



UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la
Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par : Lokmane TABET

Thème

Interpolation de fonctions peu régulières : interpolé de Clément

Soutenu publiquement le : 21/05/2015

Devant le jury composé de :

Ghezal Abderrazek	M.C. Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
Bensayah Abdallah	M.C. Université KASDI Merbah- Ouargla	Examineur
Merabet Ismail	M.C. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

DÉDICACES

Nous avons commencé plus d'une main et Qasena plupart d'entre eux et nous avons beaucoup souffert de difficultés et maintenant nous sommes aujourd'hui et heureusement implique des nuits blanches et des jours pénibles et récapitulation Emczuarna entre les couvertures de ce modeste travail.

Dans un phare de la science et de l'imam Mustafa à un analphabète qui a enseigné Altalim au maître de la création de notre noble Prophète Muhammad paix soit sur lui.

Pour la fontaine, qui ne se lasse pas de donner à mon bonheur imité tissé avec des fils de son coeur à ma chère mère.

Pour le méchant et cherché à alléger le plus doux et le contentement qu'il a donné quelque chose à la charge dans la voie du succès qui a élevé lui m'a appris que la vie avec sagesse et patience à mon père.

Pour leur amour d'être dans mes veines et mon coeur médite leur mémoire à mes frères et soeurs.

De marchaient ensemble pour et nous faisons notre chemin ensemble vers le succès et la créativité de la main dans la main et nous en prenons la fleur et appris à mes amis et collègues.

REMERCIEMENT

Avant toute considération, je remercie le Grand Dieu le tout puissant qui, m'a aidé pour achever ce travail.

Je tiens tout a remercier premier lieu mon encadreur Monsieur MERABET Ismail de m'avoir proposé un des plus importants thèmes et pour sa continuité à me soutenir et à m'encourager. Je voudrai aussi le remercier pour sa gentillesse, sa disponibilité et du temps consacré à mon travail.

Je remercie également les membres du département de Mathématique et Informatique de m'avoir permis de travailler dans de bonnes conditions pendant la réalisation de mon travail.

Merci également a tous les enseignants qui m'ont aidé pendant mon cursus, sans oublier leurs conseils précieux.

Je remercie aussi toute personne de prés ou de loin a contribué à la finalisation de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

Dédication	i
Remerciement	ii
Notations et Préliminaires	1
Introduction	2
1 Espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$	4
1.1 Espaces de Sobolev $H^1(\Omega), H^m(\Omega)$	4
1.1.1 Densité et injections	6
1.1.2 Théorème de trace	7
1.1.3 L'espace $H_0^1(\Omega)$	7
1.1.4 Equivalence des normes	8
1.2 Approximation polynomiale	10
1.2.1 Polynôme de Taylor et de Sobolev	10
1.2.2 Représentation d'erreur	11
1.2.3 Le potentiel de Riesz	14
1.2.4 Lemme de Deny-Lions	15

1.2.5	Lemme de Bramble-Hilbert	17
2	Eléments finis en 2D	19
2.1	Introduction	19
2.2	Eléments de Lagrange	20
2.2.1	L'espace polynomial \mathbb{P}_1	20
2.2.2	L'espace polynomial \mathbb{P}_2	23
2.2.3	L'espace polynomial \mathbb{P}_k	23
2.3	Maillages	25
2.3.1	Maillages réguliers	26
2.4	Intérpolation	28
2.4.1	Interpolé de Lagrange	28
2.5	Inégalités inverses	29
3	Interpolé de Clément	31
3.1	Introduction	31
3.2	Notations et définitions	32
3.3	Propriétés	32
4	Estimation d'erreur a posteriori	37
4.1	Cadre générale	37
4.2	Premier Exemple	39
4.3	Deuxième exemple	43
4.4	Troisième exemple	52
	Conclusion	58

NOTATIONS

- $\nabla v = \text{grad}(v) = \begin{pmatrix} \partial_x v \\ \partial_y v \end{pmatrix}$: Le gradient d'un vecteur v .
- $D^2 v = \nabla^2 v = \begin{pmatrix} \partial_x^2 v & \partial_{yx} v \\ \partial_{xy} v & \partial_y^2 v \end{pmatrix}$: La matrice Hessienne
- $D^2 w : D^2 v = \sum_{i,j=1}^2 w_{x_i x_j} v_{x_i x_j}$: Le produit scalaire dans \mathbb{R}^4 .
- $|v|_{2, \omega} = \left(\sum_{\alpha=2} \|D^\alpha v\|_{0, \omega} \right)^{1/2}$.
- $\Delta = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
- $\llbracket v \rrbracket = v_- \mathbf{n}^- + v_+ \mathbf{n}^+$.
- $\{v\} = \frac{\nabla v_- + \nabla v_+}{2}$.
- $\frac{\partial^2 v}{\partial n^2} = n \cdot (\nabla^2 v) n$.
- $\left[\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] = (\nabla v_+ + \nabla v_-) \cdot n$.
- $Osc_2(f) = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^4 \|f - f_T\|_{L_2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

INTRODUCTION

Les origines de la méthode des éléments finis remontent aux années 1950 lorsque des ingénieurs l'utilisèrent afin de simuler des problèmes de mécanique des milieux continus déformables [10]. Depuis, le champ d'applications s'est considérablement étendu et les fondements théoriques de la méthode se sont amplement consolidés. Il existe de nos jours un nombre important de logiciels commerciaux et académiques qui utilisent la méthode des éléments finis comme un outil de simulation robuste pour des problèmes de mécanique des milieux continus, de mécanique des fluides, de thermique, d'électromagnétisme ou de finance, pour ne citer que quelques exemples. L'idée de la MEF [10][3][4][11] est de décomposer (on dit discrétiser) le domaine Ω en un certain nombre de sous-domaines (les éléments). Les éléments recouvriront l'intégralité du domaine et sans chevauchement entre eux. De plus, on va chercher la fonction solution u comme étant interpolée par des «bouts» de solutions définis sur chaque élément.

Le problème étant interpolé sur les éléments, on se doute que le nombre d'éléments va jouer sur la qualité de cette approximation de la solution. On se doute également que, comme on résout un problème comportant des dérivées, c'est plutôt dans les endroits où la solution va varier vite qu'il sera nécessaire de «resserrer» le maillage.

L'approximation par MEF conformes de plusieurs problèmes mathématiques a été utilisée par plusieurs chercheurs, mais l'estimation d'erreur dans ces méthodes est basée sur l'exis-

tence est la continuité de l'interpolé de la solution exacte, mais l'interpolé de la solution n'est pas toujours bien défini par exemple la solution en $2D$ de problème,

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Où Ω est un polygonal, est seulement dans l'espace H^1 les éléments de cet espace en $2D$ peut être non bornées comme il montre l'exemple suivant :

Soit Ω la boule ouverte $B(0, 1/2)$,

$$u(x) = \log |\log |x||$$

Alors u est dans $H^1(B(0, 1/2))$, mais u n'est pas bornée au voisinage de 0. Donc on ne peut pas définir l'interpolé de Lagrange de cette fonction. Et dans ce cas, nous devons trouver un autre dinterpolé pour le fonctions peu régulière, Dans ce mémoire, nous allons étudier, L'interpolé de Clément [6][13] et son importance dans l'estimation d'erreur a posteriori [2][7].

Dans ce mémoire nous suivons le plan suivant : Dans le premier chapitre, nous rappelons quelque rappels sur les espace de Sobolov . Puis au deuxième chapitre, nous introduisons la notion des élément fini de Lagrange et la définition de l'interpolé de Lagrange. Au troisième chapitre nous donnons la définition et les propriétés de l'interpolé de Clément. En fin nous abordons la définition et des exemples sur estimation d'erreur a posteriori.

ESPACES DE SOBOLEV $H^m(\Omega)$

1.1 ESPACES DE SOBOLEV $H^1(\Omega), H^m(\Omega)$

On adoptera dans ce qui suit les notations suivantes :

Ω désignera un ouvert borné de \mathbb{R}^2 , $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions définies sur Ω

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \alpha_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2$$

un multi-indice et on notera

$$D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Définition 1.1.1 On note $H^1(\Omega)$ l'ensemble des éléments qui satisfont :

$$\left\{ u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2 \right\} \quad (1.1)$$

Plus généralement on introduit les espaces suivants :

Définition 1.1.2 Pour $m \in \mathbb{N}$

$$H^m(\Omega) = \{ u \in \mathcal{D}'(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega) \quad |\alpha| \leq m \} \quad (1.2)$$

Alors pour $m = 0$ on a $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ et pour $m = 1$ on retrouve l'espace introduit dans la définition (1.1.1).

On munit $H^m(\Omega)$ du produit scalaire[9][5]

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^{\alpha} u D^{\alpha} v \, dx. \quad (1.3)$$

La norme associée à ce produit scalaire

$$\|u\|_{m, \Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^2 \right)^{1/2}. \quad (1.4)$$

Proposition 1.1.3 [5]

- i) Si $m \geq m'$, $H^m(\Omega)$ est contenu, avec injection continue, dans $H^{m'}(\Omega)$.
- ii) $H^m(\Omega)$ munit du produit scalaire (1.3) est un espace de Hilbert.

Preuve. La partie (i) est évidente, car si $m \geq m'$,

$$\|u\|_{m', \Omega} \leq \|u\|_{m, \Omega}.$$

Pour prouver la partie ii) Nous rappelons tous d'abord que les espaces L^p se sont des espaces complet (voir cours du troisième année), et pour démontrer (ii) il suffit de montrer que $H^m(\Omega)$ est complet pour la norme $\|u\|_{m, \Omega}$. Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $H^m(\Omega)$. Alors

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u, & \text{in } L^2 \\ D^{\alpha} u_n &\rightarrow w^j, & \text{in } L^2 \end{aligned}$$

ensuite nous utilisons la définition de la dérivée faible, on trouve que $D^{\alpha} u = w^j$. ■

1.1.1 Densité et injections

Théorème 1.1.4 [5] *Pour $d \geq 2$, l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ est continue pour tout nombre réel p qui satisfait à la fois $1 \leq p < \infty$ et $p \leq p_0$, ou p_0 vérifie $\frac{1}{p_0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{d}$ et cette injection est compacte pour tout $p < p_0$. Pour $d \geq 1$, l'injection de $H^m(\Omega)$ dans $C^n(\bar{\Omega})$ est continue pour tout n et m , tels que $\frac{1}{2} < \frac{m-n}{d}$.*

Preuve. voit ([12]) ■

Théorème 1.1.5 *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 de frontière Lipschitzienne et soit m et k deux entiers satisfaisant $k - m > 1$. Alors il existe une constante C tel que pour tout $u \in H^k(\Omega)$ nous avons :*

$$\|D^m u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|u\|_{k,\Omega} \quad (1.5)$$

De plus, il existe une fonction de classe C^m égale presque partout à u dans l'espace $L^2(\Omega)$.

1.1.2 Théorème de trace

Supposons que le domaine Ω est suffisamment régulier (de classe C^1 , par exemple), alors on définit l'opérateur de trace γ_0 par

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) &\rightarrow L^2(\partial\Omega) \cap C^0(\bar{\partial\Omega}) \\ u &\mapsto \gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Théorème 1.1.6 *L'application linéaire γ_0 définie par (1.6) se prolonge par continuité à une application linéaire et continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, i.e., il existe une constant c tel que :*

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c \|u\|_{1,\Omega}, \forall u \in H^1(\Omega). \quad (1.7)$$

Preuve. Pour simplifier, nous démontrons le résultat pour le cas :

$$\Omega = \mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$$

$$|v(x, 0)|^2 = -2 \int_0^\infty v(x, y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} dy$$

En utilise l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$, on obtient :

$$|v(x, 0)|^2 \leq \int_0^\infty (|v(x, y)|^2 + \left| \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right|^2) dy$$

Nous intégrons par rapport à x on obtient ainsi,

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (1.8)$$

■

1.1.3 L'espace $H_0^1(\Omega)$

On définit l'espace $H_0^1(\Omega)$ comme le noyau de γ_0 , i.e.,

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

Théorème 1.1.7 *$\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, i.e., $\overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,\Omega}} = H_0^1(\Omega)$.*

Preuve. Voit ([5][1]) . ■

1.1.4 Equivalence des normes

Lemme 1.1.8 [5] (Poincaré). Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d . Alors, il existe une constante strictement positive C ne dépendant que de Ω et telle que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^2} \leq C \|\nabla v\|_{L^2}. \quad (1.9)$$

Preuve. Nous démontrons l'inégalité (1.9) pour les éléments de $C_0^\infty(\Omega)$. Soit a, b deux réels tels que $\Omega \subset]a, b[\times]a, b[$. Alors

$$u(x) = \int_a^{x_1} \frac{\partial u(t, x_2)}{\partial t} dt.$$

Donc,

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &\leq \int_a^{x_1} \left| \frac{\partial u(t, x_2)}{\partial t} \right|^2 dt \\ &\leq \int_a^b |\nabla(u)|_{L^2}^2 \\ &\leq (b-a)^{1/2} \|\nabla(u)\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Ce qui implique que,

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq C \|\nabla(u)\|_{L^2}^2.$$

Par argument de densité le résultat reste vrai pour les éléments de $H_0^1(\Omega)$. En effet, si $u \in H_0^1(\Omega)$ il existe $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_n - u|^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla(u_n - u)|^2 = 0 \quad (1.10)$$

Ce qui implique,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_n|^2 = \int_{\Omega} |u|^2 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2$$

Puisque,

$$\int_{\Omega} |u_n(x)|^2 dx \leq C \|\nabla(u_n)\|_{L^2}^2 \implies \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq C \|\nabla(u)\|_{L^2}^2.$$

■

Lemme 1.1.9 (*L'inégalité de Poincaré-Wirtinger*)[10] soit Ω un ouvert borné régulier , il existe un constante C_Ω ne dépendant que de Ω telle que pour tout fonction $f \in H^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} |f - m(f)|^2 \leq C_\Omega \int_{\Omega} |\nabla f|^2 dx \quad (1.11)$$

ou $m(f)$ est la moyenne de f sur Ω

Preuve. Voit ([4]) ■

Théorème 1.1.10 (*Analogie du Théorème de Bolzano-Weierstrass*) De toute suite bornée dans $H^1(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement dans $H^1(\Omega)$.

Remarque 1.1.11 Si Ω est lipschitzien, $(H^1(\Omega))'$ est différent de $H^{-1}(\Omega)$ et ne s'identifie pas à un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Exemple, l'application $v \mapsto \int_{\partial\Omega} v d\sigma$ est dans $(H^1(\Omega))'$, mais est nulle sur $\mathcal{D}(\Omega)$, alors que ce n'est évidemment pas l'application nulle. On dit que $(H^1(\Omega))'$ n'est pas un espace de distributions. Par contre, si $\Omega = \mathbb{R}^d$, alors $(H^1(\mathbb{R}^d))' = H^{-1}(\mathbb{R}^d)$.

Preuve. Voit ([12]) ■

1.2 APPROXIMATION DANS LES ESPACES DE SOBOLEV

Nous dans que cette section est basée essentiellement sur la référence [4]

Dans cette section nous nous intéressons à la construction du polynôme analogue à celui de Taylor (qui est défini pour des fonctions de classe C^k), mais pour les fonctions qui appartiennent à des espaces de Sobolev.

1.2.1 Polynôme de Taylor et de Sobolev

Nous commençons par la définition du polynôme de Taylor. Soit $u \in C^{m-1}(\mathbb{R}^N)$.

Définition 1.2.1 [4] *Le polynôme de Taylor d'ordre m évalué au point y est donné par*

$$T_y^m u(x) = \sum_{|\alpha| < m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(y) (x - y)^\alpha, \quad (1.12)$$

telle que $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$, $x^\alpha = \prod_{i=1}^2 x_i^{\alpha_i}$, $\alpha! = \prod_{i=1}^2 \alpha_i!$ et $|\alpha| = \sum_{i=1}^2 \alpha_i$

Définition 1.2.2 (Fonction de troncature) *On appelle fonction de troncature toute fonctions qui satisfait les proprieter*

1. $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$
2. $\int_{\mathbb{R}^N} \phi dx = 1$

L'exemple suivant montre l'existence de fonctions de troncature. Soit la fonction

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-(1/(1-\|x\|^2))} & \text{si } \|x\| \leq 1 \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

et soit

$$c = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi dx.$$

Alors la fonction $\phi = \frac{\varphi}{c}$ est une fonction de troncature.

Définition 1.2.3 Soit $u \in H^{m-1}(\Omega)$, $B \subset\subset \Omega$, $m \geq 1$. Le polynôme de Sobolev d'ordre m évalué au point x est donné par

$$Q^m u(x) = \int_B T_y^m u(x) \phi(y) dy. \quad (1.13)$$

Proposition 1.2.4 pour tout α telle que $|\alpha| \leq m - 1$

$$D_x^\alpha T_y^m u(x) = T_y^{m-|\alpha|} D_x^\alpha u(x) \quad \forall u \in C^{|\alpha|}(\Omega) \quad (1.14)$$

Dans cas générale, si la fonction u est dans l'espace soboleve, $D^\alpha u$ est dan sens généralise. Donc on défini le polynôme de fonction

Définition 1.2.5 Soit $u \in H^{m-1}(\Omega)$, $B \subset\subset \Omega$, $m \geq 1$

$$Q^m u(x) = \int_B T_y^m u(x) \phi(y) dy. \quad (1.15)$$

Proposition 1.2.6 pour tout α telle que $|\alpha| \leq m - 1$

$$D_x^\alpha Q_y^m u(x) = Q_y^{m-|\alpha|} D_x^\alpha u(x) \quad \forall u \in C^{|\alpha|}(\Omega) \quad (1.16)$$

Preuve. si $u \in C^\infty(\Omega)$, alors

$$\begin{aligned} D_x^\alpha Q_y^m u(x) &= \int_B D_x^\alpha T_y^m u(x) \phi(x) dy \\ &= \int_B T_y^{m-|\alpha|} D_x^\alpha u(x) \phi(x) dy \\ &= Q_y^{m-|\alpha|} D_x^\alpha u(x). \end{aligned}$$

■

1.2.2 Représentation d'erreur

Pour $f \in C^m([0, 1])$, on a

$$f(1) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) + m \int_0^1 \frac{1}{m!} s^{m-1} f^{(m)}(1-s) ds$$

soit $u \in C^m$. Pour $x \in \Omega$ et $y \in B$, on définit $f(s) = u(y + s(x - y))$

par des calcul direct on conclu que

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(s) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(y + s(x - y)) (x - y)^\alpha \quad (1.17)$$

Définition 1.2.7 [4] *Le reste d'ordre m est défini par*

$$R^m u(x) = u(x) - Q^m(x) \quad (1.18)$$

Proposition 1.2.8 *Le reste $R^m u(x)$ satisfait :*

$$R^m u(x) = m \sum_{|\alpha|=m} \int_{C_x} k(x, z) D^\alpha u(z) dz \quad (1.19)$$

avec $z = x + s(y - x)$, $k_\alpha(x, z) = (\frac{1}{\alpha!})(x - z)^\alpha k(x, z)$ et

$$|k(x, z)| \leq C \left(1 + \frac{|x - x_0|}{\rho}\right)^n |z - x|^{-n} \quad (1.20)$$

Preuve. Pour $z = x + s(y - x)$, en utilise le changement de variable,

$$dsdy = s^{-n} dsdz$$

Soit $A = \{(z, s) : s \in (0, 1], |(1/s)(z - x) + x - x_0| < \rho\}$

On note

$$(z, s) \in A : \frac{|z - x|}{|x - x_0| + \rho} < s \quad (1.21)$$

alors

$$(x - y)^\alpha = s^{-m}(x - z)^\alpha \text{ si } |\alpha| = m \quad (1.22)$$

a partir de (1.13) et (1.17) on obtient

$$R^m u(x) = \sum_{|\alpha|} \int \int \chi_A(z, s) \phi(x + \frac{(z - x)}{s}) \times \frac{m}{\alpha!} s^{-n-1} (x - z)^\alpha D^\alpha u(z) dsdz. \quad (1.23)$$

Donc,

$$\begin{aligned} R^m u(x) &= m \sum_{|\alpha|=m} \int_{C_x} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(z) (x - z)^\alpha \\ &\quad \times \left[\int_0^1 \phi(x + (1/s)(z - x)) \chi_A(z, s) s^{-n-1} ds \right] dz \\ &= m \sum_{|\alpha|=m} \int_{C_x} k_\alpha(x, z) D^\alpha u(z) dz, \end{aligned}$$

Si on prend

$$k(x, z) = \int_0^1 \phi(x + (1/s)(z - x)) \chi_A(z, s) s^{-n-1} ds$$

et

$$k_\alpha(x, z) = (1/\alpha!)(x - z)^\alpha k(x, z).$$

Il reste de montré l'estimation (1.20) pour $k(x, z)$

Soit $t = |z - x|/(|x - x_0| + \rho)$. Alors

$$\begin{aligned} |k(x, z)| &= \left| \int_0^1 \chi_A(z, s) \phi(x + (1/s)(z - x)) s^{-n-1} ds \right| \\ &\leq \int_t^1 |\phi(x + (1/s)(z - x))| s^{-n-1} ds \quad (\text{d'après (1.21)}) \\ &\leq \|\phi\|_{L^\infty(B)} \frac{s^{-n}}{n} \Big|_t^1 \\ &\leq (1/n) \|\phi\|_{L^\infty(B)} t^{-n} \\ &= (1/n) \|\phi\|_{L^\infty(B)} (\rho + |x - x_0|)^n |z - x|^{-n} \\ &\leq C \rho^{-n} (\rho + |x - x_0|)^n |z - x|^{-n} \\ &= C \left(1 + \frac{1}{\rho} |x - x_0|\right)^n |z - x|^{-n} \end{aligned}$$

■

1.2.3 Le potentiel de Riesz

Lemme 1.2.9 *Soit $f \in L^p(\Omega)$, $m > n/p$.*

Alors,

$$\int_{\Omega} |z - x|^{-n+m} |f(z)| dz \leq C_p d^{m-n/p} \|f\|_{L^p} \quad \forall x \in \Omega \quad (1.24)$$

cette inégalité est aussi valable pour $p = 1$ si $m \geq n$.

Preuve.

1. Supposons d'abord que $1 < p < \infty$ et $m > n/p$.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |x - z|^{-n+m} |f(z)| dz &\leq \left(\int_{\Omega} |x - z|^{(-n+m)q} |f|^q \right)^{1/q} \|f\|_{L^p(\Omega)} \quad (\text{L'inégalité de Hölder's}) \\ &< C \left(\int_0^d r^{(-n+m)q+n-1} dr \right)^{1/q} \|f\|_{L^p(\Omega)} \quad (\text{utilise Les coordonnées polaires}) \\ &= C (d^{(-n+m)q+n})^{1/q} \|f\|_{L^p(\Omega)} \\ &= C d^{m-(n/p)} \|f\|_{L^p(\Omega)} \end{aligned}$$

2. au cas où $p = 1$ and $m \geq n$. Donc,

$$\int_{\Omega} |x - z|^{-n+m} |f(z)| dz \leq \|(x - z)^{-n+m}\|_{L^\infty(\Omega)} \|f\|_{L^1(\Omega)}$$

■

Proposition 1.2.10 *Soit $u \in W_p^m(\Omega)$*

$$\|R^m u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C d^{m-n/p} |u|_{W_p^m(\Omega)}, \quad (1.25)$$

où $1 < p < \infty$ et $m > n/p$, ou $p = 1$ et $m \geq n$.

1.2.4 Lemme de Deny-Lions

Notation : Pour tout entier $k \geq 0$, \mathbb{P}_k est l'espace des polynômes de degré total inférieur ou égal à k . Pour tout entier m , puisque Ω est borné, $\mathbb{P}_k \subset H^m(\Omega)$ et on peut définir l'espace quotient $H^m(\Omega)/\mathbb{P}_k$, qui est un espace de Hilbert pour la norme quotient

$$\|f\|_{H^m(\Omega)/\mathbb{P}_k} = \inf_{p \in \mathbb{P}_k} \|f + p\|_{m,\Omega} \quad (1.26)$$

Lemme 1.2.11 (*Deny-Lions*) *On suppose que Ω est lipshitzien et connexe. Pour tout entier $k \geq 0$, il existe une constante C telle que*

$$\forall v \in H^{k+1}(\Omega)/\mathbb{P}_k, \|v\|_{H^{k+1}(\Omega)/\mathbb{P}_k} \leq C|v|_{k+1,\Omega} \quad (1.27)$$

Preuve.

1. La première des choses est de se débarrasser de la norme quotient dans (1.26). Pour cela, il suffit de construire un représentant convenable de la classe de v . Soit Π l'opérateur de projection orthogonale sur \mathbb{P}_k pour la norme de $L^2(\Omega)$: pour tout $v \in L^1(\Omega)$, $\Pi v \in \mathbb{P}_k$ est défini par

$$\int_{\Omega} (\Pi v - v)q dx = 0, \forall q \in \mathbb{P}_k. \quad (1.28)$$

C'est un système linéaire carré dont la dimension est celle de \mathbb{P}_k . Il admet une solution unique, Πv . De plus, Πv vérifie $\Pi(\Pi v) = \Pi v$ et $\|\Pi v\|_{0,\Omega}$. Alors

$$\|v\|_{H^{k+1}(\Omega)/\mathbb{P}_k} \leq \|v - \Pi v\|_{k+1,\Omega} = (\|v - \Pi v\|_{k,\Omega}^2 + |v|_{k+1,\Omega}^2)^{1/2}. \quad (1.29)$$

Comme $\Pi(v - \Pi v) = 0$, il suffit de montrer qu'il existe une constante D telle que

$$\forall v \in H^{k+1}(\Omega), \text{ telle que } \Pi v = 0, \|v\|_{k,\Omega} \leq D|v|_{k+1,\Omega}^2, \quad (1.30)$$

et on aura (1.2.11) avec $C = (1 + D^2)^{1/2}$.

2. On démontre (1) par l'absurde. si (1) est faux, on peut construire une suite v_n de H^{k+1} telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |v_n|_{k+1, \Omega} = 0 \text{ et } \|v_n\|_{k, \Omega} = 1. \quad (1.31)$$

Comme v_n est bornée dans $H^{k+1}(\Omega)$, grâce à une extension du Théorème (1.1.4), on peut extraire de v_n une sous-suite, encore notée v_n , qui converge faiblement dans $H^{k+1}(\Omega)$ (en fait le théorème (1.1.4) est valable pour des espaces de Banach réflexifs) : il existe v dans $H^{k+1}(\Omega)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v \text{ faiblement dans } H^{k+1}(\Omega). \quad (1.32)$$

Mais $\Pi v_n = 0$, i.e. $\int_{\Omega} v_n q dx = 0$ pour tout p dans \mathbb{P}_k . Donc, en passant à la limite faible dans cette égalité, on a $\int_{\Omega} v q dx = 0$ pour tout q dans \mathbb{P}_k , ce qui veut dire que $\Pi v = 0$.

D'autre part

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \partial^{k+1} v_n \text{ dans } L^2(\Omega). \quad (1.33)$$

Mais $\partial^{k+1} v_n$ converge faiblement vers $\partial^{k+1} v$ dans $L^2(\Omega)$. L'unicité de la limite entraîne que $\partial^{k+1} v = 0$. Alors (grâce à un résultat difficile), ceci entraîne que $v \in \mathbb{P}_k$. Donc $\Pi v = v$, et comme $\Pi v = 0$, ceci entraîne $v = 0$.

Enfin, comme l'injection de $H^{k+1}(\Omega)$ dans $H^k(\Omega)$ est compacte (ce qui est une extension facile de Théorème (1.1.1)), quitte à extraire une sous-suite, v_n converge vers $v = 0$ dans $H^k(\Omega)$. Ceci contredit le fait que $\|v_n\|_{k, \Omega} = 1$.

remarques sur les hypothèses : La contradiction ne s'obtient qu'à la fin, quand on se sert de la compacité de l'injection. Si on n'a pas cette compacité, on ne peut rien conclure. Cette injection est fautive si Ω n'est pas borné et l'énoncé du théorème est faux dans ce cas car aucun polynôme de \mathbb{P}_k n'appartient à $L^2(\Omega)$.

La connexité de Ω permet de conclure que si $\partial^{k+1} v = 0$ alors $v \in \mathbb{P}_k$. Si Ω n'est pas connexe, les polynômes ne sont pas les mêmes dans chaque composante connexe de Ω et l'énoncé du théorème est faux. ■

1.2.5 Lemme de Bramble-Hilbert

Lemme 1.2.12 (*Bramble-Hilbert*)

$$|v - Q^m v|_{W_p^k(\Omega)} \leq C d^{m-k} |v|_{W_p^m(\Omega)} \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (1.34)$$

Où $d = \text{diam}(\Omega)$.

Preuve.

1. On suppose $\text{diam}(\Omega) = 1$. Alors pour tout $u \in C^m(\Omega) \cap W_p^m(\Omega)$, on a

$$|v - Q^m v|_{W_p^k(\Omega)} \leq C |v|_{W_p^m(\Omega)} \quad \forall k = 0, 1, \dots, m \quad (1.35)$$

Pour $k = m$, $|u - Q^m u|_{W_m^k(\Omega)} = |u|_{W_m^k(\Omega)}$.

Pour $k = 0$,

$$\begin{aligned} \|u - Q^m u\|_{L^p(\Omega)} &= \|R^m u\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq m \sum_{|\alpha|=m} \left\| \int_{\Omega} K_{\alpha}(x, z) D^{\alpha} u(z) dz \right\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq c(1 + 1/\rho)^n \sum_{|\alpha|=m} \left\| \int_{\Omega} |x + z|^{-n+m} D^{\alpha} u(z) dz \right\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq |u|_{W_p^m(\Omega)} \end{aligned}$$

Pour $0 \leq k \leq m$,

$$\begin{aligned} |u - Q^m u|_{W_p^m(\Omega)} &= |R^m u|_{W_p^m(\Omega)} \\ &\leq \left(\sum_{|\alpha|=k} \|R^{m-k} D^{\alpha} u\|_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} \\ &\leq C \left(\sum_{|\alpha|=k} |D^{\alpha} u|_{W_p^{m-k}(\Omega)} \right)^{1/p} \\ &\leq C |u|_{W_p^m(\Omega)}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

2. Pour un domaine général Ω , définie

$$\hat{\Omega} = \{\hat{x} = (1/d)x ; x \in \Omega\}$$

Soit $u \in W_p^m(\Omega)$ et $\hat{u} \in W_p^m(\hat{\Omega})$ où $\hat{u}(\hat{x}) = u(d\hat{x})$

Par un changement des variables, nous avons

$$|\hat{u}|_{W_p^m(\hat{\Omega})} = d^{m-n/p} |u|_{W_p^m(\Omega)} \quad \forall 0 \leq k \leq m.$$

Soit $\hat{Q}^m \hat{u}(\hat{x}) = Q^m \hat{u}(x) = Q^m u(d\hat{x})$ Alors

$$\begin{aligned} |\hat{u} - \hat{Q}^m \hat{u}|_{W_p^k(\hat{\Omega})} &\leq C |\hat{u}|_{W_p^m(\hat{\Omega})} \\ &= C d^{m-n/p} |u|_{W_p^m(\Omega)} \end{aligned} \quad (1.37)$$

D'autre part

$$\begin{aligned} |\hat{u} - \hat{Q}^m \hat{u}|_{W_p^k(\hat{\Omega})} &= |\hat{u} - Q^m \hat{u}|_{W_p^k(\hat{\Omega})} \\ &= d^{k-n/p} |u - Q^m u|_{W_p^k(\Omega)} \end{aligned} \quad (1.38)$$

D'après (1.37) et (1.38), on obtient

$$|u - Q^m u|_{W_p^k(\Omega)} \leq C d^{m-k} |u|_{W_p^m(\Omega)} \quad \forall 0 \leq k \leq m$$

■

ÉLÉMENTS FINIS EN 2D

2.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons rappeler certains concepts de la méthode des éléments finis en 2D [8][10] et d'étudier les éléments finis de Lagrange, et donner la définition et les propriétés de l'interpolé de Lagrange [8] et son importance dans l'estimation d'erreur pour la méthode des éléments finis.

Ce chapitre est organisé comme suit. On donne d'abord une définition générale d'un élément fini de Lagrange. On présente ensuite les exemples classiques des éléments finis de Lagrange. On donne la définition de maillages régulier. En fin on définit l'interpolé de Lagrange et l'estimation d'erreur.

Définition 2.1.1 *Un élément fini est la donnée d'un triplet $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ tel que :*

- \hat{T} est une partie compacte, connexe, d'intérieur non vide de \mathbb{R}^2 .
- \hat{P} un espace vectoriel de fonctions définies sur \hat{T} .
- $\hat{\Sigma}$ est un ensemble de n_f formes linéaires $(\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_{n_f})$ agissant sur les fonctions de \hat{P} telle que l'application :

$$\hat{p} \mapsto (\hat{\sigma}_1(\hat{p}), \dots, \hat{\sigma}_{n_f}(\hat{p}))$$

soit un isomorphisme.

Les formes linéaires $(\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_{n_f})$ sont appelées degrés de liberté locaux.

2.2 ELÉMENT FINI DE LAGRANGE EN 2D

Définition 2.2.1 *Soit $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ un élément fini. S'il existe une famille de points $(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{n_f})$ de \hat{T} tel que pour tout $\hat{p} \in \hat{P}$, $\hat{\sigma}_i(\hat{p}) = \hat{p}(\hat{a}_i)$, $1 \leq i \leq n_f$, on dit que $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ est un élément fini de Lagrange. Les points $(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{n_f})$ sont appelés nœuds de \hat{T} .*

2.2.1 L'espace polynomial \mathbb{P}_1

En deux dimensions d'espace, on pose

$$\mathbb{P}_1 = \{p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; p(x, y) = \alpha + \beta x + \gamma y; (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3\}. \quad (2.1)$$

\mathbb{P}_1 est un espace vectoriel de dimension 3.

Le résultat suivant joue un rôle clé dans la construction de l'élément fini de Lagrange \mathbb{P}_1 en dimension 2.

Proposition 2.2.2 *Un polynôme $p \in \mathbb{P}_1$ est déterminé de manière univoque par la valeur qu'il prend en trois points non-alignés. De plus, sa restriction à un segment non réduit à un point est déterminée de manière univoque par la valeur qu'il prend aux deux extrémités de ce segment.*

Nous allons maintenant identifier une base naturelle de l'espace V_h^1 en procédant comme dans le cas unidimensionnel. Soit S un sommet intérieur du maillage. Notons ω_S l'ensemble des mailles dont S est un sommet. Pour $T \in \omega_S$, notons $\lambda_{T,s}$ la coordonnée barycentrique de T associée au sommet S et posons

$$\begin{cases} \lambda_{T,s}(x, y) & \text{si } (x, y) \in T \text{ pour } T \in \omega_S \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (2.2)$$

Le support de le graphe d'une fonction φ_S sont illustrés sur la figure Fig. Sur cet exemple, le support de φ_S est constitué de 6 triangles. Par construction, φ_S vaut 1 au sommet intérieur S et s'annule sur tous les autres sommets du maillage. De plus, la restriction d'un polynôme de \mathbb{P}_1 à une face séparant deux triangles adjacents étant déterminée de manière univoque par la valeur que prend ce polynôme aux deux extrémités de cette face, il est clair que $\varphi_S \in C^0(\overline{\Omega})$. Par ailleurs, Soit K^* un triangle fixé de \mathbb{R}^2 , que l'on suppose

non-dégénéré (c'est-à-dire que ses trois sommets ne sont pas alignés). Notons $\{a_1^*, a_2^*, a_3^*\}$ ses sommets. De la proposition 2.2.2, il existe une unique fonction $\lambda_1^* \in \mathbb{P}_1$ telle que

$$\lambda_1^*(a_1^*) = 1, \quad \lambda_1^*(a_2^*) = 0, \quad \lambda_1^*(a_3^*) = 0.$$

De même, il existe une unique fonction $\lambda_2^* \in \mathbb{P}_1$ telle que

$$\lambda_2^*(a_1^*) = 0, \quad \lambda_2^*(a_2^*) = 1, \quad \lambda_2^*(a_3^*) = 0,$$

et une unique fonction $\lambda_3^* \in \mathbb{P}_1$ telle que

$$\lambda_3^*(a_1^*) = 0, \quad \lambda_3^*(a_2^*) = 0, \quad \lambda_3^*(a_3^*) = 1.$$

Définition 2.2.3 *Les fonctions $\{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*\}$ s'appellent les coordonnées barycentriques du triangle K^* .*

Voici quelques propriétés essentielles des coordonnées barycentriques, toutes de vérification relativement immédiate :

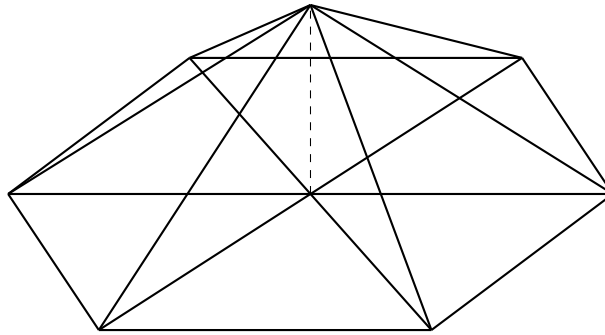
•

$$x = \lambda_1^* x_1 + \lambda_2^* x_2 + \lambda_3^* x_3$$

$$y = \lambda_1^* y_1 + \lambda_2^* y_2 + \lambda_3^* y_3$$

$$1 = \lambda_1^* + \lambda_2^* + \lambda_3^*.$$

- pour tout $x^* \in K^*$ et pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $0 \leq \lambda_i^*(x^*) \leq 1$;
- en notant G^* le barycentre de K^* , on a $\lambda_i^*(G^*) = \frac{1}{3}$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$,

FIGURE 2.1 – Une fonction de base \mathbb{P}_1

2.2.2 L'espace polynomial \mathbb{P}_2

Pour le cas d'éléments \mathbb{P}_2 les noeuds du maillage seront les sommets des triangles et les milieux des cotés des arêtes (voir figure 2.2). Les fonctions de forme θ_i , $i = 1, \dots$, ce sont

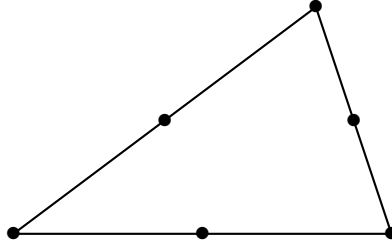


FIGURE 2.2 – Un élément \mathbb{P}_2 .

les restrictions des fonctions de base φ_i dans un élément triangulaire et elles sont définies localement selon la technique de Lagrange :

$$\theta_i(X_j) = \delta_{i,j}, \forall i, j = 1, \dots, N. \quad (2.3)$$

$$\theta_i = \lambda_i(2\lambda_i - 1), \text{ pour } i = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

$$\theta_4 = 4\lambda_1\lambda_2, \quad (2.5)$$

$$\theta_5 = 4\lambda_2\lambda_3, \quad (2.6)$$

$$\theta_6 = 4\lambda_3\lambda_1. \quad (2.7)$$

et

$$\nabla\theta_i = (4\lambda_i - 1)\nabla\lambda_i, \text{ pour } i = 1, 2, 3 \quad (2.8)$$

$$\nabla\theta_4 = 4(\lambda_1\nabla\lambda_2 + \lambda_2\nabla\lambda_1) \quad (2.9)$$

$$\nabla\theta_5 = 4(\lambda_2\nabla\lambda_3 + \lambda_3\nabla\lambda_2) \quad (2.10)$$

$$\nabla\theta_6 = 4(\lambda_3\nabla\lambda_1 + \lambda_1\nabla\lambda_3) \quad (2.11)$$

2.2.3 L'espace polynomial \mathbb{P}_k

Un polynôme de degré k à deux variables a $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ coefficients.

Soit l'espace polynomial \mathbb{P}_k des polynômes en les variables coefficients réels et de degré

global inférieur ou égal à k . On pose

$$\mathbb{P}_k = \{p(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq k} x^i y^j ; \alpha_{ij} \in \mathbb{R}\}. \quad (2.12)$$

Proposition 2.2.4 *Soit \widehat{k} le simplexe unitaire de \mathbb{R}^2 . Posons $\widehat{P} = \mathbb{P}_k$ pour $k \geq 1$. Considérons l'ensemble des noeuds $(\widehat{\alpha}_i)_{1 \leq i \leq n_f}$ de coordonnées $(\frac{i_1}{k}, \frac{i_2}{k})$ avec $0 \leq i_1, i_2 \leq k$ et $i_1 + i_2 \leq k$. Notons $\widehat{\Sigma} = \{\widehat{\sigma}_1, \dots, \widehat{\sigma}_{n_f}\}$ les formes linéaires sur \mathbb{P}_k donnée par $\widehat{\sigma}_i(\widehat{p}) = \widehat{p}(\widehat{\alpha}_i)$. Alors, $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$ est un élément fini de lagrange de degré k*

2.3 MAILLAGES

Définition 2.3.1 *Un maillage ou triangulation est un recouvrement du polygone Ω par des triangles. En notant $\{K_1, \dots, K_{N_e}\}$ ces triangles, on a donc*

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N_e} K_i$$

On dit que la triangulation est admissible si pour tout $i \neq j$, l'ensemble $K_i \cap K_j$ est soit vide, soit réduit à un point qui est un sommet à la fois de K_i et de K_j , soit égal à un segment qui est une arête à la fois de K_i et de K_j .

Par la suite, les triangles K_i sont appelés mailles et les arêtes des triangles sont appelées faces.

Pour tout $1 \leq i \leq N_e$, nous notons h_i le diamètre de la maille K_i (défini comme la plus grande des longueurs des arêtes de K_i) et nous posons

$$h = \max_{1 \leq i \leq N_e} h_i$$

Ce paramètre caractérise la finesse globale du maillage.

Nous notons $\{s_{i,1}, s_{i,2}, s_{i,3}\}$ les trois sommets de la maille K_i . En regroupant tous ces sommets, nous obtenons un ensemble de points de cardinal noté N_s et dont les éléments, appelés sommets du maillage, sont numérotés sous la forme $\{s_1, \dots, s_{N_s}\}$.

2.3.1 Maillages réguliers

Dans la suite, \hat{T} désigne le triangle de référence défini par :

$$\hat{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\} \quad (2.13)$$

Les transformations affines générant le maillage s'expriment sous la forme

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad F_T(\hat{x}) = A_T \hat{x} + b_T, \quad \hat{x} \in \hat{T}. \quad (2.14)$$

Définition 2.3.2 Une famille de maillages \mathcal{T}_h est régulière s'il existe une constante σ_0 telle que

$$\forall h, \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \sigma_T = \frac{h_T}{\rho_T} < \sigma_0 \quad (2.15)$$

Lemme 2.3.3 Supposons (2.14). On a

$$|\det(A_T)| = \frac{|T|}{|\hat{T}|}, \quad \|A_T\| \leq \frac{h_T}{\rho_{\hat{T}}}, \quad \|A_T^{-1}\| \leq \frac{h_{\hat{T}}}{\rho_T}. \quad (2.16)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} |T| &= \int_T dx = \int_{\hat{T}} |\det A_T| d\hat{x} = |\det A_T| \int_{\hat{T}} d\hat{x} = |\det A_T| |\hat{T}| \\ |\det A_T| &= \frac{|T|}{|\hat{T}|} \end{aligned}$$

On utilise la norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne

$$\|A_T\| = \sup_{\hat{x} \neq 0} \frac{\|A_T \hat{x}\|}{\|\hat{x}\|}$$

on pose $\hat{x} = \hat{x}_1 - \hat{x}_2$ et $\|\hat{x}\| = \rho_{\hat{T}}$ ($\rho_{\hat{T}}$ le rayon de boule inscrite dans \hat{T})

$$\begin{aligned} \|A_T\| &= \sup_{\hat{x}=\rho_{\hat{T}}} \frac{\|A_T(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)\|}{\rho_{\hat{T}}} \\ &= \sup_{\hat{x}=\rho_{\hat{T}}} \frac{\|A_T \hat{x}_2 + b_T - A_T \hat{x}_1 - b_T\|}{\rho_{\hat{T}}} \\ &= \sup_{\hat{x}=\rho_{\hat{T}}} \frac{\|F_T(\hat{x}_1) - F_T(\hat{x}_2)\|}{\rho_{\hat{T}}} \\ &= \frac{1}{\rho_{\hat{T}}} \sup_{\hat{x}=\rho_{\hat{T}}} \|x_1 - x_2\| \\ &\leq ch_T \end{aligned}$$

$$\|A_T^{-1}\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A_T^{-1}x\|}{\|x\|}$$

On pose $x = x_1 - x_2$ et $\|x\| = \rho_T$ (ρ_T le rayon de boule inscrite dans T)

$$\begin{aligned} \|A_T^{-1}\| &= \sup_{x=\rho_T} \frac{\|A_T^{-1}(x_1 - x_2)\|}{\rho_T} \\ &= \sup_{x=\rho_T} \frac{\|A_T^{-1}x_2 + b_T - A_T^{-1}x_1 - b_T\|}{\rho_T} \\ &= \sup_{x=\rho_T} \frac{\|F_T(x_1) - F_T(x_2)\|}{\rho_T} \\ &= \frac{1}{\rho_T} \sup_{x=\rho_T} \|x_1 - x_2\| \\ &\leq h_T \frac{1}{\rho_T}. \end{aligned}$$

On à de (2.3.2) $\sigma_T = \frac{h_T}{\rho_T} < \sigma_0$, alors $\frac{1}{\rho_T} < \frac{\sigma_0}{h_T}$.

Donc, on obtien

$$\|A_T^{-1}\| \leq ch_T^{-1}$$

■

2.4 INTERPOLATION

2.4.1 Interpolé de Lagrange

Nous introduisons l'opérateur d'interpolation

$$\tau_h^1 : C^0(\bar{\Omega}) \ni v \mapsto \sum_{i=1}^{N_{s,i}} v(S_i) \varphi_i \in V_h^1. \quad (2.17)$$

$\tau_h^1 v$ est l'unique fonction de V_h^1 prenant la même valeur que la fonction v en tous les sommets intérieurs. Notre objectif est maintenant d'estimer la précision de l'opérateur d'interpolation τ_h^1 . Plus précisément, nous souhaitons obtenir des bornes supérieures pour les quantités $|v - \tau_h^1(v)|_{m,T}$.

Théorème 2.4.1 *Soit $(T, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ un élément fini. Alors il existe une constant c telle que :*

$$\forall T, \forall v \in H^2(T) \quad |v - \tau_h^1(v)|_{m,T} \leq c h_T^{2-m} |v|_{2,T}, \quad 0 \leq m \leq 2 \quad (2.18)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} |v - \tau_h^1(v)|_{m,T} &\leq |v - Q^2 v|_{m,T} + |Q^2 v - \tau_h^1(v)|_{m,T} \\ &\leq |v - Q^2 v|_{m,T} + |Q^2 v - \tau_h^1(v)|_{m,T} \\ &\leq |v - Q^2 v|_{m,T} + |\tau_h^1(Q^2 v - v)|_{m,T} \quad (\tau_h^1(Q^2 v) = Q^2 v \text{ et } \tau_h^1 \text{ est linéaire}) \\ &\leq |v - Q^2 v|_{m,T} + c |Q^2 v - v|_{m,T} \\ &\leq c h_T^{2-m} |v|_{2,T} \quad (\text{D'après 1.2.12}) \end{aligned}$$

■

Théorème 2.4.2 *Soit $(T, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ un élément fini. Alors il existe une constant c telle que :*

1. $\mathbb{P}^k \subset \mathcal{P}$.

2. $\mathcal{N} \subset (C^0)'$.

Alors

$$\forall T, \forall v \in H^{l+1}(T) \quad |v - \tau_h^k(v)|_{m,T} \leq c h_T^{l+1-m} |v|_{l+1,T}, \quad 0 \leq m \leq l+1 \quad (2.19)$$

2.5 INÉGALITÉS INVERSES

Lemme 2.5.1 (Inégalité inverse) $\forall T \in \mathcal{T}_h, \forall v \in \mathcal{P}^k(T)$ il existe une constante C indépendante de h_T tel que

$$\|v\|_{1,T} \leq C \frac{\|v\|_{0,T}}{h_T}. \quad (2.20)$$

Preuve. Pour simplifier supposons que $h_T \leq h \leq 1$.

On passe au triangle de référence \hat{T} défini par

$$\hat{T} := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \text{ et } x_1 + x_2 \leq 1\}.$$

Nous avons pour chaque triangle $T \in \mathcal{T}_h$ du maillage, il exist A_T matrice 2×2 et $b_T \in \mathbb{R}^2$ tels que $T = F_T(\hat{T}_0)$ où F_T est l'application affine définie par $F_T(\hat{x}) = A_T(\hat{x}) + b_T$.

Soit $v \in \mathcal{P}^k(T)$, et on pose $\hat{v}(\hat{x}) = (v \circ F)(\hat{x})$, on utilise le fait que en dimension finie les normes sont équivalentes, on déduit que $\|\hat{v}\|_{1,\hat{T}} \leq C_{\hat{T}} \|\hat{v}\|_{0,\hat{T}}$.

D'autre part on a

$$\begin{aligned} |v|_{1,T}^2 &= \int_T |\nabla_x v|^2 dx \leq \int_{\hat{T}} \|A_T^{-1}\|^2 |\nabla_{\hat{x}} \hat{v}|^2 |det(A_T)| d\hat{x} \quad (\text{puisque } \nabla_x v = A_T^{-1} \nabla_{\hat{x}} \hat{v}) \\ &= \|A_T^{-1}\|^2 |det(A_T)| \|\hat{v}\|_{1,\hat{T}}^2 \leq C \|A_T^{-1}\|^2 |det(A_T)| \|\hat{v}\|_{0,\hat{T}}^2 \\ &\leq C \|A_T^{-1}\|^2 \|v\|_{0,T}^2 \leq C h_T^{-2} \|v\|_{0,T}^2 \quad \text{puisque } \|A_T^{-1}\| \leq \frac{\rho_{\hat{T}}}{h_T}. \end{aligned}$$

■

Lemme 2.5.2 (Inégalité de trace discrète) $\forall T \in \mathcal{T}_h, e \in \partial T$ et $\forall v \in \mathcal{P}^k(T)$ il existe une constante C indépendante de h tel que

$$|e| \left\| \frac{\partial v}{\partial n} \right\|_{0,e}^2 \leq C \|\nabla v\|_{0,T}^2. \quad (2.21)$$

Preuve. Nous passons au triangle de référence \hat{T} . On utilise le fait que les normes sont équivalente en dimension finie donc on

$$\|\partial \hat{v} / \partial n\|_{0,\hat{e}} \leq \|\nabla_{\hat{x}} \hat{v}\|_{0,\hat{T}}$$

On a d'une part

$$\|\partial \hat{v} / \partial n\|_{0,\hat{e}}^2 = |e| \|\partial v / \partial n\|_{0,e}^2$$

d'autre part on a ¹ :

$$\|\nabla_{\hat{x}} \hat{v}\|_{0,\hat{T}}^2 = \frac{\|A_T\|^2}{|\det(A_T)|} \|\nabla_x v\|_{0,T}^2 \sim \|\nabla_x v\|_{0,T}^2.$$

■

¹si le maillage \mathcal{T}_h est régulier, i.e., $\exists \sigma_0$, tel que $\forall T \in \mathcal{T}_h, \frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma_0$

INTERPOLÉ DE CLÉMENT

3.1 INTRODUCTION

IL est bien connu que pour définir l'interpolé de Lagrange d'une fonction, celle ci doit être au moins une fonction continue [9][5]. Donc dans le cas uni-dimensionnel on peut définir l'interpolé d'une fonctions de H^1 . Mais dans le cas bi-dimensionnel les fonctions de l'espace H^1 ne sont pas nécessairement continue, danc l'interpolé de Lagrange dans ce cas est pas défini. Alors dans ce chapitre on défini l'interpolé de Clément, et nous donnons l'estimation d'erreur d'interpolation .

3.2 NOTATIONS ET DÉFINITIONS

Soit Ω un domaine polygonal de \mathbb{R}^2 . Soit $(\mathcal{T}_h)_h$ une fonction famille régulière de Ω . On note \mathcal{N}_h l'ensemble des noeuds du maillage. Pour chaque triangle T du maillage, on note $\mathcal{N}(T)$ l'ensemble de ses sommets. De plus, pour tout noeud $x \in \mathcal{N}_h$ du maillage, on note

$$\omega_x := \bigcup_{x \in \mathcal{N}(T)} T, \quad (3.1)$$

l'union des triangles du maillage dont l'un des sommet est le noeud x .

Définition 3.2.1 Soit $x \in \mathcal{N}_h$. Pour tout $v \in H^1(\Omega)$, on note $\pi_x v \in \mathbb{R}$ la moyenne de v sur l'ouvert V_x . On définit C_h l'opérateur de $H^1(\Omega)$ à valeurs dans V_h par

$$C_h v(x) = \begin{cases} (\pi_x \varphi)(x) & \text{pour tout } x \in \mathcal{N}_h \setminus \Gamma \\ 0 & \text{pour tout } x \in \mathcal{N}_h \cap \Gamma \end{cases} \quad (3.2)$$

3.3 PROPRIÉTÉS

Proposition 3.3.1 pour tout x sommet de maillage, il existe un entier m indépendant de h , on a

$$\text{Card}\{T \in \mathcal{T}_h; T \subset \omega_x\} \leq m \quad (3.3)$$

tel que $m = \lceil 2\pi/\theta_{\min} \rceil + 1$

pour tout sommet x et T triangle du maillage

$$T \in \omega_x \implies \text{diam}(\omega_x) \leq Ch_T \quad (3.4)$$

tel que $C = 2\sigma_0^{m-1}$

Preuve. soit \mathcal{T}_h est un maillage régulière, et θ_i les angles du ω_x telle que la sommet x c'est un tette de cette les engles est borné inférieurement, indépendamment de h , soit θ_{\min}

telle que $0 < \theta_{\min} \leq \theta_i$, soit $d = |\text{Card}\{T \in \mathcal{T}_h; T \subset \omega_x\}|$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^d \theta_i &= 2\pi \\ \theta_{\min} \sum_{i=2}^d &\leq 2\pi \\ d \theta_{\min} &\leq 2\pi \end{aligned}$$

Alors $|\text{Card}\{T \in \mathcal{T}_h; T \subset \omega_x\}| \leq m$ telle que $m = [2\pi/\theta_{\min}] + 1$

\mathcal{T}_h est un maillage régulier alors $\frac{h_T}{h_i} \leq \sigma_0 \leq \infty$, $h = \max_{T \subset \omega_x} h_T$ Alors,

$$\frac{h}{h_T} = \frac{h}{h_{T_1}} \frac{h_{T_1}}{h_{T_2}} \frac{h_{T_2}}{h_{T_3}} \dots \frac{h_{T_{m-1}}}{h_T} \leq \sigma_0^{m-1} \quad (3.5)$$

Donc,

$$h \leq \sigma_0^{m-1} h_T \quad (3.6)$$

Alors,

$$T \subset \omega_x \implies \text{diam}(\omega_x) \leq 2\sigma_0^{m-1} h_T \quad (3.7)$$

■

Proposition 3.3.2 *soit $\hat{\Omega}$ et Ω deux ouverts bornés, réguliers et connexes de \mathbb{R}^2 et F une application continue et bijective de $\hat{\Omega}$ vers Ω , C^1 par morceaux.*

pour tout $\varphi \in H^1(\Omega)$, il existe une constante C ne dépendant que de $\hat{\Omega}$ telle que

$$\|\varphi - |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \frac{\max_{\hat{x} \in \hat{\Omega}} \det(\nabla F(\hat{x}))}{\min_{\hat{x} \in \hat{\Omega}} \det(\nabla F(\hat{x}))} \max_{\hat{x} \in \hat{\Omega}} \|\nabla F(\hat{x})\|^2 \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (3.8)$$

Lemme 3.3.3 *pour tout sommet x du maillage et tout élément $v \in H^1(\omega_x)$ il existe une constante C indépendante de h , on a*

$$\|v - \pi_x v\|_{L^2(\omega_x)} \leq C(\text{diam}(\omega_x)) \|\nabla v\|_{L^2(\omega_x)}. \quad (3.9)$$

Preuve. D'après (3.8) on trouve

$$\|v - \pi_x v\|_{L^2(\omega_x)}^2 \leq C \frac{\max_{\hat{x} \in \hat{\omega}_x} \det(\nabla F(\hat{x}))}{\min_{\hat{x} \in \hat{\omega}_x} \det(\nabla F(\hat{x}))} \max_{\hat{x} \in \hat{\omega}_x} \|\nabla F(\hat{x})\|^2 \|\nabla v\|_{L^2(\omega_x)}^2 \quad (3.10)$$

il existe un $\hat{x}_0 \in \hat{T}_0$ telle que $\max_{\hat{x} \in \hat{\omega}_x} \det(\nabla F(\hat{x})) = |\det(\nabla F(\hat{x}_0))| = \frac{n|T_0|}{n|\hat{T}_0|} = \frac{n|T_0|}{\hat{\omega}_x}$

il existe un $\hat{x}_1 \in \hat{T}_1$ telle que $\min_{\hat{x} \in \hat{\omega}_x} \det(\nabla F(\hat{x})) = |\det(\nabla F(\hat{x}_1))| = \frac{n|T_1|}{n|\hat{T}_1|} = \frac{n|T_1|}{\hat{\omega}_x}$

il existe un $\hat{x}_2 \in \hat{T}_2$ telle que $\max_{\hat{x} \in \hat{\omega}_x} \|\nabla F(\hat{x})\|^2 = \|\nabla F(\hat{x}_2)\|^2 \leq c h^2$

Alors,

$$\|v - \pi_x v\|_{L^2(\omega_x)}^2 \leq C \frac{|T_0|}{|T_1|} (\text{diam}(\omega_x))^2 \|\nabla v\|_{L^2(\omega_x)}^2$$

En fin on trouver

$$\|v - \pi_x v\|_{L^2(\omega)} \leq C' (\text{diam}(\omega_x)) \|\nabla v\|_{L^2(\omega_x)}$$

Telle que $C' = C \frac{|T_0|}{|T_1|}$ ■

Soit \mathcal{T}_h une suite de maillage réguliers de Ω . On note \mathcal{E}_h l'ensemble des arêtes du maillage, Soit ω_T un élément de \mathcal{T}_h qui ont une intersection non vide avec T . Soit e une arête de T et notons ω_e l'ensemble de tous les éléments de \mathcal{T}_h qui ont une intersection non vide avec e .

Où

$$\omega_T = \bigcup_{x \in \mathcal{N}(T)} \omega_x \text{ et } \omega_e = \bigcup_{x \in \mathcal{N}(e)} \omega_x \quad (3.11)$$

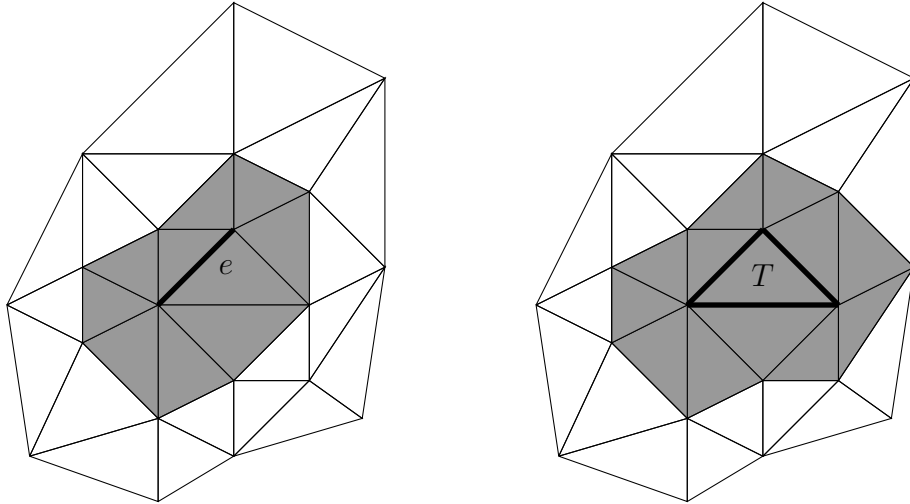


FIGURE 3.1 – L'ensemble ω_e et l'ensemble ω_T

Proposition 3.3.4 [10] pour tout triangle $T \in \mathcal{T}_h$, toute arête $e \in \mathcal{E}_h$, toute fonction $V \in X$ il existe une constante $c > 0$ tels que :

$$\begin{aligned} \|v - \mathcal{C}_h v\|_{0,T} &\leq c h_T \|v\|_{1,\omega_T} \\ \|v - \mathcal{C}_h v\|_{0,e} &\leq c h_e^{1/2} \|v\|_{1,\omega_e} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Preuve.

1. soit $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$(v - C_h v)_T = \sum_{x \in \mathcal{N}(T)} (v - C_h(v)(x)) \lambda_x = \sum_{x \in \mathcal{N}(T)} (v - \pi_x v) \lambda_x \quad (3.13)$$

ainsi,

$$\begin{aligned} \|v - C_h v\|_{(L^2(T))} &\leq \left\| \sum_{x \in \mathcal{N}(T)} (v - C_h(v)(x)) \lambda_x \right\|_{L^2(T)} \\ &\leq \sum_{x \in \mathcal{N}(T)} \|(v - C_h(v)(x))\|_{L^2(T)} \quad (\text{d'après } 0 \leq \lambda_x \leq 1) \\ &\leq \sum_{x \in \mathcal{N}(T)} \|v - \pi_x v\|_{L^2(\omega_x)} \\ &\leq \sum_{x \in \mathcal{N}(T)} (C \text{diam}(\omega_x) \|\nabla v\|_{L^2(\omega_x)}) \quad (\text{d'après (3.12)}) \\ &\leq C_1 h_T \sum_{x \in \mathcal{N}(T)} \|\nabla v\|_{L^2(\omega_T)} \\ &\leq C_1 h_T \sum_{x \in \mathcal{N}(T)} \|v\|_{H^1(\omega_T)} \end{aligned}$$

2. soit e et \hat{e} deux arête telle que

$$\hat{e} = \left\{ \hat{x} = \frac{1}{h_e} x ; x \in e \right\}$$

Où $h_e = |e|$ et $|\hat{e}| = 1$

Donc,

$$\begin{aligned} \|\widehat{v - \pi_x v}\|_{L^2(\hat{e})}^2 &= \int_{\hat{e}} (\widehat{v - \pi_x v})^2 d\hat{x} \\ &= h_e^{-1} \int_e (v - \pi_x v)^2 dx \quad \text{d'après le changement de variable} \\ &= h_e^{-1} \|v - \pi_x v\|_{L^2(e)}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ainsi, d'après l'inégalité de Poincaré-Wirtinger et le changement de variable On obtient,

$$\begin{aligned}
 \|\widehat{v - \pi_x v}\|_{L^2(\hat{e})}^2 &\leq c \|\widehat{\nabla v}\|_{L^2(\hat{e})} \\
 &\leq c \|\nabla v\|_{L^2(e)} \\
 &\leq c \|v\|_{1,\omega_e}.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Alors, d'après (3.14) et (3.15), on obtient

$$h_e^{-1} \|v - \pi_x v\|_{L^2(e)}^2 \leq c \|v\|_{1,\omega_e}^2.$$

En fin trouver,

$$\|v - \pi_x v\|_{L^2(e)} \leq c h_e^{1/2} \|v\|_{1,\omega_e}.$$

■

ESTIMATION D'ERREUR A POSTERIORI

Nous dans que cette partie est basée essentiellement sur la référence [7]

4.1 CADRE GÉNÉRALE

Considérons un problème modèle de la forme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ telle que} \\ a(u, v) = f(v), \forall v \in V, \end{cases} \quad (4.1)$$

où V sont des espace de Hilbert, $f \in V'$ et $a \in \mathcal{L}(V \times V, \mathbb{R})$.

Nous supposons que la forme a satisfait les hypothèses du théorème de Lax-Milgram si bien que ce problème est bien posé. Étant donné un maillage \mathcal{T}_h du domaine Ω et un espace d'approximation $V_h \subset V$, nous considérons le problème approché

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ telle que} \\ a(u_h, v_h) = f(v_h), \forall v_h \in V_h \end{cases} \quad (4.2)$$

que nous supposons bien posé.

Définition 4.1.1 Une fonction $\eta = \eta(h, u_h, f)$ est appelée *erreur a posteriori* si

$$\|u - u_h\|_V \leq \eta(h, u_h, f). \quad (4.3)$$

Si $\eta(h, u_h, f)$ se met sous la forme

$$\eta(h, u_h, f) = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T(u_h, f)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.4)$$

nous dirons que $\eta_T(u_h, f)$ est un *indicateur d'erreur*.

La connaissance d'un indicateur d'erreur permet de mettre en oeuvre une stratégie d'adaptation de maillage. Heuristiquement, si $\eta_T(u_h, f)$ est grand, nous pouvons envisager de diminuer l'erreur en raffinant le maillage, c'est-à-dire en découpant T en élément plus petits, alors que si $\eta_T(u_h, f)$ est très petit, nous pouvons économiser des degrés de liberté en recombinaison T avec ses voisins.

Un point important concerne notamment l'optimalité de l'indicateur d'erreur (ou l'efficacité de l'indicateur) qui garantit que $\eta_T(u_h, f)$ n'est pas une estimation trop pessimiste de l'erreur locale, i.e., que le raffinement du maillage est porté à un niveau de finesse suffisant sans être excessif. Dans ce contexte, nous établirons des inégalités du type :

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad c_1 \eta_T \leq \|u - u_h\|_{V,T} \leq c_2 \eta_T \quad (4.5)$$

où nous avons localisé la norme $\|u - u_h\|_V$ sous la forme

$$\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|u - u_h\|_{V,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.6)$$

Une telle inégalité signifie que l'indicateur d'erreur η_T est équivalent à $\|u - u_h\|_{V,T}$.

4.2 PREMIER EXEMPLE MODÈLE

Dans cette section nous considérons le problème modèle du Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet.

Soit Ω un domaine polygonale de \mathbb{R}^2 . Pour f dans $L^2(\Omega)$.

Nous considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u, v) = \int_{\Omega} f v, \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (4.7)$$

où nous avons posé

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

Afin de donner une portée plus généra aux résultats ci- dessous , nous n'allons pas explicitement la coercitive de la forme bilinéaire a mais uniquement sa propriété de stabilité, i.e, il existe une constant $\alpha > 0$ telle que :

$$\inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{a(u, v)}{\|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}} \geq \alpha. \quad (4.8)$$

Soit $(\mathcal{T}_h)_h$ une famille de maillage régulier de Ω .

Le problème approché s'écrit

$$\begin{cases} \text{trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f v_h, \forall v_h \in V_h \end{cases} \quad (4.9)$$

Nous avons déjà établie l'estimation a priori suivant

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq c \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1,\Omega} \leq c' h \|u - \tau_h^1 u\|_{1,\Omega} \leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|u\|_{2,T}^2 \right)^{1/2} \quad (4.10)$$

L'estimation (4.10) n'entre pas dans le cadre des estimations a posteriori, car l'estimation fait intervenir la quantité $\|u\|_{2,T}$ qui est inconnue.

Pour obtenir une estimation a posteriori, nous revenons à propriété de stabilité (4.12).

Proposition 4.2.1 *On a*

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{\alpha} \|f + \Delta u_h\|_{-1,\Omega}. \quad (4.11)$$

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|_{1,\Omega} &\leq \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{a(u - u_h, v)}{\|v\|_{1,\Omega}} \\ &\leq \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{\langle \Delta(u - u_h), v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}}{\|v\|_{1,\Omega}} \\ &\leq \|f + \Delta u_h\|_{-1,\Omega}. \end{aligned}$$

■

L'estimation (4.11) entre dans le cadre de la définition 4.1, nous venons ainsi de prouver une premier estimation a posteriori. Mais elle n'est pas très intéressante car elle fait intervenir la norme $\|\cdot\|_{-1,\Omega}$ qui est très difficile à valeur en pratique. Toute fois, l'idée de l'intégration par parties est bonne car elle fait disparaître la fonction inconnue u dans le second membre. En fait, nous pouvons éviter la norme $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ en réalisant l'intégration par parties sur chaque élément du maillage. En localisant le calcul ci-dessus, nous allons établir le résultat fondamental suivant.

Théorème 4.2.2 Supposons que la famille \mathcal{T}_h soit régulière. Alors, il existe $c > 0$ telle que

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T(u_h, f) \right)^{\frac{1}{2}},$$

où nous avons introduit l'indicateur d'erreur

$$\eta_T(u_h, f) = h_T \|f + \Delta u_h\|_{0,T} + \sum_{e \in \partial T} |e|^{\frac{1}{2}} \|[\![\partial_n u_h]\!] \|_{0,e}^2.$$

Dans cette formule, e est une arête de T , \mathcal{E}_T^i est l'ensemble des arêtes de T qui ne sont pas sur la frontière de Ω , $|e|$ le diamètre de e et $[\![\partial_n u_h]\!]$ le saut de la dérivée normale de

u_h à travers e .

Preuve. On a la propriété de stabilité, i.e, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :

$$\inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{a(u, v)}{\|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}} \geq \alpha. \quad (4.12)$$

Puisque

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \text{ pour tout } v_h \in V_h$$

l'inégalité de stabilité (4.12) donne

$$\forall v_h \in V_h \quad \|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{\alpha} \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{a(u - u_h, v - v_h)}{\|v\|_{1,\Omega}}$$

nous pouvons développer le numérateur de second membre comme suit

$$\begin{aligned} a(u - u_h, v - v_h) &= \int_{\Omega} (-\Delta u)(v - v_h) - \nabla u_h \cdot \nabla (v - v_h) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int_T (f + \Delta u_h) - \sum_{e \in \mathcal{E}_T^i} \int_e (\partial_n u_h)(v - v_h) \right) \end{aligned}$$

où e désigne une face d'un élément T .

Comme $v - v_h$ est nul sur la bord de Ω , la sommation sur e ne fait intervenir que les faces qui sont communes à deux éléments. Ces faces sont donc des interfaces. Comme $v - v_h$ est continu à travers chaque interface e , il vient :

$$a(u - u_h, v - v_h) \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\|f + \Delta u_h\|_{0,T} \|v - v_h\|_{0,T} + \sum_{e \in \mathcal{E}_T^i} \|[\partial_n u_h]\|_{0,e} \|v - v_h\|_{0,e})$$

où \mathcal{E}_T^i est l'ensemble des faces de T qui ne sont pas sur la frontière. Nous choisissons maintenant $v_h = C_h v$, où C_h est l'opérateur de Clément et en appliquant les estimation de (3.3.4), on obtient

$$\begin{aligned} a(u - u_h, v - v_h) &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (h_T \|f + \Delta u_h\|_{0,T} \|v\|_{0,T} + \sum_{e \in \mathcal{E}_T^i} |e|^{1/2} \|[\partial_n u_h]\|_{0,e} \|v\|_{0,e}) \\ &\leq \|v\|_{1,\Omega} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} (h_T^2 \|f + \Delta u_h\|_{0,T}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_T^i} |e|^1 \|[\partial_n u_h]\|_{0,e}^2) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Alors

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T(u_h, f)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

où

$$\eta_T(u_h, f) = h_T \|f + \Delta u_h\|_{0,T} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_T^i} |e|^{\frac{1}{2}} \|[\![\partial_n u_h]\!] \|_{0,e}^2.$$

■

4.3 DEUXIÈME EXEMPLE : APPROXIMATION DES DONNÉES

Soit Ω un ouvert polygonal borné connexe de \mathbb{R}^2 . On suppose que sa frontière $\Gamma = \partial\Omega$ se décompose en deux parties Γ_D et Γ_N telles que Γ_D soit de mesure non nulle. On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma_N \end{cases} \quad (4.13)$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\Gamma_N)$. L'objet de ce problème consiste à estimer l'erreur effectuée lors du calcul d'une approximation u_h de u par la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 en fonction non pas de la solution u du problème au limite (qui est inconnue) mais des données f , g et Γ ainsi que de la solution u_h du problème discretisé.

soit le problème variationnelle :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in X \text{ tel que} \\ a(u, v) = L(v), \forall v \in X \end{cases} \quad (4.14)$$

où nous avons posé

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

et

$$L(v) = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_N} g v \, ds$$

où

$$X = \{v \in H^1(\Omega); v|_{\Gamma_D} = 0\}$$

Proposition 4.3.1 *Le Problème formulation variationnelle (4.14) admet une solution unique.*

Preuve.

1. L'espace X est un espace de Hilbert.

2. $a(\cdot, \cdot)$ est continue est bilinéaire

$$|a(u, v)| = \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \right| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

3. $L(v)$ est continue est linéaire

$$|L(v)| = \left| \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_N} g v \right| \leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_N)}) \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

4. $a(.,.)$ est coercive

$$a(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \geq c \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Donc, d'après la théorème de Lax-Milgram, cette problème variationnelle admet une solution unique. ■

Proposition 4.3.2 *la solution du problème variationnel (4.14) satisfait :*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_N)}) \quad (4.15)$$

Preuve. Pour tout $v \in X$, on a, $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_N} g v ds$ On supposant $v = u$, d'après la coercivité et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_N)})$$

■

Discretisation par éléments finis

Soit \mathcal{T}_h une suite de maillage réguliers de Ω . On note \mathcal{E}_h l'ensemble des arêtes du maillage et on suppose que toute arête du maillage appartenant au bord du domaine Γ est incluse soit dans Γ_N , soit dans Γ_D . On note $\mathcal{E}_{h,N}$ les arêtes incluses dans Γ_N et $\mathcal{E}_{h,i}$ les arêtes du maillage incluses dans Ω .

$$\mathcal{E}_{h,i} := \{e \in \mathcal{E}_h : e \subset \Omega\},$$

$$\mathcal{E}_{h,N} := \{e \in \mathcal{E}_h : e \subset \Gamma_N\}; \quad \mathcal{E}_{h,D} := \{e \in \mathcal{E}_h : e \subset \Gamma_D\}.$$

On introduit les fonctions $f(h)$ (respectivement $g(h)$), approximations de f (respectivement de g), constantes par morceaux sur chaque triangle T de \mathcal{T}_h (respectivement sur chaque arête de e de $\mathcal{E}_{h,N}$), définis par

$$f(h)(x) := f_T := |T|^{-1} \int_T f(y) dy \text{ pour tout } x \in T \quad (4.16)$$

$$g(h)(x) := g_e := |e|^{-1} \int_e g(y) dy \text{ pour tout } x \in e \quad (4.17)$$

où $|T|$ est l'aire du triangle T et h_e la longueur de l'arête e .

On note $u(h)$ la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u(h) = f(h) & \text{dans } \Omega \\ u(h) = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial u(h)}{\partial n} = g(h) & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases} \quad (4.18)$$

Soit le problème variationnel :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in X \text{ tel que} \\ a(u(h), v) = L(v), \forall v \in X \end{cases} \quad (4.19)$$

où nous avons posé

$$a(u(h), v) = \int_{\Omega} \nabla u(h) \cdot \nabla v \, dx.$$

et

$$L(v) = \int_{\Omega} f(h)v \, dx + \int_{\Gamma_N} g(h)v \, ds$$

où

$$X = \{v \in H^1(\Omega); v|_{\Gamma_D} = 0\}$$

Proposition 4.3.3 *Le problème variationnel (4.19) admet une solution unique.*

Preuve.

1. L'espace X est un espace de Hilbert.
2. $a(.,.)$ est continue est bilinéaire

$$|a(u(h), v)| = \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \right| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

3. $L(v)$ est continue est linéaire

$$|L(v)| = \left| \int_{\Omega} f(h)v + \int_{\Gamma_N} g(h)v \right| \leq (\|f(h)\|_{L^2(\Omega)} + \|g(h)\|_{L^2(\Gamma_N)}) \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

4. $a(.,.)$ est coercive

$$a(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \geq c \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

■

Proposition 4.3.4 *soit u la solution du problème (4.14) et $u(h)$ la solution du problème (4.19), alors il existe une constante c ne dépendant que de Ω et de Γ_D telle que*

$$\|u - u(h)\|_{H^1(\Omega)} \leq c(\|f - f(h)\|_{L^2(\Omega)} + \|g - g(h)\|_{L^2(\Gamma_N)}) \quad (4.20)$$

Preuve. D'après les égalités (4.19 et (4.14), on a

$$\int_{\Omega} \nabla(u - u(h)) \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} (f - f(h))v dx + \int_{\Gamma_N} (g - g(h))v ds$$

On supposant $v = u - u(h)$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Scharz et le théorème de trace que

$$\int_{\Omega} |\nabla(u - u(h))|^2 dx \leq c\|u - u(h)\|_{H^1(\Omega)}(\|f - f(h)\|_{L^2(\Omega)} + \|g - g(h)\|_{L^2(\Gamma_N)})$$

D'après l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\|u - u(h)\|_{H^1(\Omega)} \leq c(\|f - f(h)\|_{L^2(\Omega)} + \|g - g(h)\|_{L^2(\Gamma_N)})$$

■

Proposition 4.3.5 *soit T un triangle du maillage, Alors il existe un constante C indépendante h telle que pour tout fonction $f \in H^1(\Omega)$, on a*

$$\int_T |f - m(f)|^2 \leq Ch_T \int_T |\nabla f|^2 \quad (4.21)$$

on rappelle que h_T est le diamètre T .

soit e une arête du triangle T (T un triangle du maillage), Alors il existe un constante C indépendante de h telle que pour tout fonction $g \in H^1(\Omega)$, on a

$$\int_e |g - m(g)|^2 \leq Ch_e \int_e |\nabla g|^2 \quad (4.22)$$

On rappelons que h_e est la mesure de e .

Preuve.

1. soit \hat{T} est triangle de référence telle que $T = F^{-1}(\hat{T})$ On pose $f = \hat{f} \circ F^{-1}(T)$. On a, $\nabla f = A^{-1}\nabla\hat{f}$ D'après l'inégalité de Poincaré-Wirtinger

$$\int_{\hat{T}} |\hat{f} - m(\hat{f})|^2 d\hat{x} \leq C \int_{\hat{T}} |\nabla\hat{f}|^2 d\hat{x} \quad (4.23)$$

D'après la changement de variable, on obtient

$$\int_T |f - m(f)|^2 |\det A|^{-1} \leq C \int_T |A\nabla f|^2 |\det A|^{-1} dx \quad (4.24)$$

On a $\|A\| \leq h_T$, alors

$$\int_T |f - m(f)|^2 dx \leq Ch_T^2 \int_T |\nabla f|^2 dx \quad (4.25)$$

2. soit \hat{e} est un arête telle que $e = G^{-1}(\hat{e})$ On pose $g = \hat{g} \circ G^{-1}(e)$. On a $\nabla g = A^{-1}\nabla\hat{g}$ D'après l'inégalité de Poincaré-Wirtinger

$$\int_{\hat{e}} |\hat{g} - m(\hat{g})|^2 d\hat{s} \leq C \int_{\hat{e}} |\nabla\hat{g}|^2 d\hat{s} \quad (4.26)$$

D'après la changement de variable, on obtient

$$\int_T |g - m(g)|^2 |\det A|^{-1} \leq C \int_T |A\nabla g|^2 |\det A|^{-1} ds \quad (4.27)$$

On a $\|A\| \leq h_e$, alors

$$\int_e |g - m(g)|^2 ds \leq Ch_e^2 \int_e |\nabla g|^2 ds \quad (4.28)$$

■

Proposition 4.3.6 *soit $f \in H^1(\Omega)$ et $g \in H^1(\Gamma_N)$, $u(h)$ converge vers u lorsque h tend vers 0.*

Preuve. D'après (4.20) On a,

$$\|u - u(h)\|_{H^1(\Omega)} \leq c(\|f - f(h)\|_{L^2(\Omega)} + \|g - g(h)\|_{L^2(\Gamma_N)})$$

On utilise l'estimation de (4.3.5), on obtient

$$\begin{aligned}
\|u - u(h)\|_{H^1(\Omega)} &\leq c(h_T \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)} + h_e \|\nabla g\|_{L^2(\Gamma_N)}) \\
&\leq ch(\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla g\|_{L^2(\Gamma_N)}) \\
&\leq ch \\
&= 0 \quad (h \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

■

On note X_h l'espace de éléments finis \mathbb{P}_1 de \mathcal{T}_h s'annulant sur Γ_D

$$X_h := \{v \in C(\bar{\Omega}) : v|_T \in \mathbb{P}_1 \text{ pour tout triangle } T \in \mathcal{T}_h, v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}. \quad (4.29)$$

soit le probleme approché :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in X_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = L(v_h), \forall v_h \in X_h \end{array} \right. \quad (4.30)$$

où nous avons posé

$$a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx.$$

et

$$L(v_h) = \int_{\Omega} f v_h \, dx + \int_{\Gamma_N} g v_h \, ds$$

Théorème 4.3.7 *Supposons que la famille \mathcal{T}_h soit régulière. Alors, il existe une constante C indépendante de h telle que*

$$\|u(h) - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right)^{1/2}, \quad (4.31)$$

où

$$\eta_T^2 = h_T^2 \|f_T\|_{L^2(T)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,\Omega} \cap \mathcal{E}(T)} h_e \left\| \left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right] \right\|_{L^2(e)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,N} \cap \mathcal{E}(T)} h_e \left\| g_e - \frac{\partial u_h}{\partial n} \right\|_{L^2(e)}^2 \quad (4.32)$$

et $\mathcal{E}(T)$ est l'ensemble des arete du triangle T .

Preuve. soit $v \in X$. On a

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v = \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \nabla u_h \cdot \nabla v \quad (4.33)$$

sur chaque triangle T , u_h est régulier, on peut donc effectuer l'intégration par partie

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \nabla u_h \cdot \nabla v \\ &= - \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \Delta u_h \cdot v + \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_{\partial T} \frac{\partial u_h}{\partial n} \cdot v \\ &= - \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \Delta u_h \cdot v + \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,N}} \int_e \left(\frac{\partial u_h}{\partial n} v \right) + \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,i}} \int_e \left(\frac{\partial u_h}{\partial n} v^+ - \frac{\partial u_h}{\partial n} v^- \right) \end{aligned}$$

où $\Delta u_h = 0$, et on utilise l'égalité $ab - cd = (a + c)(\frac{b-d}{2})(a - c)(\frac{b+d}{2})$. On trouve

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v = \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,N}} \int_e \left(\frac{\partial u_h}{\partial n} v \right) + \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,i}} \int_e \llbracket n_e \cdot \nabla u_h \rrbracket v$$

Ainsi, on a

$$\int_{\Omega} f(h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T f(h) \text{ et } \int_{\Gamma_N} g(h) = \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,N}} \int_e g(h)$$

Alors,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(h)v + \int_{\Gamma_N} g(h)v - \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T f(h)v \\ &+ \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,N}} \int_e (g(h) - n_e \cdot \nabla u_h)v + \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,i}} \int_e \llbracket n_e \cdot \nabla u_h \rrbracket v \end{aligned} \quad (4.34)$$

Ainsi, pour tout $v_h \in X_h$, on a

$$\int_{\Omega} f(h)v_h + \int_{\Gamma_N} g(h)v_h - \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h = 0$$

On utilise la formule de Green, on trouve

$$- \int_{\Omega} f(h)v_h - \int_{\Gamma_N} g(h)v_h - \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,N}} \int_e \left(\frac{\partial u_h}{\partial n} v \right) + \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,i}} \int_e \llbracket n_e \cdot \nabla u_h \rrbracket v_h = 0 \quad (4.35)$$

Alors, d'après l'égalité (4.34) et (4.35), on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(h)v + \int_{\Gamma_N} g(h)v - \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T f(h)(v - v_h) \\ &+ \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,N}} \int_e (g(h) - n_e \cdot \nabla u_h)(v - v_h) \\ &+ \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,i}} \int_e \llbracket n_e \cdot \nabla u_h \rrbracket (v - v_h) \end{aligned} \quad (4.36)$$

Donc, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur (4.36), il vient

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} f(h)v + \int_{\Gamma_N} g(h)v - \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v &\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|f(h)\|_{L^2(T)} \|(v - v_h)\|_{L^2(T)} \right. \\
&+ \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,N}} \|(g(h) - n_e \cdot \nabla u_h)\|_{L^2(e)} \|(v - v_h)\|_{L^2(e)} \\
&+ \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,i}} \|[[n_e \cdot \nabla u_h]]_e\|_{L^2(e)} \|(v - v_h)\|_{L^2(e)} \Big) \quad (4.37)
\end{aligned}$$

On supposant $v_h = C_h(v)$ et d'après les estimations (3.12), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} f(h)v + \int_{\Gamma_N} g(h)v - \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v &\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|f(h)\|_{H^1(\omega_T)} h_T \|v\|_{H^1(\omega_T)} \right. \\
&+ \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,N}} \|(g(h) - n_e \cdot \nabla u_h)\|_{L^2(\omega_e)} h_e^{1/2} \|v\|_{H^1(\omega_e)} \\
&+ \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,i}} \|[[n_e \cdot \nabla u_h]]\|_{H^1(\omega_e)} h_e^{1/2} \|v\|_{H^1(\omega_e)} \Big) \quad (4.38)
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} f(h)v + \int_{\Gamma_N} g(h)v - \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v &\leq C \|v\|_{H^1(\Omega)} \left(h_T^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|f(h)\|_{H^1(\omega_T)}^2 \right. \\
&+ h_e \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,N}} \|(g(h) - n_e \cdot \nabla u_h)\|_{L^2(\omega_e)}^2 \\
&+ h_e \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,i}} \|[[n_e \cdot \nabla u_h]]\|_{H^1(\omega_e)}^2 \Big)^{1/2} \quad (4.39)
\end{aligned}$$

Ainsi, $u(h)$ est un solution de problème (4.19). On a, pour tout $v \in X$, on a

$$-\int_{\Omega} f(h)v - \int_{\Gamma_N} g(h)v + \int_{\Omega} \nabla u(h) \cdot \nabla v = 0$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} (\nabla u(h) - \nabla u_h) \cdot \nabla v &\leq C \|v\|_{H^1(\Omega)} \left(h_T^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|f(h)\|_{H^1(\omega_T)}^2 \right. \\
&+ h_e \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,N}} \|(g(h) - n_e \cdot \nabla u_h)\|_{L^2(\omega_e)}^2 \\
&+ h_e \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,i}} \|[[n_e \cdot \nabla u_h]]\|_{H^1(\omega_e)}^2 \Big)^{1/2} \quad (4.40)
\end{aligned}$$

On supposant $v = u(h) - v_h$ et on appliquant l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned}
\|u(h) - u_h\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq C \|u(h) - u_h\|_{H^1(\Omega)} (h_T^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|f(h)\|_{H^1(\omega_T)}^2 \\
&\quad + h_e \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,N}} \|(g(h) - n_e \cdot \nabla u_h)\|_{L^2(\omega_e)}^2 \\
&\quad + h_e \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,i}} \| [n_e \cdot \nabla u_h] \|_{H^1(\omega_e)}^2)^{1/2}
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Alors,

$$\|u(h) - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right)^{1/2}, \tag{4.42}$$

où

$$\eta_T^2 = h_T^2 \|f_T\|_{L^2(T)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,\Omega} \cap \mathcal{E}(T)} h_e \| [\frac{\partial u_h}{\partial n}] \|_{L^2(e)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,N} \cap \mathcal{E}(T)} h_e \| g_e - \frac{\partial u_h}{\partial n} \|_{L^2(e)}^2 \tag{4.43}$$

et $\mathcal{E}(T)$ est l'ensemble des arete du triangle T . ■

4.4 TROISIÈME EXEMPLE : COEFFICIENTS VARIABLES

Soit Ω un ouvert polygonal borné connexe de \mathbb{R}^2 de frontière $\Gamma = \partial\Omega$. On considère le problème qui consiste à chercher une fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ solution de problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.44)$$

où $f \in L^2(\Omega)$, $A(x) = (a_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq 2}$ une matrice de fonctions. Nous supposons que $A(x) = \alpha(x)I_2$ est coefficients variables Lipschitziens et satisfait la propriété suivante :

$$\lambda_1|\zeta|^2 \leq A(x)\zeta \leq \lambda_2|\zeta|^2, \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^2$$

avec $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \infty$

soit le problème variationnelle :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u, v) = L(v), \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (4.45)$$

où

$$a(u, v) = \int_{\Omega} A(x)\nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

et

$$L(v) = \int_{\Omega} f v \, dx$$

Proposition 4.4.1 *Le problème variationnelle (4.45) est bien posé, et la solution u satisfait l'estimation :*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Preuve. pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution il suffit d'appliquer le théorème de Lax-milgram

1. Le cadre fonctionnel $V = H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.
2. La forme : $a(u, v) = \int_{\Omega} A(x)\nabla u \cdot \nabla v \, dx$ est bilinéaire, et continue, en effet,

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} A(x)\nabla u \cdot \nabla v \, dx \right| \leq \lambda_2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\ &\leq \lambda_2 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

3. La coercivité :

$$a(v, v) \geq \lambda_1 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \geq \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (\text{Poincaré})$$

4. La forme $L(v) = \int_{\Omega} f v dx$ est linéaire et continue grace à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\int_{\Omega} f v dx| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Donc toutes les conditions de Lax-Miligram sont satisfaites, et par conséquent le problème est bien posé.

5. La stabilité : on utilise la solution u comme fonction test dans la formulation variationnelle on obtient :

$$\lambda_1 \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq a(u, u) = \int_{\Omega} f v dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

et donc

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda_1} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

■

Soit \mathcal{T}_h une suite de maillage réguliers de Ω . On note \mathcal{E}_h l'ensemble des arêtes du maillage. On introduit A_h , approximations $A(x)$, constantes par morceaux sur chaque triangle T de \mathcal{T}_h , définies par

$$A_h(x) = |T|^{-1} \int_T A(x) dx \quad \text{pour tout } x \in T$$

où $|T|$ est l'aire de triangle T .

On note V_h l'espace de éléments finis \mathbb{P}_1 de \mathcal{T} s'annulant sur Γ

$$V_h := \{v \in C(\bar{\Omega}) : v|_T \in \mathbb{P}_1 \text{ pour tout triangle } T \in \mathcal{T}_h, v = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

Soit $u_h \in V_h$ la solution du problème variationnel :

$$a_h(u_h, v_h) = \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx = \int_{\Omega} f v_h dx \quad (4.46)$$

pour tout $v_h \in V_h$.

Proposition 4.4.2 *Le problème approché (4.46) admet une solution unique*

Preuve. Si $A(x) = \alpha(x)I$ et donc $A_h(x) = \bar{\alpha}(x)I$ avec

$$\bar{\alpha}(x) = \frac{1}{|T|} \int_T \alpha(y) dy \geq \lambda_1$$

Donc, on obtient

$$\lambda_1 |\zeta|^2 \leq A_h(x)\zeta \leq \lambda_2 |\zeta|^2, \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R}^2$$

et par conséquent la forme a_h sera coercive. les autre condition de Lax-Miligram sont vérifiées. ■

Proposition 4.4.3 *si de plus $u \in H^2(\Omega)$ alors*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1} = 0. \quad (4.47)$$

Preuve.

1. Soit w_h arbitraire dans V_h . On a :

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} &\leq \|u - w_h\|_{H^1(\Omega)} + \|w_h - u_h\|_{H^1(\Omega)}, \quad (\text{l'inégalité triangulaire}) \\ &\leq \|u - w_h\|_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{\lambda_1} \sup_{v_h \in V_h} \frac{a_h(w_h - u_h, v_h)}{\|v_h\|_{H^1(\Omega)}} \quad (\text{la coercivité de } a_h) \\ &= \|u - w_h\|_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{\lambda_1} \sup_{v_h \in V_h} \frac{a_h(w_h - u, v_h) + a_h(u, v_h) - \int_{\Omega} f v \, dx}{\|v_h\|_{H^1(\Omega)}} \\ &\leq \|u - w_h\|_{H^1(\Omega)} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \|u - w_h\|_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{\lambda_1} \sup_{v_h \in V_h} \frac{|a_h(u, v_h) - \int_{\Omega} f v \, dx|}{\|v_h\|_{H^1(\Omega)}} \end{aligned}$$

puisque w_h arbitraire dans V_h donc

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq C \left(\inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|_{H^1} + \sup_{v_h \in V_h} \frac{|\int_{\Omega} f v_h \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{A}_h \nabla u \cdot \nabla v_h \, dx|}{\|v_h\|_{H^1}} \right)$$

$$\text{avec } C = \max\left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_1}\right).$$

2. Pour démontrer (4.47) il suffit d'estimer le terme :

$$\sup_{v_h \in V_h} \frac{|\int_{\Omega} f v_h \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{A}_h \nabla u \cdot \nabla v_h \, dx|}{\|v_h\|_{H^1}}.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\int_{\Omega} f v_h dx - \int_{\Omega} \mathbf{A}_h \nabla u \cdot \nabla v_h dx}{\|v_h\|_{H^1}} \right| &= \left| \frac{\int_{\Omega} \mathbf{A} \nabla u \cdot \nabla v_h dx - \int_{\Omega} \mathbf{A}_h \nabla u \cdot \nabla v_h dx}{\|v_h\|_{H^1}} \right| \\
&= \left| \frac{\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\mathbf{A} - \mathbf{A}_h) \nabla u \cdot \nabla v_h dx}{\|v_h\|_{H^1}} \right| \\
&\leq \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_h\|_{L^2(\Omega)^4} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C h \quad (\text{d'après l'inégalité (1.1.9)}) \quad (4.48)
\end{aligned}$$

3. Il suffit de prendre $w_h = \tau_h^1 u$ l'interpolé de Lagrange.

■

Théorème 4.4.4 *Supposons que la famille \mathcal{T}_h soit régulière. Alors, il existe une constante C indépendante de h telle que*

$$\|u(h) - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right)^{1/2}, \quad (4.49)$$

où

$$\eta_T^2 = h_T^2 \|f + \operatorname{div}(\mathbf{A}_h \nabla u_h)\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{e \in \partial T} |e| \|[\mathbf{A}_h \nabla u_h \cdot n_e]\|_{L^2(e)}^2 + \|(\mathbf{A} - \mathbf{A}_h) \nabla u_h\|_{L^2(T)}^2$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \mathbf{A} \nabla(u - u_h) \cdot \nabla v dx &= \int_{\Omega} f v dx - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{A} \nabla u_h \cdot \nabla v dx \quad (\text{on ajoute et retranche } \mathbf{A}_h) \\
&= \int_{\Omega} f v dx - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\mathbf{A} - \mathbf{A}_h) \nabla u_h \cdot \nabla v dx \\
&\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{A}_h \nabla u_h \cdot \nabla v dx \\
&= \int_{\Omega} f v dx - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\mathbf{A} - \mathbf{A}_h) \nabla u_h \cdot \nabla v dx \\
&\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{A}_h \nabla u_h \cdot \nabla(v - v_h) dx \\
&\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{A}_h \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx \\
&= \int_{\Omega} f(v - v_h) dx - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{A}_h \nabla u_h \cdot \nabla(v - v_h) dx \\
&\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\mathbf{A} - \mathbf{A}_h) \nabla u_h \cdot \nabla v dx \tag{4.50}
\end{aligned}$$

D'après l'intégration par partie et l'égalité

$$ab - cd = (a + c) \left(\frac{b - d}{2} \right) (a - c) \left(\frac{b + d}{2} \right).$$

On trouve

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \mathbf{A} \nabla(u - u_h) \cdot \nabla v dx &= \int_{\Omega} f(v - v_h) dx + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \operatorname{div}(\mathbf{A}_h \nabla u_h)(v - v_h) dx \\
&\quad - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \int_e \llbracket n_e \cdot \mathbf{A}_h \nabla u_h \rrbracket_e (v - v_h) ds \\
&\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\mathbf{A} - \mathbf{A}_h) \nabla u_h \cdot \nabla v dx \tag{4.51}
\end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur la formule (4.51), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \mathbf{A} \nabla(u - u_h) \cdot \nabla v dx &= \|f\|_{L^2(\Omega)} \|(v - v_h)\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\operatorname{div}(\mathbf{A}_h \nabla u_h)\|_{L^2(\Omega)} \|(v - v_h)\|_{L^2(T)} \\
&\quad - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \|\llbracket n_e \cdot \mathbf{A}_h \nabla u_h \rrbracket\|_{L^2(e)} \|(v - v_h)\|_{L^2(e)} \\
&\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|(\mathbf{A} - \mathbf{A}_h) \nabla u_h \cdot \nabla v\|_{L^2(T)} \tag{4.52}
\end{aligned}$$

Il suffit de remarquer que :

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{a(u - u_h, v)}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} \quad (4.53)$$

On utilise la formule (4.54) avec $v_h = \mathcal{C}_h v$ (L'interpolé de Clément).

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{A} \nabla(u - \mathcal{C}_h v) \cdot \nabla v dx &= \|f\|_{L^2(\Omega)} \|(v - \mathcal{C}_h v)\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\operatorname{div}(\mathbf{A}_h \nabla u_h)\|_{L^2(\Omega)} \|(v - \mathcal{C}_h v)\|_{L^2(T)} \\ &\quad - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \|\llbracket n_e \cdot \mathbf{A}_h \nabla u_h \rrbracket\|_{L^2(e)} \|(v - \mathcal{C}_h v)\|_{L^2(e)} \\ &\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|(\mathbf{A} - \mathbf{A}_h) \nabla u_h\|_{L^2(T)} \|\nabla v\|_{L^2(T)} \end{aligned} \quad (4.54)$$

D'après l'estimation (3.12)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{A} \nabla(u - \mathcal{C}_h v) \cdot \nabla v dx &= \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\operatorname{div}(\mathbf{A}_h \nabla u_h)\|_{L^2(T)} h_T \|v\|_{L^2(T)} \\ &\quad - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \|\llbracket n_e \cdot \mathbf{A}_h \nabla u_h \rrbracket\|_{L^2(e)} |e|^{1/2} \|v\|_{L^2(e)} \\ &\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|(\mathbf{A} - \mathbf{A}_h) \nabla u_h\|_{L^2(T)} \|\nabla v\|_{L^2(T)} \end{aligned} \quad (4.55)$$

■ On a l'inégalité (4.53), on utilise l'inégalité de Poincaré on trouver

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right)^{1/2}, \quad (4.56)$$

où

$$\eta_T^2 = h_T^2 \|f + \operatorname{div}(\mathbf{A}_h \nabla u_h)\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{e \in \partial T} |e| \|\llbracket \mathbf{A}_h \nabla u_h \cdot n_e \rrbracket\|_{L^2(e)}^2 + \|(\mathbf{A} - \mathbf{A}_h) \nabla u_h\|_{L^2(T)}^2$$

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons étudié la possibilité de l'interpolation de fonctions peu régulière.

Nous avons constaté que l'interpolé de Clément résout le problème et il fournit un interpolé ayant des propriétés similaires à celle de l'interpolé de Lagrange.

L'utilisation de cet interpolé est indisponible dans l'estimation d'erreur a posteriori pour les problèmes de faible régularité.

Mais, nous avons remarqué, que cet interpolé est inutile pour les problèmes qui font intervenir des inéquation variationnelles, et danc il naturel de se pose la question suivante : Exist-il un interpolé pour les fonctions de H^1 qui preserve la positivité ?.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R.A. Adams and J.J.F. Fournier. Sobolev spaces. *Academic Press*, 2003.
- [2] M. Ainsworth and J.T. Oden. A posteriori error estimation in finite element analysis. *Wiley, Chichester*, 2000.
- [3] A.Quarteroni and A.Valli. numerical approximation of partial differential equations. *Springer*.
- [4] Brenner.S and Scott.R. The mathematical theory of finite element methods. *Springer*, 2007.
- [5] H. Brezis. Analyse fonctionnelle thÉorie et application. *Duno d, Paris*, 1999.
- [6] Ph. Clément. Approximation by finite element functions using local regularization. *M2AN*, 1975.
- [7] Alexandre Ern. Elements finis. *Dunod*, 2005.
- [8] Alexandre Ern and Jean-Luc Guermond. Theory and practice of finite elements (applied mathematical sciences 159). *Springer New York*, 2004.
- [9] F. Demengel et G. Demengel. Espases fonctionnels. *CNRS Éditions, Paris*, 2007.

- [10] Alexandre Ern et Jean-Luc Guermond. Éléments finis : théorie, applications, mise en oeuvre. *Springer*, 2002.
- [11] P.A.Raviart et J.M.Thomas. Introduction a l'analyse numérique aux dérivées partielles. *MASSON*, 1987.
- [12] R.A.Adams. Sobolov space. *Academic Praise*, 1975.
- [13] Verfurth. A review of a posteriori estimation and adaptive meshrefinement techniques. *Wiley-Teubner, New York, Stuttgart*, 1996.

ملخص

في هذا العمل، نعتبر المجال $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ محدود و مصقول من صنف $C^{1,1}$.

هدفنا هو دراسة استقطاب الدوال ضعيفة الصقالة من الفضاء $H^1(\Omega)$ ونستعمل استقطاب "كليمون" في دراستنا و ندرس اهميته وتطبيقاته في تقدير الخطاء في طريقة العناصر المنتهية.

الكلمات المفتاحية: استقطاب، "كليمون"، لاغرانج، فراغ سوبولوف، التحليل الأبوستغيوغيجي.

Résumé

Dans cette memoire on considère le cas un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ borné et régulier de classe $C^{1,1}$.

On s'intéresse à l'interpolation de fonctions peu régulières i.e., de $H^1(\Omega)$ en utilisant l'interpolé de Clément clement et à l'utilisation de cet interpolé dans le contexte des éléments finis pour avoir des estimation d'erreur a posteriori.

Mots Clés: interpolation, Clément, Lagrange, espace de Sobolev, analyse a posteriori.

Abstract

In this work, we consider the case an area bounded $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

We are interested in the interpolation of some regular functions ie, de $H^1(\Omega)$ using the interpolated Clement clement and use of this interpolated in the context of finite elements for the error estimate a posteriori.

Keywords: : interpolation, Clément, Lagrange, space of Sobolev, analyse a posteriori.