présente leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. Enfin, on passe en revue quelques propriétés fondamentales des espaces des fonctions à valeurs vectorielles et quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle. On cite aussi dans cette partie quelques lemmes du type Gronwall qui sont utilisés tout le long de ce travail et quelques théorèmes que nous utilisons dans cette mémoire.

### A.1 Elements d'analyse non-linéaire dans les espaces de Hilbert.

Cette section comporte des rappels de quelques résultats d'analyse non linéaire utilisés tout au long de cette mémoire. On précise que pour avoir plus de détails sur les rappels

figurant dans cette section de consulter par exemple Brézis , Yosida et Sofonéa .

### A.1.1 Rappels sur les espaces de Hilbert

Soit  $H$  un espace vectoriel réel et  $(\cdot, \cdot)_H$  un produit scalaire sur  $H$  c'est -à -dire  $(\cdot, \cdot)_H : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  est une application bilinéaire symétrique et définie positive.

On note par  $\|\cdot\|_H$  l'application de  $H \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie par

$$\|\mathbf{u}\|_H = (\mathbf{u}, \mathbf{u})_H^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.1.1})$$

et on rappelle que  $\|\cdot\|_H$  est une norme sur  $H$  qui vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_H \leq \|\mathbf{u}\|_H \|\mathbf{v}\|_H, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H. \quad (\text{A.1.2})$$

On dit que  $H$  est un espace de Hilbert si  $H$  est complet pour la norme définie par (A.1.1).

Dans la suite,  $H$  désigne un espace de Hilbert réel muni de son produit scalaire ainsi que de la norme associée notés respectivement par  $(\cdot, \cdot)_H$  et  $\|\cdot\|_H$ . On note aussi par  $H'$  l'espace dual de  $H$  c'est à dire l'espace des fonctionnelles linéaires et continues sur  $H$  muni de la norme

$$\|\eta\|_{H'} = \sup_{v \in H, v \neq 0_H} \frac{(\eta, v)_{H' \times H}}{\|v\|_H} \quad (\text{A.1.3})$$

où  $(\cdot, \cdot)_{H' \times H}$  représente la dualité entre  $H'$  et  $H$

## a) Propriétés élémentaires

**Théorème A.1.1** (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet).

Etant donné  $\eta \in H'$ , il existe  $f \in H$  unique tel que

$$(\eta, v)_{H' \times H} = (f, v)_H, \quad \forall v \in H. \quad (\text{A.1.2})$$

On a de plus

$$\|\eta\|_{H'} = \|f\|_H. \quad (\text{A.1.3})$$

Ce théorème montre que toute forme linéaire continue sur  $H$  peut se représenter de manière unique à l'aide du produit scalaire. L'application  $\eta \mapsto f$  est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier  $H$  et son dual  $H'$ .

## b) Théorème du point fixe

On va commencer par rappeler un résultat classique qui est le théorème de point fixe de Banach. Ce résultat intervient dans les démonstrations de bon nombre des résultats d'existence et d'unicité établis dans les chapitres précédents

**théorème A.1.2** Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet et soit  $F : X \rightarrow X$  une application contractante, c'est-à-dire qu'il existe un réel  $k$  vérifiant  $0 < k < 1$  tel que

$$d(F(x_1), F(x_2)) \leq kd(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X \quad (\text{A.1.4})$$

L'application  $F$  admet alors un point fixe unique  $x \in X$  i.e  $F(x) = x$

### A.1.2 Opérateurs fortement monotones

Nous commençons ici par un bref rappel sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Hilbert  $X$  munit du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_X$  et de la norme associée  $|\cdot|_X$ . Soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur non linéaire.

**Définition A.2.1** L'opérateur  $A$  est dit :

(1) monotone si

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X; \quad (\text{A.1.5})$$

(2) fortement monotone s'il existe  $m > 0$  tel que

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m |u - v|_X^2 \quad \forall u, v \in X; \quad (\text{A.1.6})$$

(3) de Lipschitz s'il existe  $M > 0$  tel que

$$|Au - Av|_X \leq M |u - v|_X \quad \forall u, v \in X. \quad (\text{A.1.7})$$

### A.1.3 Théorème du point fixe-Théorème de Lax-Milgram

**Théorème A.3.1 ( Théorème point fixe)** Soit  $X$  un espace de Banach,  $A : X \rightarrow X$  un opérateur satisfait 1.5.9 (3) avec  $0 < M < 1$ . L'opérateur  $A$  admet un point fixe unique  $x \in X$ , c'est-à-dire  $Ax = x$  et nous appelons  $A$  un opérateur contractant.

**Proposition A.3.1** Soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors pour tout  $f \in X$  il existe un élément unique  $u \in X$  tel que  $Au = f$ .

Le résultat précédent est un cas particulier du théorème de Minty-Browder (voir par exemple [6] p.88).

**Définition A.3.1** Soit  $A : X \rightarrow X'$  un opérateur défini sur  $X$ . L'opérateur  $A$  est dit :

(1) monotone si

$$(Au - Av, u - v)_{X' \times X} \geq 0 \quad \forall u, v \in X;$$

(2) hémicontinu si

$$\forall u, v \in X, \text{ l'application } t \rightarrow A(u + tv) : \mathbb{R} \rightarrow X' \text{ est continue.} \quad (\text{A.1.8})$$

**Définition A.3.2** Une forme bilinéaire  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  est continue s'il existe un réel  $M > 0$  tel que

$$|a(u, v)| \leq M |u|_X |v|_X \quad \forall u, v \in X. \quad (\text{A.1.9})$$

**Définition A.3.3** Une forme bilinéaire  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  est dite coercive s'il existe une constante  $m > 0$  telle que

$$a(u, u) \geq m |u|_X^2 \quad \forall u \in X. \quad (\text{A.1.10})$$

**Théorème A.3.4 (Théorème de Lax-Milgram)** Soit  $X$  un espace de Hilbert,  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire continue et coercive. Soit  $l : X \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire continue. Alors, il existe une solution unique  $u \in X$  qui satisfait

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in X. \quad (\text{A.1.11})$$

#### A.1.4 Sous différentiabilité

Nous considérons dans tout ce paragraphe que  $X$  est un espace de Hilbert et  $K$  un sous-ensemble de l'espace  $X$ .

**Définition A.4.1** On appelle fonction indicatrice de  $K$ , la fonction  $\Psi_K$  définie par

$$\Psi_K(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in K, \\ +\infty & \text{si } u \notin K. \end{cases} \quad (\text{1.1.12})$$

**Définition A.4.2** Soit une fonction  $j : X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $u$  un élément de l'espace  $X$  tel que  $j(u) \neq \pm\infty$ . Le sous-différentiel de la fonction  $j$  en  $u$ , noté  $\partial j(u)$  est l'ensemble défini par

$$\partial j(u) = \{u' \in X' \mid j(v) \geq j(u) + (u', v - u) \quad \forall v \in X\}. \quad (\text{A.1.13})$$

Le crochet  $(\cdot, \cdot)$  désignant la dualité entre  $X'$  et  $X$ .

Tout élément  $u'$  de l'ensemble  $\partial j(u)$  est appelé sous-gradient de la fonction  $j$  en  $u$ . La fonction  $j$  est dite sous-différentiable en  $u$  si  $\partial j(u) \neq \emptyset$ . Elle est dite sous-différentiable si elle l'est en tout point  $u$  de l'espace  $X$ .

Nous pouvons caractériser le sous-différentiel  $\partial \Psi_K$  d'une fonction indicatrice  $\Psi_K$  d'un ensemble convexe non vide

$$\partial \Psi_K(u) = \{u' \in X' \mid (u', v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K\}. \quad (\text{A.1.14})$$

### A.1.5 Equations et inéquations variationnelles d'évolution

Nous allons rappeler dans ce paragraphe deux résultats sur les équations d'évolution et un résultat sur les inéquations variationnelles d'évolution.

#### Équation différentielle ordinaire

**Théorème A.5.1 (Cauchy-Lipschitz)** Soit  $(X, |\cdot|_X)$  un espace de Banach réel et soit  $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$  un opérateur défini p.p. sur  $(0, T)$ , qui satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ |F(t, x_1) - F(t, x_2)|_X \leq L_F |x_1 - x_2|_X \quad \forall x_1, x_2 \in X, \text{ p.p. } t \in (0, T); \end{array} \right. \quad (\text{A.1.15})$$

$$\text{il existe } 1 \leq p < +\infty \text{ tel que } F(\cdot, x) \in L^p(0, T; X) \quad \forall x \in X. \quad (\text{A.1.16})$$

Alors pour tout  $x_0 \in X$ , il existe une fonction unique  $x \in W^{1,p}(0, T; X)$  telle que

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)) \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (\text{A.1.17})$$

$$x(0) = x_0.$$

Maintenant nous considérons  $V$  et  $H$  deux espaces de Hilbert réels tels que l'application d'inclusion de  $(V, |\cdot|_V)$  dans  $(H, |\cdot|_H)$  est continue et dense. Identifiant le dual de  $H$  avec lui-même, c'est-à-dire nous pouvons écrire le triplet de Gelfand  $V \subset H \subset V'$ . Les notations  $|\cdot|_V, |\cdot|_{V'}$  et  $(\cdot, \cdot)_{V' \times V}$  représentent les normes sur  $V, V'$  et le produit de dualité entre  $V'$  et  $V$ , respectivement.



### A.1.6 Equation aux dérivées partielles d'évolution

**Théorème A.6.1** Soit  $V, H$  satisfaisant les hypothèses décrites ci-dessus et soit  $A : V \rightarrow V'$  est un opérateur hémicontinu et monotone qui satisfait

$$\text{il existe } \lambda > 0 \text{ et } \alpha \in \mathbb{R} \quad (Av, v)_{V' \times V} \geq \lambda |v|_V^2 + \alpha \quad \forall v \in V,$$

$$\exists c > 0, \quad |Av|_{V'} \leq c(|v|_V + 1) \quad \forall v \in V.$$

Alors, pour tout  $u_0 \in H$  et  $f \in L^2(0, T; V')$ , il existe une fonction unique  $u$  qui satisfait

$$u \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \quad \dot{u} \in L^2(0, T; V'), \quad (\text{A.1.18})$$

$$\{\dot{u}(t) + Au(t) = f(t) \quad \text{p.p. } t \in (0, T),$$

$$u(0) = u_0. \quad (\text{A.1.19})$$

### A.1.6 Inéquation variationnelle d'évolution

#### Inégalités variationnelles paraboliques

soit  $V$  et  $H$  deux espaces de Hilbert réels tels que l'application d'inclusion de  $(V, |\cdot|_V)$  dans  $(H, |\cdot|_H)$  est continue et dense. Identifiant le dual de  $H$  avec lui-même, c'est-à-dire nous pouvons écrire le triplet de Gelfand  $V \subset H \subset V'$ . Les notations  $|\cdot|_V, |\cdot|_{V'}$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V' \times V}$  représentent les normes sur  $V, V'$  et le produit de dualité entre  $V'$  et  $V$ , note par  $f \in H$  par

$$\langle f, v \rangle_{V' \times V} = (f, v)_H \quad \forall v \in V$$

Ce qui suit est un résultat normal pour les inégalités variationnelles paraboliques

**Théorème A.7.1** Soit  $V \subset H \subset V'$  est un triplet de Gelfand,  $K$  est un sous-ensemble fermé non vide et convexe de  $V$ , et soit  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  est une forme bilinéaire symétrique et continue qui satisfait

$$\text{il existe } c_1 > 0 \text{ et } c_0 \quad a(v, v) + c_0 |v|_H^2 \geq c_1 |v|_V^2 \quad \forall v \in V.$$

Alors, pour tout  $u_0 \in K$  et  $f \in L^2(0, T; H)$ , il existe une unique fonction  $u$  qui satisfait

$$u \in H^1(0, T; H) \cap L^2(0, T; V), \quad (\text{A.1.20})$$

$$\begin{aligned}
u(t) &\in K \quad \forall t \in [0, T], \\
u(0) &= u_0.
\end{aligned} \tag{A.1.21}$$

Pour les démonstrations de ces trois théorèmes on peut regarder dans [39].

### A.1.7 Lemme de Gronwall

Nous rappelons ici le lemme du type Gronwall qui intervient dans de nombreux problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution.

**Lemme B.8.1** Soient  $m, n \in C(0, T; \mathbb{R})$  telles que  $m(t) \geq 0$  et  $n(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $a \geq 0$  une constante et  $\phi \in C(0, T; \mathbb{R})$

(1) Si

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s) ds + \int_0^t n(s) \phi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\phi(t) \leq \left( a + \int_0^t m(s) ds \right) \exp \left( \int_0^t n(s) ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

(2) Si

$$\phi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \phi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \phi(s) ds \leq e^{at} \int_0^t m(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Dans le cas particulier  $a = 0$ ,  $n = 1$ , la partie (1) de ce lemme devient.

**Corollaire A.8.1** Soit  $m \in C(0, T; \mathbb{R})$  telle que  $m(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [0, T]$ . Si  $\phi \in C(0, T; \mathbb{R})$  est une fonction telle que

$$\phi(t) \leq \int_0^t m(s) ds + \int_0^t \phi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors, il existe  $c > 0$  tel que

$$\phi(t) \leq c \int_0^t m(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

# Annexe B

## Espace fonctionnels

On introduit dans cette partie les espaces de type sobolev utilisés en mécanique de contact, à savoir les espaces de Hilbert associés aux opérateurs divergence et déformation, ainsi que les espaces de fonction à valeurs vectorielles. On présente en plus leurs principales propriétés, notamment les théorème de trace. On rappelle aussi quelques espaces de fonction définies sur un intervalle réel et à valeurs dans un espace de Hilbert. Pour plus de détails sur les espace de Sobolev et les espaces de distributions.

Espace de Hilbert associés aux opérateurs divergence et déformation. Nous désignons par  $\mathbb{S}^d$  l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ). Et  $\|\cdot\|$  représentent le produit scalaire et la norme Euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathbb{S}^d$ , respectivement. Ainsi,

$$\mathbf{u}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell = u_i^\ell v_i^\ell, \quad \|v^\ell\| = (v^\ell, v^\ell)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell \in \mathbb{R}^d.$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell \cdot \boldsymbol{\tau}^\ell = \sigma_{ij}^\ell \tau_{ij}^\ell, \quad \|\tau^\ell\| = (\tau^\ell, \tau^\ell)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell \in \mathbb{S}^d.$$

ici partout dans ce manuscrit nous utilisons la convention de l'indice muet par ailleurs, l'indice après une vigule dénote la dérivée par rapport à la composante correspondante de la variable spatiale  $x$ .

Dans toute la suite,  $\Omega^\ell \subset \mathbb{R}^d$  est un domaine borné avec une frontière de Lipschitz notée  $\Gamma^\ell$ . Pour le champ de déplacements et le champ des contraintes nous utilisons les espaces suivants

On va utiliser les notations

$$H^\ell = \{\mathbf{u}^\ell = (u_i^\ell)/u_i^\ell \in L^2(\Omega^\ell), i = \overline{1, N}\} = L^2(\Omega^\ell)^N. \quad (\text{B.1.1})$$

Où le espace  $\mathcal{H}^\ell$  sont défini par

$$\mathcal{H}^\ell = \boldsymbol{\sigma}^\ell = (\sigma_{ij}^\ell) / \sigma_{ij}^\ell = \sigma_{ij}^\ell \in L^2(\Omega^\ell), \quad i, j = \overline{1, N} \} = L^2(\Omega^\ell)^{N \times N}. \quad (\text{B.1.2})$$

Les espaces  $H$  et  $\mathcal{H}$  sont des espace Hilbert réels menus des produit scalaires canoniques

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_H &= \int_{\Omega} u_i^\ell v_i^\ell dx \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H \\ (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} &= \int_{\Omega^\ell} \sigma_{ij}^\ell \tau_{ji}^\ell dx, \quad \forall \boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell \in \mathcal{H}^\ell. \end{aligned}$$

Les normes associées à ces produits scalaires seront notées respectivement par  $\|\cdot\|_{H^\ell}$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^\ell}$

Compte tenu de l'identification de  $L^2(\Omega^\ell)$  à un sous-espace de distributions sur  $\Omega^\ell$ . Par conséquent, les opérateurs déformation et divergence peuvent être définis respectivement sur les  $H^\ell$  et  $\mathcal{H}^\ell$ . Pour l'instant, on rappelle la définition de l'espace de sobolev  $H^1(\Omega^\ell)$  défini par

$$H^1(\Omega^\ell) = \{\mathbf{u}^\ell \in L^2(\Omega^\ell) / \partial_i u^\ell \in L^2(\Omega^\ell), \quad i = \overline{1, N}\}. \quad (\text{B.1.3})$$

L'espace  $H^1(\Omega^\ell)$  est un espace de Hilbert réel pour le produit scalaire

$$(\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^1(\Omega^\ell)} = (\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} + (\partial_i \mathbf{u}^\ell, \partial_i \mathbf{v}^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} \quad \forall \mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell \in H^1(\Omega^\ell). \quad (\text{B.1.4})$$

On notera la norme associée par  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega^\ell)}$ . On note plus par  $H_0^1(\Omega^\ell)$  l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega^\ell)$  dans  $H^1(\Omega^\ell)$ . L'espace  $H_0^1(\Omega^\ell)$  est un espace fermé de  $H^1(\Omega^\ell)$ .

## B.1 Espace liés à l'opérateur déformation

Pour l'opérateur déformation défin par (1.1.9), il est naturel d'introduire l'espace

$$H_1^\ell = \{\mathbf{u}^\ell \in H^\ell / \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) \in \mathcal{H}^\ell\} \quad (\text{B.1.5})$$

On considère sur  $H_1^\ell$  le produit scalaire

$$(\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H_1^\ell} = (\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} + (\varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \quad \forall \mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell \quad (\text{B.1.6})$$

et not la norme associée par  $\|\cdot\|_{H_1}$ . On obtient ainsi que l'injection  $H_1^\ell \subset H^\ell$  et l'opérateur déformation  $\varepsilon : H_1^\ell \rightarrow \mathcal{H}^\ell$  sont des opérateurs continus.

**Théorème B.1.1** Muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_{H_1^\ell}$  l'espace  $H_1^\ell$  est espace Hilbert réel.

On munit maintenant l'espace produit  $H_1(\Omega)^N$  du produit scalaire canonique et de la norme associée respectivement par  $(\cdot, \cdot)_{H^1(\Omega)^N}$  et  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)^N}$ . On a alors le résultat suivant

**Théorème B.1.2** On l'égalité algébrique  $H_1^\ell = H^1(\Omega)^N$  et  $\|\cdot\|_{H_1^\ell}, \|\cdot\|_{H^1(\Omega)^N}$  sont les normes équivalentes sur  $H_1^\ell$

On suppose maintenant que dans toute la suite, la frontière  $\Gamma^\ell$  de  $\Omega^\ell$  est de classe  $C^{1,1}$ . Compte tenu du théorème précédent, toutes les propriétés de l'espace  $H^1(\Omega^\ell)$  peuvent être transportées sur l'espace  $H_1^\ell$  par passage aux espaces produit. Plus précisément, on a les résultats suivants :

1.  $C^1(\overline{\Omega})^N$  est dense dans  $H_1$ .
2.  $H_1^\ell \subset H$  avec injection compacte (Théorème de Rellich).
3. Il existe une application linéaire et continue  $\gamma : H_1 \longrightarrow L^2(\Gamma)^N$  vérifiant l'égalité

$$\gamma u = u|_\Gamma, \quad \forall u \in C^1(\overline{\Omega})^N.$$

L'application  $\gamma$  est appelée application trace. Elle est définie comme le prolongement par densité de l'application  $u \longrightarrow u|_\Gamma$  définie pour tout  $u \in C^1(\overline{\Omega})^N$ . L'application trace  $\gamma : H_1 \longrightarrow L^2(\Gamma)^N$  n'est pas surjective. L'image de  $H_1$  par cette application est notée par  $H_\Gamma$ . On a en outre :

4.  $H_\Gamma \subset L^2(\Gamma)^N$  avec injection et continue.
5. Il existe une application linéaire continue  $z : H_\Gamma \longrightarrow H_1$  vérifiant l'égalité

$$\gamma(z(\xi)) = \xi \quad \forall \xi \in H_\Gamma. \tag{B.1.7}$$

6. Le noyau de l'application trace est  $H_0^1(\Omega)^N$  i.e  $H_0^1(\Omega)^N = \{u \in H_1 / \gamma u = 0\}$ .

Soit maintenant et soit  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ , et  $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$  pour  $i \neq j$  et  $V$  est l'espace défini par

$$V = \{\mathbf{u} \in H_1 / \gamma \mathbf{u} = 0 \quad p.p \quad \text{sur } \Gamma_1\}. \tag{B.1.8}$$

**Théorème B.1.3** L'espace  $V$  est un sous-espace fermé de  $H_1$ .

**Théorème Inégalité de Korn.** Soit  $mes(\Gamma_1^\ell) > 0$ . Alors il existe une constante  $C > 0$  qui dépend de  $\Omega^\ell$  et  $\Gamma_1^\ell$  telle que

$$\|\varepsilon(u)^\ell\|_{\mathcal{H}}^\ell \geq C^\ell \|u\|_{H_1^\ell} \quad \forall u^\ell \in V^\ell \quad (\text{B.1.9})$$

En utilisant ce résultat, il vient.

**Rémark B.1.1** Si  $mes(\Gamma_1^\ell) > 0$  alors  $u \rightarrow \|\varepsilon(u)^\ell\|_{\mathcal{H}^\ell}$  est une norme sur le sous-espace  $V^\ell$  défini par (2.1.28), équivalent à la norme canonique  $\|\cdot\|_{H_1}$ .

Une preuve de cette inégalité peut être trouvée dans [21]. Sur  $V^\ell$  nous considérons le produit scalaire par

$$(u^\ell, v^\ell)_{V^\ell} = (\varepsilon(u^\ell), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \quad \forall u^\ell, v^\ell \in V^\ell \quad (\text{B.1.10})$$

et soit  $\|\cdot\|_{V^\ell}$  la norme associée, ie

$$\|v^\ell\|_{V^\ell} = \|\varepsilon(v^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} \quad \forall v^\ell \in V^\ell \quad (\text{B.1.11})$$

Il résulte par l'inégalité de Korn, il vient que  $\|\cdot\|_{H_1}$  et  $\|\cdot\|_{V^\ell}$  sont des normes équivalentes sur  $V^\ell$  et ainsi  $(V^\ell, \|\cdot\|_{V^\ell})$  est un espace de Hilbert réel. En outre, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante  $C_0^\ell > 0$  dépendant uniquement de  $\Omega^\ell, \Gamma_1^\ell$  et  $\Gamma_3^\ell$  telle que :

$$\|v^\ell\|_{L^2(\Gamma_3^\ell)^d} \leq C_0^\ell \|v^\ell\|_{V^\ell} \quad \forall v^\ell \in V^\ell \quad (\text{B.1.12})$$

et on note  $C_0^\ell$  une fourmi constante donnée par :

$$c_0^\ell = \mathbf{max} \{c_0^1, c_0^2\} \quad (\text{B.1.13})$$

Par l'inégalité de Korn que  $(V^\ell, \|\cdot\|_{V^\ell})$  est un espace de Hilbert réel.

## B.2 Espace liés à l'opérateur divergence

Comme dans le cas l'opérateur déformation, il est naturel d'introduire l'espace  $\mathcal{H}_1^\ell$  lié à l'opérateur divergence et défini par

$$\mathcal{H}_1^\ell = \{\sigma^\ell \in \mathcal{H}^\ell / \text{Div} \sigma \in H^\ell\} \quad (\text{B.1.14})$$

sur lequel on considère le produit scalaire

$$\langle \sigma^\ell, \tau^\ell \rangle_{\mathcal{H}_1^\ell} = \langle \sigma^\ell, \tau^\ell \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + \langle Div \sigma^\ell, Div \tau^\ell \rangle_{H^\ell} \quad \forall \sigma^\ell, \tau^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell. \quad (\text{B.1.15})$$

On note la norme associée par  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1^\ell}$ . On obtient ainsi que l'injection  $\mathcal{H}_1^\ell \subset \mathcal{H}^\ell$  et l'opérateur divergenc.

$Div \sigma^\ell : \mathcal{H}_1^\ell \rightarrow H^\ell$  sont des opérateurs continus.

**Théorème B.2.1** Muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}_1^\ell}$  l'espace  $\mathcal{H}_1^\ell$  est un espace de Hilbert réel.

On peut prouver que l'espace

$$C^1(\overline{\Omega}^\ell)_s^{N \times N} = \{ \sigma^\ell = (\sigma_{ij}) / \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in C^1(\overline{\Omega}^\ell), \quad i, j = \overline{1, N} \} \quad (\text{B.1.16})$$

est dense dans  $\mathcal{H}^\ell$ . De plus, pour tout  $\sigma^\ell \in C^1(\overline{\Omega}^\ell)_s^{N \times N}$ , on note par  $\sigma^\ell \nu^\ell$  le vecteur de composantes  $(\sigma_{ij} \nu_j)$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Comme dans le cas de l'espace  $H_1$ , on peut définir l'application trace pour l'espace  $\mathcal{H}_1^\ell$  à l'aide de résultat suivant :

**Théorème B.2.2** Il existe une application linéaire, continue et surjective  $\bar{\gamma} : \mathcal{H}_1 \rightarrow H'_\Gamma$  telle que

$$\langle \bar{\gamma} \sigma, \xi \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \int_\Gamma \sigma \nu \cdot \xi da \quad (\text{B.1.17})$$

Pour tout  $\xi \in H_\Gamma$  et  $\sigma \in C^1(\overline{\Omega})_s^{N \times N}$ . Pour tout  $\sigma \in \mathcal{H}_1$ , l'image  $\bar{\gamma} \sigma \in H'_\Gamma$  est élément de  $H'_\Gamma$  vérifiant l'églité

$$\langle \bar{\gamma} \sigma, \gamma u \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = (\sigma, \varepsilon(u))_{\mathcal{H}} + \langle Div \sigma, u \rangle_H \quad \forall H_1. \quad (\text{B.1.18})$$

De plus, il existe une application linéaire et continue  $\bar{z} : H'_\Gamma \rightarrow Q_1$  telle que

$$\bar{\gamma}(\bar{z}(\Sigma)) = \Sigma \quad \forall \Sigma \in H'_\Gamma. \quad (\text{B.1.19})$$

Rappelons aussi la formule de Green ci-dessous :

$$(\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (Div \sigma^\ell, v^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \sigma^\ell \nu \cdot v da \quad \forall H_1^\ell \quad (\text{B.1.20})$$

On note par  $v_{\nu^\ell}^\ell$  et  $v_{\tau^\ell}^\ell$  la composante normale et respectivement tangentielle de tout champ vectoriel

$$v_{\nu^\ell}^1 \ell = v^\ell \cdot \nu^\ell \quad v^\ell = v_{\nu^\ell}^\ell \nu^\ell + v_{\tau^\ell}^\ell \tau^\ell$$

De meme, soit  $\sigma_{\nu^\ell}^\ell$  et  $\sigma_{\tau^\ell}^\ell$  la composante normale et respectivement tangentielle de tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma^\ell \nu^\ell$ . Il vient :  $\sigma_{\nu^\ell}^\ell = (\sigma^\ell \nu^\ell)_{\nu^\ell}$ ,  $\sigma_{\tau^\ell}^\ell = (\sigma^\ell \tau^\ell)_{\tau^\ell}$ , c'est à dire :

$$\sigma_{\nu^\ell}^\ell = (\sigma^\ell \nu^\ell) \cdot \nu^\ell \quad \sigma_{\tau^\ell}^\ell = \sigma_{\nu^\ell}^\ell - \sigma_{\nu^\ell}^\ell \nu^\ell$$

### B.3 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Soit  $H$  un espace de Hilbert. Soient  $k \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq p \leq +\infty$  et  $T > 0$ . On rappelle que  $W^{k,p}(0, T; H)$  est l'espace des distributions vectorielles  $u \in D'(0, T; H)$  telle que  $D_j u \in L^p(0, T; H)$  pour  $j = \overline{0, k}$ ,  $D_j$  désignant la dérivée d'ordre  $j$  au seus des distributions.

Si  $1 \leq p \leq +\infty$ ,  $W^{k,p}(0, T; H)$  est un espace de Banch réel pour la norme définie par

$$\|u\|_{W^{k,p}(0,T;H)} = \left( \sum_{j=0}^k \int_0^T |D_j u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\forall u \in W^{k,p}(0, T; H)$$

En particulier,  $W^{k,2}(0, T; H)$  est un espace de Hilbert réel pour le produit scalaire définie par

$$(u, v)_{W^{k,2}(0,T;H)} = \sum_{j=0}^k \int_0^T (D_j u(t), D_j v(t))_H dt$$

$$\forall u, v \in W^{k,2}(0, T; H)$$

D'autre part,  $W^{k,\infty}(0, T; H)$  est un espace de Banch réel pour la norme définie par

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(0,T;H)} = \sum_{j=0}^k \sup_{[0,T]} |D_j u(t)|_H$$

$$\forall u \in W^{k,\infty}(0, T; H)$$

pour le cas particulier  $k = 0$ , on remarque que

$$W^{0,p}(0, T; H) = L^p(0, T; H)$$



et on note alors la norme  $L^p(0, T; H)$  par  $\|\cdot\|_{L^p(0, T; H)}$  pour tout  $1 \leq p \leq +\infty$ , on définit aussi, pour  $k \in \mathbb{N}$ , l'espace  $C^k(0, T; H)$  des fonctions  $u : [0, T] \rightarrow H$  telles que pour tout  $j = \overline{0, k}$  les dérivées  $\frac{d^j u}{dt^j}$  existe et sont continue sur  $[0, T]$ , on note, en particulier,  $C^0(0, T; H)$  par  $C(0, T; H)$ . L'espace  $C^k(0, T; H)$  est un espace de Banach pour la norme définie par

$$\|u\|_{C^k(0, T; H)} = \sum_{j=0}^k \max_{t \in [0, T]} \left| \frac{d^j u}{dt^j}(t) \right|_H$$

$$\forall u \in C^k(0, T; H)$$

En particulier, les normes sur les espaces  $C(0, T; H)$  et  $C^1(0, T; H)$  sont données par

$$\|u\|_{C(0, T; H)} = \max_{t \in [0, T]} |u(t)|_H$$

$$\|u\|_{C^1(0, T; H)} = \max_{t \in [0, T]} |u|_H + \max_{t \in [0, T]} |\dot{u}|_H$$

$$\forall u \in C^k(0, T; H)$$

On précise que le point au dessus d'une expression désigne la dérivée de cette expression par rapport au temps, représentée la variable  $t \in [0, T]$

# Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution de problème mécanique aux limites de bilatéral de contact avec adhésion et endommagement entre deux corps viscoélastiques.

On a utilisé la formule de Green pour obtenir la formulation variationnelle de cet problème. Comme la frontière des corps et les données des problèmes ont des bonnes régularités ; donc, la solution du problème mécanique et du problème variationnelle est la même.

On a montré l'existence et l'unicité de la solution des problèmes précédents par l'utilisation des arguments suivants équation variationnelle dépendant du temps, équation variationnelle d'évolution, inéquation variationnelle d'évolution du type parabolique, équation différentielle et point fixe.

# Bibliographie

- [1] R. S. Adams, *Sobolev spaces*, Academic press, New York(1975).
- [2] A. Aissaoui, N. Hemici, *A frictional contact problem with damage and adhesion for an electro elastic-viscoplastic body*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations No. 11, 1-19, (2014).
- [3] A. Aissaoui, N. Hemici, *Bilateral contact problem with adhesion and damage*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations No. 18, 1-16, (2014).
- [4] A. Djabi, A. Merouani,A. Aissaoui, *A frictional contact problem with wear involving elastic-viscoplastic materials with damage and thermal effects*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations No. XX, 1-18, (2015).
- [5] R.C Batra and J.S Yang, *Optimal control of variational inequalities*, pitman. Boston.(1984).
- [6] M. Campo, J.R. Fernández,W. Han, M. Sofonea, *Saint Venant's principle in linear piezoelectricity*,Journal of Elasticity. 38, (1995), pp.209-218.
- [7] O. Chau, J.R. Fernández, M. Shillor, M. Sofonea, *Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic contact problem with adhesion*, J. Comput. Appl. Math, 159,(2003), pp.431-465.
- [8] M. Frémond, *Equilibre des structures qui adhèrent à leur support*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér.II.295,(1982), pp.913-916.
- [9] M. Frémond, *Adhérence des solides*, J Mécanique Théorique et appliquée, 6, (1987), pp.383-407.

- [10] M. Frémond, B. Nedjar, *Damage in concrete : The unilateral phenomenon*, Nucl. Eng. Des. 155,(1995), pp.323-335.
- [11] M. Frémond, B. Nedjar ; *Damage in gradient of damage and principle of virtual work* , Int. J. Solids. Stuct.,33(8), pp. 1083-1103, (1996).
- [12] M. Frémond, KL. Kuttler, B. Nedjar, M. Shillor, *One-dimensional models of damage*, Adv. Math. Sci. Appl. 8(2),155,(1998), pp.541-570.
- [13] W. Han, M. Sofonea ; *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, Studies in Advanced Mathematics 30, American Mathematical Society, Providence, RI-Intl.Press, Sommerville, MA, (2002).
- [14] N. Hemici, B. Awbi,M. Sofonea ; *Viscoelastic problem contact with compliance normal and adhesion*, Annals of University of Bucarest 51 (2002) 131-142.
- [15] N. Hemici, M. Sofonea ; *Analysis of dynamic bilateral contact problem with adhesion*, Proceedings of the Fourth International Conference on Applied Mathematics and Engineering Sciences, (CIMASI 2002), Casablanca (2002), CD-ROM.
- [16] J. Necas, I. Hlavacek ; *Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies*,An Introduction,Amsterdam, Elsevier, 1981.
- [17] M. Raous, L. Cangémi, M. Cocu ; *A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 177, pp. 383-399, (1999).
- [18] M. Campo, J.R. Fernández,W. Han, M. Sofonea, *A dynamic viscoelastic contact problem with normal compliance and damage*, Finite Elem. Anal. Des. 42, (2005), pp.1-24.
- [19] P. G. Ciarlet, *Elasticité Tridimensionnelle*, Masson, Paris (1986) nless Contact with adhesion, J. Appl. Meth. Phys. (ZAMP), 55, (2004), pp.431-465.
- [20] M. Cocu, R. Rocca, *Existence Results for Unilateral Quasistatic Contact Problems with Friction and Adhesion*, Math. Model. and Numer. Anal. 34, (2000), pp.981-1001.

- [21] A.Curien and C. A *model of adhesion added to contact with friction*, in contact Martine and MDP Monteiro Marques (Eds.),Kluwer Dordrecht,2002,161-168.
- [22] G. Duvaut, J. L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, Berlin, (1976).
- [23] J.R. Fernandez, M. Shillor and M. Sofonea, *Analysis and numerical simulations of a dynamic contact problem with adhesion*, *Math. Comput. Modelling*, 37, (2003), pp.1317-1333.
- [24] M. Sofonea ,A.Matei , *A fixed point result for operators defined on spaces of vector-valued continuous functions*,*Ann.Univ.Craiova*,19,19-22,(2000).
- [25] M. Sofonea ,A.Matei , *An elastic contact problem with adhesion and normal compliance*,Preprint.
- [26] M. Sofonea, M. Shillor,W. Han, J. J. Telega; *Models and Variational Analysis of Quasistatic Contact*,Lect.Notes Phys 655, Springer, Berlin,(2004).
- [27] L.Schwartz, *Théorie des Distributions*,Hermann,paris(1967).
- [28] Adrian. Panait; *Étude expérimentale et numérique des problèmes de contact unilatéral et de frottement sec dans les assemblages verriers*,Cahier. 3519. pp. 17-34, (2005).
- [29] Christian. TALON; *couplage d'une loi d'adhésion à une loi de contact avec frottement pour l'étude de la décohésion dans les matériaux composites*,Lausanne, EPFL (2002).

## résumé

L'objet de ce mémoire est l'étude de problèmes de contact bilatéral sans frottement avec adhésion, et endommagement entre deux corps viscoélastique ,ici nous considérons des lois comportement non linéaires pour des matériaux viscoélastique dans le processus quasistatiques .pour ce problème obtenons des formulations variationnelles suivies des résultats d'existence et d'unicité des solution faibles .

**Mots clés:** processus quasistatiques, le contact sans frottement, bilatéral, adhésion, matériaux viscoélastique avec endommagement ,opérateur monotone, équation différentielle, Inégalités variationnelles paraboliques, point fixe, solution faible.

**AMS(2010):**74M15,74F99,74G25,74R99.

---

## abstract

The object of this thesis is the study of bilateral problems without contact with frottement adhesion and endommagemment between two viscoelastic body, here we consider nonlinear commportement laws of viscoelastic materials in the process Quasistatic ,to get this problem formulations followed variational results of existence and uniqueness of weak solution .

**Keywords:** quasistatic process, the contactless frottemment, bilateral, accession, viscoelastic materials with damage, monotone operator differential equation, parabolic variational inequalities, fixed point, weak solution.

**AMS(2010):**74M15,74F99,74G25,74R99.

---

## ملخص

الغرض من هذه المذكرة هو دراسة مسألة تماس بدون احتكاك مع الالتصاق و التشوه بين جسمين قابلين للتشكل .

اعتبرنا قوانين السلوك غير خطية لمواد لزجة مرنة في سياقات شبه استاتيكية، من اجل هذه المسألة نحصل على صيغ متنوعة بنتائج وجود و وحدانية الحل الضعيف .

**الكلمات المفتاحية :**

لزوج مرن، تماس بدون احتكاك، سياق شبه استاتيكي، نقطة ابته، حل ضعيف، معادلات تفاضلية، المؤثر المهيمن .

**تصنيف الجامعة الامريكية :** 74M15,74F99,74G25,74R99