

UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Sciences Appliquées

Département de Génie Electrique



Mémoire

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et technologies

Filière : Génie électrique

Spécialité : Matériaux électrotechniques

Présenté par :

HABI SalihaHAFSI Fatima

Thème:

Etude et Calcul de la Force Statique d'un Electroaimant à Noyau Plongeur

Soutenu publiquement

Le :08/06/2015

Devant le jury :

M^rBOUCHALA Tarik

MC (B) Président

UKM Ouargla

M^rBEN ALIA Khaled

MC (B) Encadreur/rapporteur

UKM Ouargla

M^rAYADNour el islam

MA (B) Examineur

UKM Ouargla

Année universitaire 2014/2015

Dédicace



*Je dédie cemémoire avant tout a mes parents Ahmad
etHalima qui n'ont épargné aucun*

Effort pour que je réussisse et que j'arrive a ce niveau

A mes frères : Ammar,Lazhar,Hamza

A ma sœur : Samira, Khadija

Comment je la dédie aussi a mon mari :Nouhet a toute sa famille

Sans oublier mes oncles : Abdkhader,Tahar

Viennent ensuite mes meilleures amies et collègues de travaille

Salîha, Mariam

Je remercie tout mes professeurs qui m'ont aidé durant mes études universitaires

En fin je dédie ce travail a toute la famille

Hafsi,Bentuiired,Siboukeur

2015

fatîma



Dédicace
Dédicace



*Je dédie ce mémoire avant tout a mes parents Tahar et
Salima et Ahmed qui n'ont épargné aucun
Effort pour que je réussisse et que j'arrive a ce niveau
A mesfrères :Mouhamad,Medhafain,Medayoub,Medbalkhir*

A ma sœur : Meriem, Rtaje

Comment je la dédie aussi a mes grands-parents :Jaloul ,Charife,Oumalkhir

Sans oublier mes oncles

*Viennent ensuite mes meilleures amies et collègues de travaille Safa ,Hana
,Faiza ,Wasila ,Rawda ,Fatima ,Aziza ,Nassira,Amal ,Sara,Djihad*

Je remercie tout mes professeurs qui m'ont aidé durant mes études universitaires

En fin je dédie ce travail a toute la famille

Habi , Babi



2015

Salima

Remerciements

Avant de présenter ce travail, nous tenons à remercier Dieu tout puissant, de nous avoir permis d'arriver à ce niveau d'étude, et aussi pour nous avoir donné beaucoup de patience et de courage sans oublier nos parents qui n'ont lésiné sur aucun problème pour nous apporter toute l'aide nécessaire pour atteindre ce niveau qui nous permettra d'assurer notre avenir.

A travers cette modeste thèse nous tenons à présenter nos sincères remerciements et notre Profonde reconnaissance à notre aimable encadreur

Dr.Khaled Ben Alia pour son encadrement, pour sa contribution, sa patience et son aide tout au long de ce travail.

Nos plus vifs remerciements s'adressent également aux membres de jury qui nous ont honorés en acceptant d'évaluer ce travail :

M^r Tarik Bouchaala

M^r A.Nour el islamAyad

Merci à tous ceux et celles qui ont contribués de près ou de loin dans l'accomplissement de ce travail.

Sommaire

Introduction Générale

Chapitre I : Généralité sur les électroaimants

I.1	Introduction	3
I.1.1	Définition des électro-aimants	3
I.1.2	Genre des électro-aimants	3
I.2	Constitution d'un électro-aimant	4
I.3	Fonctionnement d'un électro-aimant	4
I.4	Principe de l'électro-aimant	6
I.5	Caractéristiques physiques des électroaimants	7
I.5.1	Caractéristique géométrique	7
I.5.2	Caractéristiques électriques	7
I.5.3	Caractéristiques mécaniques	7
I.6	Conclusion	8

Chapitre II : Formulation Mathématique en électromagnétisme

II.1	Introduction	8
II.2	Les modèles mathématiques en électromagnétisme	9
II.2.1	Equations générales de MAXWELL	9
II.2.2	Interprétation physique des équations électromagnétiques	10
II.2.2.1	Equation de couplage électromagnétique	11
II.2.2.2	Les équations de conservation	12
II. 2.3	Loi de comportement des matériaux (milieu physique)	12
II.3	Formulation des équations électromagnétiques	12
II. 3.1	Le modèle électrostatique	13
II. 3.2	Le modèle électrocinétique	8
II. 3.3	Le modèle magnétostatique	9
II.3.3.1	Le modèle magnétostatique scalaire	9
II.3.3.2	Le modèle magnétostatique vectoriel	9
II. 3.4	Le modèle magnétodynamique	10
II.4	Formulation de l'équation magnétodynamique	10
II.5	Méthodes de calcul de la force	12

II. 5.1	Méthode de variation de la co-énergie et de l'énergie magnétiques Principe de la méthode	12
II. 5.2	La méthode basée sur la force de Lorentz	13
II. 5.3	Méthode du tenseur de Maxwell	14
II .6	Conclusion	15

Chapitre III : Résolution des équations électromagnétique par la méthode des volumes

finis

III.1	Introduction	16
III.2	Différentes techniques de résolution des équations aux dérivées partielles	16
III.2.1	Méthode des différences finis (M.D.F)	16
III.2.2	Méthode des éléments finis (M.E.F)	18
III.2.3	Méthode des intégrales de frontières (M.I.F)	19
III.2.4	Méthode des volumes finis (MVF)	19
III.3	L'équation magnétodynamique d'un système cylindrique axisymétrique	20
III.4	Principe de la méthode des volumes finis	21
III.5	Discrétisation de l'équation magnétodynamique en bidimensionnelle axisymétrique	21
III.5.1	Le point principale 'P' est à l'intérieur du volume fini	22
III.5.2	Le point principale 'P' est sur l'une des frontières du volume fini	23
III.6	Les conditions aux limites	25
III.6.1	Condition de Dirichlet	25
III.6.2	Condition de Neumann	26
III.7	Propriétés physique aux interfaces	26
III.8	Méthodes de résolutions des systèmes des équations algébriques	26
III.8.1	Méthodes directes	27
III.8.2	Méthode itératives	27
III.8.2.1	Méthode de JACOBI	27
III.8.2.2	Méthode de GAUSS SEIDEL	28
III.8.2.3	Méthodes de relaxation	28
III.9	Conclusion	28

Chapitre IV : Les résultats de simulation

IV.1	Introduction	29
IV.2	Description du dispositif	29
IV.3	Caractéristiques de l'application	29
IV.4	Les résultats	30
IV.5	Effet de la densité de courant d'excitation et la perméabilité magnétique sur la force magnétique pour différents valeur d'écart entre la partie fixe et mobile	33
IV.5.1	Les résultats pour un écart entre la partie mobile et fixe égale 5mm	33
IV.5.2	Les résultats pour différents valeurs d'écart entre la partie mobile et fixe (7.5mm et 10mm)	35
IV.6	Conclusion	38

Liste Des Figure

Chapitre II : Formulation mathématique en électromagnétisme

Figure.II.1 Courbe d'aimantation	12
Figure. II.2 Principe de la loi de Laplace	13

Chapitre III : Résolution des équations électromagnétique par la méthode des volumes finis

Figure. III.1 Configuration géométrique en 2D	17
Figure. III.2 Un domaine d'étude discrétisé en Elément finis	18
Figure. III.3 Maillage du domaine d'étude	19
Figure. III.4 Description d'un volume Fini	22
Figure. III.5 Le point principal sur les frontières	24
Figure. III.6 Description d'un nœud principal à l'interface	26

Chapitre IV :Les Résultats desimulation

Figure.IV.1 Electroaimant à noyauplongeur (team workshop problem 20)	29
Figure.IV.2 présente le dispositif en coupe dans le plan (r, z)	30
Figure.IV.3 Répartition de potentiel magnétique A dans le plan (r, z)	31
Figure.IV.4 Répartition de l'induction magnétique B_r dans le plan (r, z)	32
Figure.IV.5 Répartition de l'induction magnétique B_z dans le plan (r, z)	32
Figure.IV.6 Répartition du vecteur d'induction magnétique B dans le plan (r, z)	33
Figure.IV.7 L'effet de la densité de courant sur la force pour un écart entre la partie mobile et fixe égale 5mm	34
Figure.IV.8 L'effet de la perméabilité sur la force pour un écart entre la partie mobile et fixe égale 5mm	35
Figure.IV.9 L'effet de l'entrefer sur la force magnétique en fonction de la densité de courant (Pour un écart entre la partie mobile et fixe égale 7.5mm)	36
Figure.IV.10 L'effet de l'entrefer sur la force en fonction de la perméabilité relative (Pour un écart entre la partie mobile et fixe égale 7.5mm)	36
Figure.IV.11 L'effet de l'entrefer sur la force en fonction de la densité de courant pour un écart entre la partie mobile et fixe égale 10mm	37
Figure.IV.12 L'effet de l'entrefer sur la force en fonction de la perméabilité relative pour un écart entre la partie mobile et fixe égale 10mm	37

Liste Des Abréviations Et Des Symboles

A [**T/m**] : Potentiel magnétique vecteur

V [**V/m**] : Potentiel scalaire électrique

U [**V**] : Potentiel scalaire magnétique

B [**T**] : Induction magnétique.

E [**V/m**] : Champ électrique.

H [**A/m**] : Champ magnétique.

J [**A/m²**] : Densité de courant.

I_{ex} [**A/m**] : Courant d'excitation

χ : Susceptibilité magnétique.

μ [**H/m**] : Perméabilité magnétique.

μ_0 [**H/m**] : Perméabilité magnétique du vide.

δ [**s. m⁻¹**] : Conductivité électrique

ε [**F. m⁻¹**] : Permittivité

v [**m. H⁻¹**] : Réductivité magnétique

MVF : Méthode des Volumes finis.

MEF : Méthode des éléments finis.

MDF : Méthode des différences finis.

Introduction générale

INTRODUCTION GENERALE

L'énergie électrique est une forme secondaire d'énergie, qui ne présente que peu d'utilisations directes. En revanche, elle est une forme intermédiaire très intéressante par sa facilité de transport, sa souplesse et ses possibilités de conversion. Parmi toutes les possibilités de transformation, la forme électromécanique joue un rôle particulièrement important. D'une part, plus de 99% de la production d'énergie électrique résulte d'une conversion mécanique-électrique. D'autre part, la conversion électromécanique joue un rôle important dans des domaines aussi variés que la traction ferroviaire ou urbaine, les machines-outils, les appareils électroménagers, etc. Ce sont principalement les qualités de rendement de conversion, de souplesse et l'absence de pollution qui en font un produit technique très répandu.

L'étude de la conversion électromécanique est basée sur le principe de conservation de l'énergie. Celui-ci fait appel à une forme intermédiaire d'énergie. Il s'agit de l'énergie électromagnétique ou de sa forme homologue, la co-énergie magnétique [1].

Une force électromécanique résulte de trois formes possibles d'interaction :

- l'interaction entre deux courants.
- l'interaction entre un courant et un circuit ferromagnétique.
- l'interaction entre un aimant permanent et un courant ou un circuit ferromagnétique.

Les diverses grandeurs associées aux systèmes électromécaniques peuvent être exprimées dans deux modèles différents :

- le tenseur de Maxwell au niveau local.
- la dérivée de l'énergie au niveau des circuits électriques.

L'électroaimant est l'élément de base des systèmes électromécaniques. Son utilisation est largement répandue : électroaimant porteur, électroaimant de commande, etc. Les principaux avantages des électroaimants par rapport aux technologies concurrentes sont liés à un coût de réalisation peu élevé, un temps de réponse faible et l'absence de pollution de l'environnement lors de leur fonctionnement [1].

L'électroaimant, dont le circuit magnétique est fermé (armature au collage), consomme, dans certaines configurations, une puissance extrêmement faible tout en produisant un effort important.

Lorsqu'une pièce ferromagnétique est soumise à un champ magnétique, elle tend à se déplacer de manière à réduire la longueur du circuit magnétique. La réluctance du circuit se trouve ainsi diminuée. C'est ce principe qui est à la base du fonctionnement des convertisseurs électromécaniques et les électroaimants n'échappent pas à cette règle. L'électroaimant est schématiquement constitué de deux pièces en matériau ferromagnétique, l'une fixe et l'autre mobile (l'armature), et d'une bobine créant le champ magnétique.

La partie fixe comporte un bobinage parcouru par un courant continu, alternatif ou transitoire. Ce courant produit un champ magnétique dans le noyau, l'armature et l'entrefer. L'interaction du champ avec la matière ferromagnétique constituant l'armature conduit à l'apparition d'une force magnétique qui tend à déplacer cette armature.

L'objectif de ce travail est de modéliser un dispositif de conversion d'énergie qui fait appel à la compréhension des phénomènes électromagnétique et mécanique et exige une bonne connaissance de fonctionnement de ce dispositif et de calculer la force magnétique statique à partir du tenseur de Maxwell.

Ce mémoire de master s'articule autour de trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré à la présentation des équations aux dérivées partielles (EDP), dans le domaine magnéto-statique ainsi que leurs interprétations physiques.

Dans le deuxième chapitre nous présentons les modèles numériques adoptés pour la résolution des équations des champs électromagnétiques ; il s'agit de la méthode des volumes finis. Les procédures d'implémentation, sous l'environnement MATLAB, des modèles mathématico-numériques développés dans le cadre de ce travail sont aussi présentées.

Le troisième chapitre présentera les résultats des simulations des comportements magnétiques et mécaniques (calcul de la force) d'un dispositif de conversion d'énergie qui est un électro-aimant à noyau plongeur obtenus à partir d'un code de calcul développé et implémenté sous l'environnement MATLAB.

Nous terminerons ainsi par une conclusion ainsi que les perspectives envisagées.

Chapitre 1 :

Généralités sur les électroaimants

- I.1** Introduction
- I.1.1** Définition des électro-aimants
- I.1.2** Genre des électro-aimants
- I.2** Constitution d'un électro-aimant
- I.3** Fonctionnement d'un électro-aimant
- I.4** Principe de l'électro-aimant
- I.5** caractéristique Physique des électroaimants
 - I.5.1** Caractéristique géométrique
 - I.5.2** Caractéristiques électriques
 - I.5.3** Caractéristiques mécaniques
- I.6** Conclusion

I .1 Introduction : Un électro-aimant (EA) est un système réluctant générant une induction magnétique susceptible de créer une force. Cette force est utilisée pour déplacer une partie du circuit magnétique et ainsi entraîner un ensemble mécanique. L'importance de l'étude des électroaimants (bobine à noyau de fer) est considérable en électrotechnique. Les bobines sont d'usage fréquent en électronique de puissance (composants passifs magnétiques) et les machines électriques (transformateurs, alternateurs, machines asynchrones et machines à courant continu) nécessitent l'emploi de matériaux magnétiques. L'étude de la bobine passe par la mise en équation de l'ensemble des phénomènes dont elle est le siège.

I.1.1 Définition des électro-aimants :

Généralement un électroaimant est constitué de deux parties : la première, fixe, supporte le bobinage de création de la force magnétomotrice et la seconde, mobile, complète le circuit magnétique déformable. La déformation s'opère de manière à ce que le flux soit le plus grand possible, en diminuant la réluctance globale du circuit magnétique, c'est à dire en diminuant l'entrefer (c'est l'effet de l'application de la règle du flux maximum).

I.1.2 Genre des électro-aimants:

- Electro-aimant d'actionnement.
- Electro-aimant simple course (poussant, course longitudinale), dont le noyau effectue un déplacement sous l'effet d'une force électromagnétique d'une position initiale à une position finale. Le rappel se fait sous l'action de forces extérieures (p.ex. ressort).
- Electro-aimant étanche à la pression (à bain d'huile)
 1. Electro-aimant à courant continu
 2. Electro-aimant à courant alternatif
 3. Electro-aimant hydraulique

I.2 Constitution d'un électro-aimant:

Un électroaimant est un dispositif destiné à exercer des forces (ou couples) d'attraction sur une pièce ferromagnétique en vue de lui transmettre un mouvement de translation ou de rotation.

Son circuit magnétique, déformable, est généralement constitué d'une culasse fixe, entourée d'une ou de plusieurs bobines magnétisantes et d'une armature mobile.

Lorsque la bobine est alimentée, l'armature mobile se déplace de manière à ce que le flux soit le plus grand possible, en diminuant la réluctance globale du circuit magnétique, c'est-à-dire en diminuant l'entrefer (c'est l'effet de l'application de la règle du flux maximum).

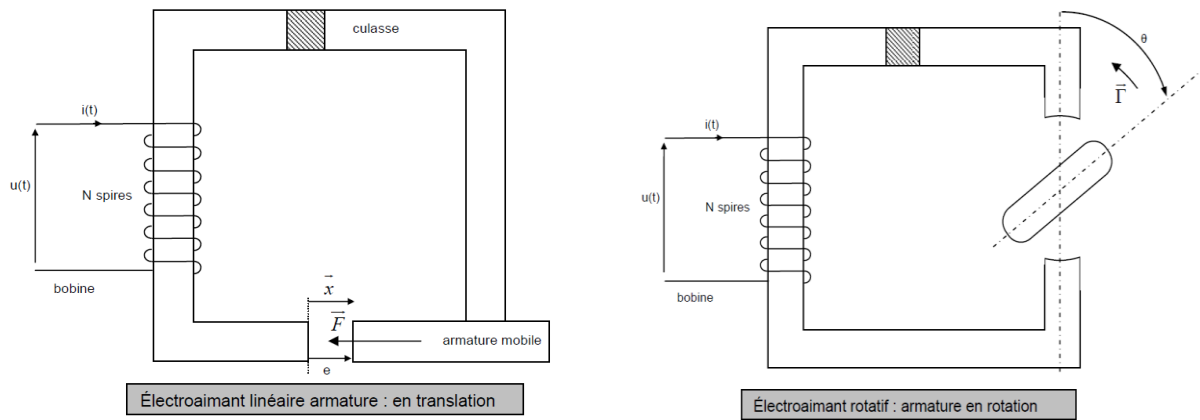


Figure I.1: type des électroaimants

I.3 Fonctionnement d'un électro-aimant

Tout d'abord, le fonctionnement d'un électro-aimant est associé à la création d'un champ magnétique variable, grâce à l'alimentation du courant électrique, on dispose d'une bobine se comportant comme un aimant autour duquel règne un champ magnétique.

Un aimant a la propriété d'attirer des éléments comportant du fer. Il possède deux extrémités: le pôle Nord et le pôle Sud. Deux pôles identiques se repoussent et deux pôles de sens contraires s'attirent.

Les aimants agissent donc entre eux par de forces d'attraction et de répulsion représentées par des lignes de forces magnétiques.

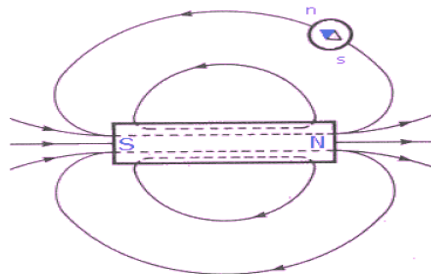


Figure I.I: un aimant

Un électro-aimant est un objet métallique produisant un champ magnétique lorsqu'il est alimenté d'électricité ; il devient aimant lorsqu'un courant électrique I circule. Il est

constitué de fil de cuivre émaillé d'un diamètre de 0,1 à 2 mm enroule sur une bobine plastique ayant de 500 jusqu'à plus de 4000 tours, possédant une résistance faible de 2 à 250 ohms et d'une barre de fer entourée d'un fil de métal (ferromagnétique) enroule en bobine dans lequel passe le courant. Les électro-aimants permettent, avec l'aide d'une alimentation électrique, de générer un champ magnétique important afin de soulever, fixer, ou transporter de grosses pièces métalliques.

I.4 Principe de l'électro-aimant :

A la différence des aimants, ils sont commandés par la présence d'un courant. Lorsque l'électro-aimant est alimenté en courant, le champ magnétique créé est canalisé par le circuit magnétique.

La puissance d'un électroaimant est proportionnelle à son nombre de spires (enroulement de fil de cuivre autour du circuit magnétique). Plus il y a un nombre important de spires plus l'électro-aimant devient très puissant : c'est le principe de l'électro-aimant qui a permis d'utiliser l'électricité pour transmettre instantanément des informations à distance.

Le champ magnétique est une force résultant du déplacement des charges, ces aimants créent le champ magnétique. A chaque point d'une région de l'espace dans laquelle règne un champ magnétique, on associe un vecteur champ magnétique \vec{B} qui caractérise les propriétés de ce champ donne par la relation suivante :

$$B = \mu \cdot n \cdot I \quad (I.1)$$

B valeur du champ magnétique (T)

μ constante égale à $4\pi \times 10^{-7}$ (T.m/A)

n nombre de spires par unité de longueur (m)

I intensité du courant électrique (A)

Le champ magnétique est uniforme et de même direction que l'axe du solénoïde, son sens est donné par la règle de l'observateur d'ampère.

Dans le cadre de l'éclairage d'un vélo par électro-aimant (dynamo), le courant est induit grâce à des aimants fixes sur les rayons de la roue et grâce à un électro-aimant fixe à la base des rayons du vélo. C'est le mouvement des charges électriques de la matière qui est à l'origine de l'électricité. Les bobines possèdent les mêmes caractéristiques que les aimants.

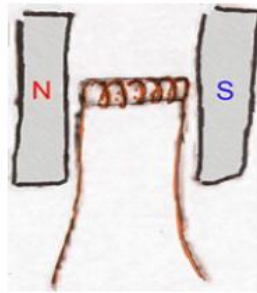


Figure I.3: un électroaimant

Le déplacement d'un aimant devant une bobine fait apparaître une tension aux bornes de celle-ci, cette tension traversant le fil génère un champ magnétique induit, le piston métallique se trouvant à l'entrée de la bobine est pris par le flux magnétique projetant ce dernier au travers. Le champ magnétique produit augmente avec le courant et le nombre de spires.

Cette tension est due au phénomène d'induction magnétique on peut alors observer des interactions d'origine magnétique entre un circuit électrique parcouru par un courant et un aimant. On a observé des interactions de même nature entre deux aimants : on a donc le principe d'un moteur parcouru par un aimant et produisant un courant électrique.

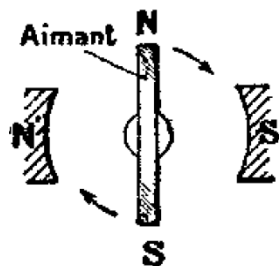


Figure I.4: un aimant

Dans le cadre du moteur, la partie fixe : le stator, porte la source de champ magnétique: un aimant permanent dont l'entrefer est cylindrique. Le champ magnétique est suivant le diamètre du cylindre. La partie mobile : le rotor, constituée d'un cylindre d'acier pouvant tourner autour de son axe dans un moteur électrique à courant continu, la force LAPLACE permet la rotation du rotor. Le système balais collecteur lui permet de tourner toujours dans le même sens.

I.5 Caractéristiques physiques des électroaimants

I.5.1 Caractéristique géométrique

Suivant les applications, les électroaimants peuvent prendre différentes formes. Principalement, on peut subdiviser les électroaimants en quatre catégories.

-**Électroaimants en forme U**: dans ces électroaimants, le noyau est en forme de U. L'armature mobile complète le circuit magnétique. Dans cette catégorie, les électroaimants se distinguent par la forme de l'armature qui peut être plate (figure **a**), à clapet (figure **b**), plongeante (figure **c**) ou tournante (figure **d**). Pour minimiser les pertes par courant de Foucault, les pièces ferromagnétiques peuvent être constituées de matériau feuilleté.

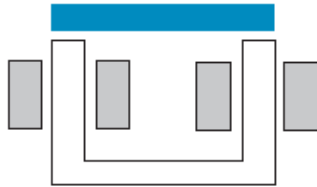


Figure a: en U à armature plate

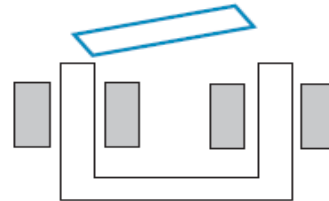


Figure b: en U à armature à clapet

- **Électroaimants en forme E**: dans ces électroaimants, le noyau est en forme de E. L'armature mobile peut être plate (figure I.6) ou plongeante

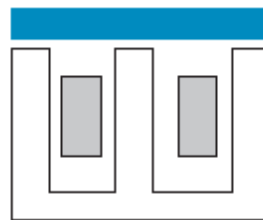


Figure I.6 : Électroaimants en forme E à armature plate

- **Électroaimants à noyau plongeur (figure I.7):**

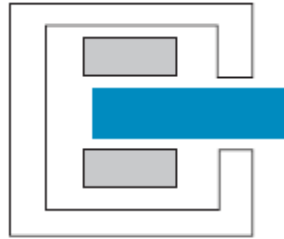


Figure I.7: *Électroaimants à noyau plongeur*

- **Électroaimants cylindriques:** ces électroaimants sont de forme cylindrique et ont une armature plate ou un noyau plongeur. Dans cette catégorie d'électroaimants, le bobinage est complètement logé dans le circuit magnétique, ce qui donne lieu à une structure robuste. Cette forme ne se prête pas au feuilletage du circuit magnétique qui est réalisé le plus souvent en ferrite (rotor).

I.5.2 Caractéristiques électriques

Les électroaimants de commande sont définis par des séquences **de fermeture et d'ouverture** du circuit d'alimentation. Le mouvement qui en résulte peut être rectiligne ou rotatif et la commande peut être qualifiée de simple ou multiple.

Dans les électroaimants à commande simple, le mouvement ne peut avoir lieu que dans un sens déterminé. Ce type d'électroaimant est par exemple utilisé dans le découpage de tôles ou de feuilles de matière plastique. Des positions intermédiaires de l'armature obtenues grâce à une commande électronique confèrent à l'électroaimant d'autres types de fonctions (outil de régulation de débit de fluide par exemple).

Les électroaimants à commande multiple permettent à l'armature de se déplacer dans un sens ou dans l'autre. C'est par exemple le cas des machines à coudre électromagnétiques.

- **Électroaimants à courant continu :**

Lorsque le bobinage d'alimentation de l'électroaimant est soumis à une tension constante E , la loi d'établissement du courant i est régie par l'équation suivante :

$$E = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (\text{I.2})$$

$$i(t) = i_0 \exp(-t/\tau); \quad i_0 = E/R \quad (\text{I.3})$$

Avec

R la résistance du circuit,

L son inductance.

Le temps de réponse relatif au collage de l'armature est caractérisé par la constante de temps $\tau = L/R$. Ce temps peut être réduit par l'augmentation de **R**, ce qui nécessite l'augmentation de **E** dans les mêmes proportions, et celle par conséquent de la puissance fournie E^2/R , et ceci afin de maintenir le même courant.

Dans la réalité, la loi d'établissement du courant est plus complexe.

En effet, **L** varie avec la modification du circuit magnétique de l'entrefer suite au déplacement de l'armature et avec la saturation magnétique (figure I.9).

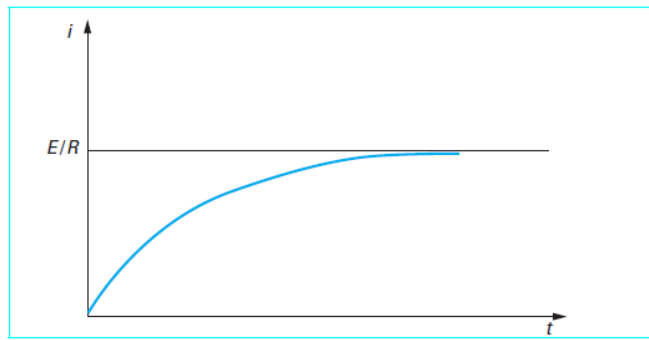


Figure I.8: Établissement du courant dans une bobine

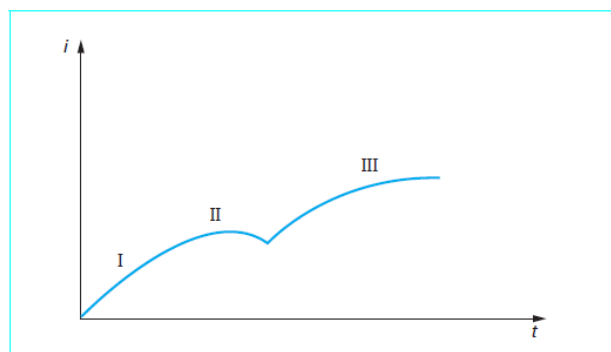


Figure I.9: Établissement du courant dans un électroaimant

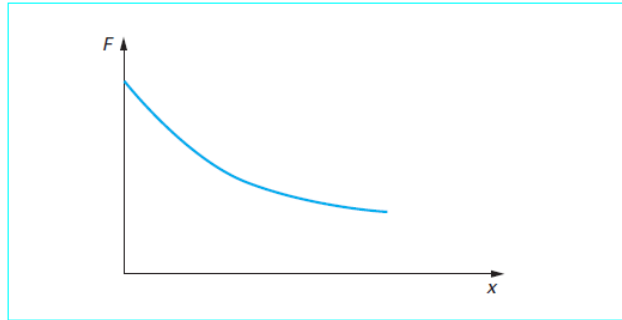


Figure I.10: Force-déplacement

La courbe d'établissement du courant dans un électroaimant est caractérisée par trois zones. La première zone correspond à l'appel de l'armature, c'est une variation linéaire car le circuit magnétique est essentiellement représenté par l'entrefer ($L = \text{cte}$). Dans la deuxième zone, l'armature est rapidement ramenée au collage, ce qui augmente l'inductance (diminution de la réluctance du circuit magnétique) et diminue le courant. Ensuite (zone III), le circuit magnétique est saturé, ce qui confère à l'inductance une valeur plus faible mais sensiblement constante, d'où une allure quasiment linéaire du courant en fonction du temps.

Au fur et à mesure que l'armature mobile se déplace, la force appliquée à l'armature diminue selon la courbe de (la figure I.10).

L'armature mobile se déplace et le travail fourni par l'électroaimant lors de sa course est lié à la force de mouvement par la formule suivante :

$$F = \frac{dW}{dx} \quad (\text{I.4})$$

Avec: W l'énergie magnétique,

F la force.

Pour une alimentation fixée, l'allure de la courbe force-déplacement peut être modifiée en agissant sur les formes du circuit magnétique, de manière à optimiser le fonctionnement de l'électroaimant selon les critères définis par le cahier des charges.

Généralement, le circuit magnétique de l'électroaimant alimenté en courant continu est constitué de fer doux massif.

Les électroaimants alimentés en courant continu présentent de nombreux avantages en raison du caractère massif du circuit magnétique : possibilité de cadences élevées et grande fiabilité.

- Électroaimants à courant alternatif

Lorsque l'électroaimant est soumis à une tension U variable dans le temps, la loi qui régit le circuit électromagnétique est la suivante :

$$U = Ri + \frac{d\phi}{dt} \quad (\text{I.5})$$

Dans l'hypothèse d'une variation sinusoïdale du courant, négligeant ainsi la modification de l'inductance, l'équation (1.5) peut être écrite en utilisant la représentation par les nombres complexes :

$$U = Z I \quad (\text{I.6})$$

avec

U la tension complexe,

I le courant complexe,

Z l'impédance complexe :

$$Z = R + jL\omega \quad (\text{I.7})$$

R représente la résistance du circuit, ne tenant pas compte des pertes fer, et L est son l'inductance :

$$L = \frac{n^2}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e} \quad (\text{I.8})$$

\mathfrak{R}_a et \mathfrak{R}_e sont respectivement les réluctances des pièces ferromagnétiques et de l'entrefer, et n le nombre de spires :

$$\mathfrak{R}_a = \frac{1}{\mu} \frac{\ell}{S} \quad (\text{I.9})$$

$$\mathfrak{R}_e = \frac{1}{\mu_0} \frac{e+x}{S} \quad (\text{I.10})$$

Avec ℓ la longueur du fer,

$e + x$ Celle de l'entrefer (e : partie fixe, x : partie variable),

S la section traversée par le flux magnétique,

μ et μ_0 respectivement les perméabilités du fer et de l'entrefer.

Lorsque x augmente, L diminue, et à la limite, on a $Z = R$. Ainsi, le courant peut devenir trop important à l'appel (10 à 20 fois le courant nominal) et endommager le bobinage par échauffement de celui-ci. En effet, la puissance active est $P = UI \cos \varphi$ avec φ faible et donc une puissance réactive $Q = UI \sin \varphi$ quasiment nulle.

Au collage, l'inductance est importante $L\omega \gg R$ et $Z \approx L\omega$, car lorsque x tend 0, \mathfrak{R}_e tend vers 0 et L augmente.

Dans un tel électroaimant, la force portante peut être calculée de la manière suivante.

L'énergie emmagasinée sous forme magnétique s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} Li^2 \quad (\text{I.11})$$

L'inductance L étant définie par la formule (I.8), la formule (I.11) devient :

$$W = \frac{1}{2} \frac{n^2 i^2}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e} \quad (\text{I.12})$$

En remplaçant les réductances par leurs expressions (I.9) et (I.10) et compte tenu de la loi d'Hopkinson :

$$ni = \mathfrak{R}\Phi \quad (\text{I.13})$$

Avec $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e$ l'expression (I.12) devient :

$$W = \frac{1}{2} \mathfrak{R} \Phi^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{S} \left(\frac{\ell}{\mu} + \frac{x+e}{\mu_0} \right) \Phi^2 \quad (\text{I.14})$$

On peut ainsi calculer la force portante :

$$F = \frac{dw}{dx} = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 S} \quad (\text{I.15})$$

Comme le flux efficace est $\Phi = LI$ cette force est par conséquent proportionnelle au carré de la valeur efficace du courant.

En fonction de l'induction \mathbf{B} , cette force \mathbf{F} s'écrit :

$$F = \frac{B^2 S}{2\mu_0} \quad (\text{I.16})$$

Cette formule nous permet d'estimer l'induction magnétique nécessaire à la production de cette force :

$$B = \sqrt{\frac{2\mu_0 F}{S}} \quad (\text{I.17})$$

En utilisant la formule de Boucherot :

$$U = 4,44. n f B_m S \quad (\text{I.18})$$

On peut calculer la tension d'alimentation de l'électroaimant si l'on connaît le nombre de spires n du bobinage et la fréquence f de travail.

B_m est l'induction crête.

D'autre part, l'application du théorème d'Ampère nous permet d'écrire la relation suivante :

$$ni = H_a \ell + H_e e \quad (\text{I.19})$$

avec :

$$H_a = \frac{B}{\mu} \quad , \quad H_e = \frac{B}{\mu_0} \quad , \quad B = \frac{B_m}{\sqrt{2}}$$

Ce qui permet de calculer les ampères tours nI . On suppose connaître la longueur ℓ de l'acier et sa perméabilité μ ainsi que la longueur e de l'entrefer. Le choix du conducteur à utiliser permet de définir le courant et d'en déduire le nombre de spires.

I.5.3 Caractéristiques mécaniques

- Forces et déplacements:

Les forces qui interviennent dans le fonctionnement des électroaimants peuvent avoir différentes origines.

- **La force électromagnétique:** correspond à la force mécanique produite par l'électroaimant dans le sens de la course.
- **La force de maintien:** traduit la valeur de l'effort produit par un électroaimant alimenté en courant continu et dont l'armature mobile est au collage. Dans le cas d'électroaimants alimentés en courant alternatif, la force de maintien est l'effort maximal admissible.
- **La force rémanente:** est la force de maintien qui subsiste après une coupure de courant. Elle est due à l'induction rémanente. Elle est liée à la nature du matériau utilisé, au champ maximal établi dans le circuit et l'entrefer résiduel. Lorsque l'électroaimant n'est pas alimenté, cette force est nuisible. Elle peut être réduite considérablement par adjonction d'une pièce amagnétique qui augmente l'entrefer et donc la réluctance du circuit au collage. Le déplacement qui résulte de l'application de la force peut être représenté par la figure (I.11). La course nominale d'un électroaimant est définie par la distance entre la position de collage et la position d'appel au-delà de laquelle la caractéristique force-déplacement s'effondre.

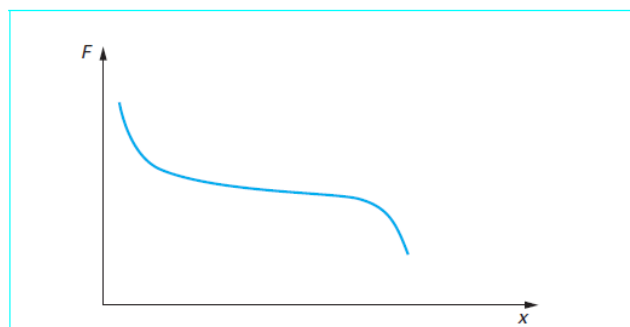


Figure I.11: Caractéristique force-déplacement

-le niveau de la force est fonction du nombre d'ampère tours et, en pratique, de la puissance que l'appareil peut dissiper.

et dont la solution est (figure I.8) :

$$i(t) = i_0 \exp(-t/\tau); \quad i_0 = E/R \quad (\text{I.20})$$

avec

R la résistance du circuit,

L son inductance.

Le temps de réponse relatif au collage de l'armature est caractérisé par la constante de temps $\tau = L/R$. Ce temps peut être réduit par l'augmentation de **R**, ce qui nécessite l'augmentation de **E** dans les mêmes proportions, et celle par conséquent de la puissance fournie E^2/R , et ceci afin de maintenir le même courant.

Dans la réalité, la loi d'établissement du courant est plus complexe.

I.6 Conclusion:

Dans ce chapitre nous avons montré les différentes formes des électroaimants existant dans l'industrie et leurs applications de façon générale, brève et simple. Nous savons qu'un électroaimant est un organe électrotechnique qui produit un champ magnétique lorsqu'il est alimenté en électricité. L'électroaimant joue le rôle d'un aimant étant activé par le courant électrique, l'électroaimant est utilisé pour produire un champ magnétique contrôlé par l'intensité du courant électrique sur une région de l'espace mais il permet également de créer une force électromagnétique très importante utilisable dans les applications variées.

Chapitre 2 :

Formulation Mathématique En Electromagnétisme

- II.1** Introduction
- II.2** Les modèles mathématiques en électromagnétisme
 - II.2.1** Equations générales de MAXWELL
 - II.2.2** Interprétation physique des équations électromagnétiques
 - II.2.2.1** Equation de couplage électromagnétique
 - II.2.2.2** Les équations de conservation
 - II.2.3** Loi de comportement des matériaux (milieu physique)
- II.3** Formulation des équations électromagnétiques
 - II.3.1** Le modèle électrostatique
 - II.3.2** Le modèle électrocinétique
 - II.3.3** Le modèle magnétostatique
 - II.3.3.1** Le modèle magnétostatique scalaire
 - II.3.3.2** Le modèle magnétostatique vectoriel
 - II.3.4** Le modèle magnétodynamique
- II.4** Formulation de l'équation magnétodynamique
- II.5** Méthodes de calcul de la force
 - II.5.1** Méthode de variation de la co-énergie et de l'énergie magnétiques
 - Principe de la méthode
 - II.5.2** La méthode basée sur la force de Lorentz
 - II.5.3** Méthode du tenseur de Maxwell
- II.6** Conclusion

II.1 Introduction

Les phénomènes électromagnétiques que l'on étudie au sein de dispositif de conversion d'énergie qui est un électro-aimant à noyau plongeur est régit par les équations de Maxwell et les équations caractéristiques des matériaux. Ces équations sont de vieux concepts de la physique.

Dans ce chapitre, nous allons exposer les modèles mathématique qui caractérise l'évolution spatiau-temporelle du champ d'interaction électromagnétique dans les matériaux magnétiques, et par conséquence la force magnétique statique.

II.2 Les Modèles mathématiques de l'électromagnétisme

II.2.1 Equations générales de MAXWELL

Les quatre équations de MAXWELL sont la formulation mathématique complète qui régit tous les phénomènes électromagnétiques de tous dispositifs. Ces équations sont généralement interdépendantes de faite que les phénomènes magnétiques et électriques sont couplés.

Ainsi qu'elles sont valables dans les différents milieux (air, milieu non homogènes, non linéaires et anisotropes [02].

Ces équations sont :

$$\overrightarrow{Rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (I.21) \quad \overrightarrow{Rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (I.22)$$

$$Div \vec{B} = 0 \quad (I.23) \quad Div \vec{D} = \rho$$

(I.24)

- Lois constitutives des milieux

$$B = \mu (H). H \text{ ou } H = v (B) B \quad (I.25)$$

$$D = \epsilon E \quad (I.26)$$

Avec:

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \text{ densité des courants de déplacement négligeable à basse fréquence [A / m}^2]$$

\vec{E} : Vecteur champ électrique [v/m]

\vec{B} : Vecteur induction magnétique [T]

\vec{H} : Vecteur Champ magnétique [A /m]

\vec{D} : Vecteur induction électrique (vecteur déplacement électrique) [C/m²]

ρ : densité volumique de charges électriques [C/m³]

\vec{J}_c : Vecteur densité du courant électrique de conduction [A/m]

ϵ : permittivité électrique [F / m]

μ : perméabilité magnétique [H / m]

σ : conductivité électrique [S / m]

ν : réluctivité magnétique [m / H]

à ces équations doit être associée la loi d'ohm généralisée

$$\vec{J}_c = \vec{J}_{ex} + \sigma \vec{E} + \sigma(\vec{V} \wedge \vec{B}) \quad (I.27)$$

Avec :

\vec{V} : Vecteur vitesse des pièces conductrices susceptible de se déplacer [m /s]

σ : conductivité électrique [s/m]

\vec{J}_{ex} : densité du courant d'excitation (source) [A / m²]

$\sigma \cdot \vec{E}$: densité des courants induits du champ électrique E [A/m²]

$\sigma(\vec{V} \wedge \vec{B})$: densité des courants induits par mouvement [A/m²]

II.2.2 Interprétation physique des équations de MAXWELL

II.2.2.1 Equations de couplages électromagnétiques

-Loi d'induction de FARADAY

$$\overrightarrow{Rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Cette équation exprime le couplage électrique– magnétique en régime dynamique où la variation temporelle de \vec{B} détermine le $\overrightarrow{Rot} \vec{E}$

Démonstration :

La force électromotrice induite dans un circuit (c) placé dans un champ magnétique est déterminée par l'intégrale curviligne suivante :

$$e = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (I.28)$$

Où (c) est une boucle fermée

De la même manière, une (f e m) est aussi induite, si le flux Φ varie dans le temps à travers un circuit fixe tel que :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (I.29)$$

Où $\Phi = f(x, y, z, t)$

Donc :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (I.30)$$

où (s) est une surface s'appuyant sur le contour (c)

Et d'après le théorème de STOKES on a :

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_s \overrightarrow{rot} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (I.31)$$

On obtient donc

$$-\frac{d}{dt} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_s \overrightarrow{rot} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (I.32)$$

Ainsi, nous aurons :

$$\overrightarrow{Rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

-Théorème d'AMPERE

$$\overrightarrow{Rot} \vec{H} = \vec{j}c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Cette équation exprime la dépendance du champ magnétique de la densité de courant totale (conduction + déplacement)

-Démonstration :

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (\text{I.33})$$

(s) : est la surface qui s'appuie sur le contour (c)

J : est la densité de courant.

D'après le théorème de STOKES nous avons :

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s \text{Rot} \vec{H} \cdot d\vec{s} \quad (\text{I.34})$$

Donc :

$$\int_s \text{rot} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (\text{I.35})$$

D'où

$$\text{Rot} \vec{H} = \vec{J} \quad (\text{I.36})$$

II.1.2.2 Les équations de conservations

-Divergence de l'induction magnétique

$$\text{Div} \vec{B} = 0$$

Cette relation traduit mathématiquement, qu'il n'existe pas de charges magnétiques car les seules sources de champ magnétique sont les courants électriques.

C'est pourquoi les lignes du champ sont toujours fermées sur elles-mêmes, elles forment des boucles. ces boucles n'ont; ni points de départs, ni points d'arrivées, ni points de convergences, D'où, la nomination d'induction conservative (champ conservatif)

-Théorème de GAUSS

$$\text{Div} \vec{D} = \rho$$

Si on considère une surface (s) fermée, le flux de vecteur de déplacement électrique

\vec{D} sortant de cette surface est égale à la charge totale contenue à l'intérieur de cette dernière

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = \varphi_{\text{int}} = \oint_v \rho \, dv \quad (\text{I.37})$$

D'après le théorème d'OSTROGRADSKI –GREEN nous avons

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = \oint_v \text{div} \vec{D} \, dv \quad (\text{I.38})$$

D'où

$$\oint_v \text{div} \vec{D} \, dv = \oint_v \rho \, dv \quad (\text{I.39})$$

Ainsi

$$\text{Div} \vec{D} = \rho$$

II.2.3 Loi de comportement des matériaux (milieu physique)

-Induction électrique et champ électrique

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

Où

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$$

ε_0 : Permittivité absolue du vide [F / m]

ε_r : Permittivité relative du milieu [U S I]

Cette équation décrit la relation entre le vecteur induction électrique \vec{D} et le champ électrique \vec{E} , elle est linéaire si ε est constante dans le cas des conducteurs non polarisés nous avons :

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} [\text{F} / \text{M}]$$

la détermination de \vec{D} de l'équation (I.6) et de $\text{rot}\vec{E}$ de l'équation (I.1) détermine complètement \vec{E}

-Induction magnétique et champ magnétique

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \text{ (I.40)}$$

C'est la relation entre le champ magnétique et l'induction magnétique .cette dernière donne la courbe d'aimantation $\vec{B} = f(\vec{H})$

Cette variation de \vec{H} conduit à une variation de l'induction \vec{B} , on trouve par la suite le cycle d'hystérésis dont la forme se diffère d'un matériau à un autre, donc d'un dispositif électrotechnique à un autre.

II.3 Formulation des équations électromagnétiques

Les équations de MAXWELL se découpent donnant naissance à des modèles plus simples

II.3.1 Modèle électrostatique

Dans ce modèle, le champ E est produit par des charges stationnaires qui ne varient pas en terme de répartition. Ce modèle est régi par les équations suivantes [6] :

$$\begin{cases} \text{Rot } \vec{E} = 0 \\ \text{Div } \vec{D} = \rho \text{ (I.41)} \\ \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \end{cases}$$

$$\text{Car } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$$

La relation : $\overrightarrow{Rot E} = 0$ permet de définir une fonction auxiliaire U appelée potentielscalaire électrique, tel que : $\vec{E} = \overrightarrow{grad} V$

Ce modèle se ramène alors à l'équation suivante :

$$\vec{E} \operatorname{div}(\varepsilon \overrightarrow{grad} V) + \rho = 0 \quad \text{II.3.2 Mod\`ele \u00e9lectrocin\u00e9tique}$$

Ce mod\`ele est utilis\u00e9 dans l'\u00e9tude de la r\u00e9partition du courant \u00e9lectrique de conduction dans

des conducteurs isol\u00e9s soumis \u00e0 des diff\u00e9rences de potentiel continues.

Il est r\u00e9git par les \u00e9quations suivantes :

$$\begin{cases} \overrightarrow{Rot} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{Div} \vec{j} = 0 \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} \end{cases} \quad \text{(I.43)}$$

La relation : $\overrightarrow{Rot E} = 0$ montre qu'il existe encore un potentiel \u00e9lectrique scalaire U

(tension \u00e9lectrique), tel que : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad} U$

Le mod\`ele se ram\u00e8ne alors \u00e0 :

$$\operatorname{div}(\sigma \overrightarrow{grad} (U)) = 0 \quad \text{(I.44)}$$

II.3.3 Mod\`ele magn\u00e9tostatique

Dans ce mod\`ele, le terme $\partial \vec{B} / \partial t$ de l'\u00e9quation est nul. Ceci s'explique par le fait que le champ magn\u00e9tique est produit par des sources ind\u00e9pendantes du temps. Dans le cas de ce mod\`ele, on peut avoir deux sortes de formes [04] :

II.3.3.1 Mod\`ele magn\u00e9tostatique scalaire

Dans ce cas, les courants \u00e9lectriques sont nuls, il vient alors que les champs ne d\u00e9pendent pas du temps. On obtient alors les relations [06]:

$$\overrightarrow{Rot} \vec{H} = 0 \quad \text{Courants nuls}$$

$$Div \vec{B} = 0 \quad \text{Conservation du champ}$$

$$\text{Avec la loi du milieu, } \vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}r$$

H : Dérive d'un potentiel scalaire magnétique (Φ), d'où la nomination du modèle magnétostatique scalaire, tel que : $\vec{H} = -\overrightarrow{grad} \Phi$

$$\text{Le modèle se ramène alors à l'équation : } div(\mu \overrightarrow{grad} \Phi) = div \vec{B}r \quad (I.45)$$

II.3.3.2 Modèle magnétostatique vectorielle

Dans ce modèle, les courants électriques ne sont pas nuls. Il vient alors que [06]:

$$\overrightarrow{Rot} \vec{H} = \vec{j}$$

$$Div \vec{B} = 0 \quad (I.46)$$

$$\text{Avec la loi du milieu : } \vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}r$$

La relation (I.24) ,permet de définir une fonction vectoriel \vec{A} appelée potentiel vecteur

$$\text{magnétique, tel que : } \vec{B} = \overrightarrow{Rot} \vec{A}$$

D'où le système d'équations :

$$\overrightarrow{rot} \left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{rot} \vec{A} \right) = \vec{j} + \overrightarrow{rot} \left(\frac{1}{\mu} \vec{B}r \right) \quad (I.47)$$

$$Div \vec{A} = 0$$

II.3.4 le Modèle magnétodynamique

Contrairement aux autres modèles le terme $\left(\frac{d\vec{B}}{dt} \right)$ n'est pas nul.

Par conséquent les phénomènes magnétiques et électriques sont couplés, c'est-à-dire

que la variation de champ magnétique dans le temps induit des courants de Foucault et des f. e. m ce qui est le cas de tous les dispositifs dans les quels les courants et les tensions électriques ne sont pas stationnaires.

Le potentiel vecteur \vec{A} Joue un rôle primordial dont la connaissance de \vec{A} implique la connaissance de tous les grandeurs physiques où :

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

En terme d'équations nous avons :

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{I.48})$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} \quad (\text{I.49})$$

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad (\text{I.50})$$

à ces équations nous ajoutons les lois caractéristiques au milieu

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{I.51})$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (\text{I.52})$$

C'est à partir de ces équations de base de ce modèle que nous pouvons déterminer

L'équation décrivant l'évolution des phénomènes électromagnétiques dans un dispositif où l'ensemble des champs présents sont en fonction explicite de l'espace et du temps

L'utilisation de ce modèle est très répandue dans l'étude des machines électriques, des

Dispositifs du chauffage par induction, des transformateurs ...etc.

II.4 Formulation de l'équation magnétodynamique

On se basant sur les équations de J.C.MAXWELL, on peut formuler l'équation qui décrit l'évolution spatiale –temporelle des phénomènes électromagnétiques nous avons[2] :

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{avec} : \vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

On obtient:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial(\text{rot} \vec{A})}{\partial t} = -\text{rot} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \quad (\text{I.53})$$

$$\Rightarrow \text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{I.54})$$

Ceci implique $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ est un champ conservatif, il derive donc d'un potentiel scalaire électrique U Tel que :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad} U \Rightarrow \vec{E} = -\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{grad} U \right) \quad (\text{I.55})$$

A partir de l'équation (I-1) et de l'équation (I-5) nous avons :

$$\overrightarrow{rot}\left(\frac{1}{\mu}\vec{B}\right) = \vec{J} \quad (I.56)$$

Et à partir des équations (I-2) et (I-7) nous avons :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{rot}\left(\frac{1}{\mu}\overrightarrow{rot}\vec{A}\right) &= \vec{J}_{ex} + \sigma \cdot \vec{E} + \sigma(\vec{\vartheta} \wedge \overrightarrow{rot}\vec{A}) \quad (I.57) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{rot}\left(\frac{1}{\mu}\overrightarrow{rot}\vec{A}\right) &= \vec{J}_{ex} - \sigma\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}U\right) + \sigma(\vec{\vartheta} \wedge \overrightarrow{rot}\vec{A}) \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\frac{1}{\mu}\overrightarrow{rot}\vec{A}\right) + \sigma\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma\overrightarrow{grad}U - \sigma(\vec{\vartheta} \wedge \overrightarrow{rot}\vec{A}) = \vec{J}_{ex} \quad (I.58)$$

Le potentiel vecteur \vec{A} ne peut pas être défini par la seule condition $\vec{B} = \overrightarrow{Rot}\vec{A}$

On doit fixer sa divergence pour assurer l'unicité de la solution de l'équation aux dérivées partielles (E.D.P)

On ajoute alors la condition $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, appelée JAUGE DE COULOMB [1] Nous aurons ainsi :

$$\overrightarrow{rot}\left(\frac{1}{\mu}\overrightarrow{rot}\vec{A}\right) + \sigma\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma\overrightarrow{grad}U - \sigma(\vec{\vartheta} \wedge \overrightarrow{rot}\vec{A}) = \vec{J}_{ex} \quad (I.59)$$

$$Div \vec{A} = 0$$

Les termes $-\sigma\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ et $\sigma(\vec{\vartheta} \wedge \overrightarrow{rot}\vec{A})$ représentent les densités des courants induits ils traduisent le caractère dynamique dans le temps et dans l'espace des phénomènes électromagnétiques

Le terme $-\sigma\overrightarrow{grad}U$ décrit la densité des courants dépendante des conditions électriques impose aux extrêmes des conducteurs

Dans le cas où la pièce est immobile par rapport à l'inducteur et v est uniformément nul l'équation (I-10) devient

$$\overrightarrow{rot}(v\overrightarrow{rot}\vec{A}) + \sigma\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{J}_{ex} \quad (I.60) \quad Div \vec{A} = 0$$

II.5 Méthodes de calcul de la force

En génie électrique, le calcul des forces magnétiques globales qui agissent sur les parties mobiles est d'un grand intérêt, car elles jouent un rôle déterminant dans tout système électromagnétique- mécanique en terme de déformation ou de déplacement. Pour évaluer les forces magnétiques, nous pouvons procéder par diverses méthodes, parmi celles-ci [03] :

- La méthode de variation de l'énergie et de la co-énergie magnétiques.
- La méthode basée sur la force de Lorentz.
- La méthode du tenseur de Maxwell.

II.5.1 Méthode de variation de la co-énergie et de l'énergie magnétiques

Principe de la méthode

La force magnétique dans ce cas est la dérivée de l'énergie magnétique par rapport au déplacement à flux constant ou c'est la dérivée de la co-énergie magnétique à courant constant.

Si F_s représente la composante de la force magnétique totale suivant une direction donnée S on aura :

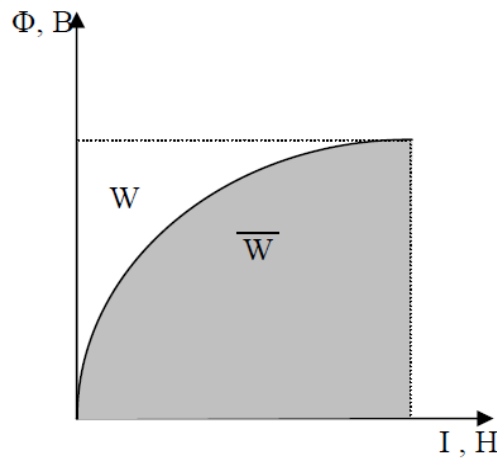


Figure II.1 Courbe d'aimantation

$$F_s = \frac{d\bar{w}}{ds} \Big|_{i=cste} \quad (I.61)$$

$$F_s = -\frac{dw}{ds} \Big|_{\varphi=cste} \quad (I.62)$$

$$\bar{w} = \int_{\Omega} \left(\int_0^H B dH \right) d\Omega \quad (I.63)$$

$$w = \int_{\Omega} \left(\int_0^B H dB \right) d\Omega \quad (I.64)$$

Numériquement, les dérivations peuvent être obtenues par les relations suivantes :

$$F_s = \frac{\bar{w}_{s+\Delta s} - \bar{w}_s}{\Delta s} \Big|_{i=cste} \quad (I.65)$$

$$F_S = - \frac{w_{s+\Delta s} - w_s}{\Delta s} \Big|_{\varphi = \text{cste}} \quad (\text{I.66})$$

ΔS est le pas de déplacement.

II.5.2 La méthode basée sur la force de Lorentz

Considérant un barreau conducteur parcouru par un courant i , ce barreau est placé dans une zone où règne un champ magnétique en vertu de la loi de Laplace ce barreau sera soumis à une force magnétique découlant de l'interaction entre le courant circulant dans le barreau et le champ magnétique extérieur (Figure.I.2).

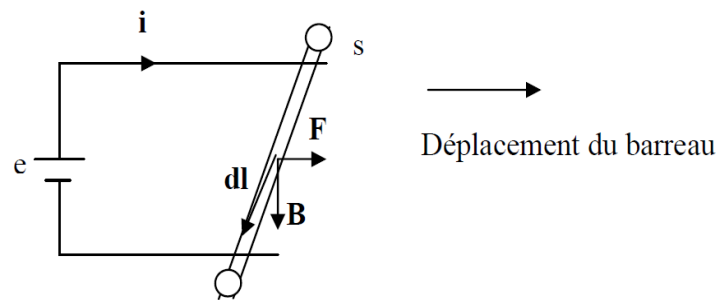


Figure II.2 Principe de la loi de Laplace

S : la section du barreau²

dl : élément de longueur

L'équation de Laplace donne l'expression de la force s'exerçant sur un conducteur idéal placé dans un champ d'induction magnétique.

$$dF = i d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B} \quad (\text{I.67})$$

Cette équation peut être exprimée sous sa forme locale f donnée par :

$$f = \frac{dF}{dv} = \mathbf{J} \wedge \mathbf{B} \quad (\text{I.68})$$

La force globale est présentée par :

$$F = \int_v f dv = \int_v (\mathbf{J} \wedge \mathbf{B}) dv \quad (\text{I.69})$$

II.5.3 Méthode du tenseur de Maxwell

En utilisant l'équation de Maxwell (I.1) nous aurons :

$$\mathbf{F} = \nabla \wedge \mathbf{H} \wedge \mathbf{B} = \mu \nabla \wedge \mathbf{H} \wedge \mathbf{H} \quad (\text{I.70})$$

En utilisant le symbole nabla(∇) l'équation (I .51) devient:

$$f = \mu \left\{ (\mathbf{H} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{H} - \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{H}^2) \right\} \quad (\text{I.71})$$

Pour la composante f_x nous avons :

$$f = \mu \left\{ H_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + H_y \frac{\partial H_x}{\partial y} + H_z \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (H_x^2 + H_y^2 + H_z^2) \right\} \quad (\text{I.72})$$

Le tenseur de Maxwell permettra d'étudier la force s'exerçant sur un matériau de volume V , en connaissant seulement la répartition du champ aux

Différents points d'une surface fermée entourant le volume V .

$$F_x = \int_V \nabla \cdot T_1 dV \quad (\text{I.73})$$

T_1 est l'une des composantes du tenseur de Maxwell.

En transformant l'intégrale de volume en une intégrale de surface en exploitant le théorème de la divergence nous aurons :

$$F_x = \oint_S T_1 \cdot \mathbf{n} ds \quad (\text{I.74})$$

\mathbf{n} : vecteur normal à la surface s entourant le volume V .

$$T_1 = \begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \end{bmatrix} \quad (\text{I.75})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{11} = \mu H_x^2 - \frac{1}{2} H^2 \\ \tau_{12} = \mu H_x H_y \\ \tau_{13} = \mu H_x H_z \end{array} \right. \quad (\text{I.76})$$

$$F = \oint_S \left\{ (\mu H_x^2 - \frac{1}{2} H^2) n_x + \mu H_x H_y n_y + \mu H_x H_z n_z \right\} ds \quad (\text{I.77})$$

Où (n_x, n_y, n_z) sont les composantes du vecteur unitaire \vec{n}

La formule générale de la force est donc :

$$F = \oint_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (\text{I.78})$$

Tel que \mathbf{T} est le tenseur de Maxwell :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{I.79})$$

La méthode du tenseur de Maxwell est économique et rapide puisque la force est calculée seulement sur la surface fermée, qu'on choisit arbitrairement, entourant l'objet à étudier. Cette méthode ne tient pas compte de la saturation.

II.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté, les formulations ainsi que les différents modèles mathématiques régissant les phénomènes électromagnétiques.

La résolution des équations électromagnétiques par la méthode des volumes finis fera l'objet du prochain chapitre.

Chapitre 3 :

Résolution Des Equation Electromagnétique Par La Méthode Des Volumes Finis

III. 1 Introduction

III. 2 Différentes techniques de résolution des équations aux dérivées partielles

III.2.1 Méthode des éléments finis (M.E.F)

III.2.2 Méthode des différences finis (M.D.F)

III.2.3 Méthode des intégrales de frontières (M.I.F)

III.2.4 Méthode des volumes finis (M.V.F)

III.3 L'équation magnétodynamique d'un système cylindrique axisymétrique

III.4 Principe de la méthode des volumes finis

III.5 Discrétisation de l'équation magnétodynamique en bidimensionnelle axisymétrique

III.5.1 Le point principale 'P' est à l'intérieur du volume fini

III.5.2 Le point principale 'P' est sur l'une des frontières du volume fini

III.5.3 Formulation intégrale

III.6 Les conditions aux limites

III.6.1 Condition de Dirichlet

III.6.2 Condition de Neumann

III.7 Propriétés physique aux interfaces

III.8 Formulation de l'équation en coordonnées cylindrique axisymétrique

III.9 Méthodes de résolutions des systèmes des équations algébriques

III.9.1 Méthodes directes

III.9.2 Méthodes itératives

III.9.2.1 Méthode de JACOBI

III.9.2.2 Méthode de GAUSS SEIDEL

III.9.2.3 Méthode de relaxation

III.10 Conclusion

III.1 Introduction

Les phénomènes qui décrivent le comportement des dispositifs électromagnétiques sont représentés par des équations aux dérivées partielles ; ces phénomènes se trouvent dans des régions de géométrie très variée (Exemples : pièce des machines tournantes, transformateurs.....etc.).

En général, la résolution de ces équations se fait à l'aide des méthodes analytiques ou des méthodes approchées.

Pour des géométries plus complexes, on a recourt à des méthodes numériques qui font appel à des techniques de discrétisation, en effet, elles transforment les équations aux dérivées partielles en un système d'équations algébriques dans le domaine d'étude compte tenu des conditions aux limites.

III.2 Différentes technique de résolutions des équations aux dérivées partielles

Les principales méthodes de résolution des EDPs dans les milieux linéaires sont : la méthode de différence finie (MDF), la méthode des élément finis(MEF), la méthode des volumes finis(MVF), la méthode des intégrales de frontières(MIF).

L'utilisation des méthodes numériques de discrétisation consiste à ramener la résolution du système d'équations différentielles dans le domaine d'étude, compte tenu des conditions aux limites, à celle d'un système d'équation algébriques dont la solution conduit à la détermination des champs électromagnétiques[05].

III.2.1 Méthode des Différences Finis (MDF)

C'est une méthode basée sur le théorème de Taylor où l'on remplace l'opérateur différentiel par un opérateur aux différences.

Le domaine d'étude est découpé au moyen d'une grille carrée dans le cas bidimensionnel et une grille cubique dans le cas tridimensionnel, l'équation à résoudre est écrite pour chaquepoint ou nœud de maillage, pour cela on aura un système d'équations possédant un nombre d'équations égal au nombre de nœuds.

La figure (III.1) représente un exemple de maillage pour le cas bidimensionnel.

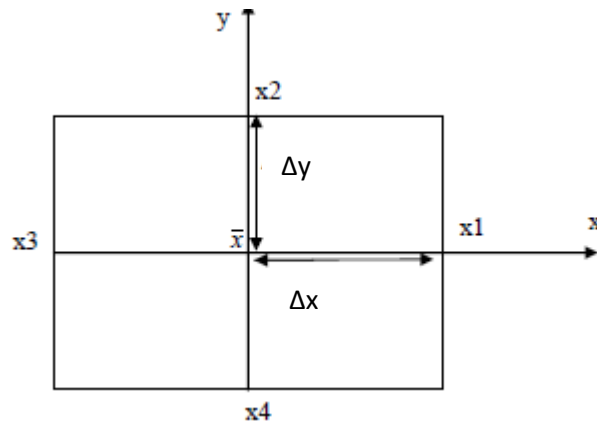


Figure III.1 Configuration géométrique en 2D.

Où x est le point d'évaluation et x_1, x_2, x_3 et x_4 étant les nœuds du maillage.

Développons la variable d'état A en série de Taylor jusqu'au troisième terme, nous obtenons :

$$A(x_1) = A(\bar{x}) + (\Delta x) \cdot (dA/dx) \bar{x} + 1/2 \cdot (\Delta x)^2 \cdot (d^2 A/d^2 x) \bar{x} + \dots$$

$$A(x_3) = A(\bar{x}) - (\Delta x) \cdot (dA/dx) \bar{x} + 1/2 \cdot (\Delta x)^2 \cdot (d^2 A/d^2 x) \bar{x} + \dots$$

On peut déduire de ces équations que:

$$(d^2 A/d^2 x) \bar{x} = [A(x_1) - 2 \cdot A(\bar{x}) + A(x_3)] / (\Delta x)^2$$

$$(dA/dx) \bar{x} = [A(x_1) - A(\bar{x})] / 2 \cdot \Delta x$$

Par analogie on peut écrire la dérivée première et seconde pour selon l'axe Oy au point \bar{x} .

Après avoir transformé les opérateurs différentiels en rapports de dérivées partielles en les substituants dans l'équation décrivant notre modèle et correspondant au point \bar{x} , on obtient l'équation aux différences finies au point \bar{x} , qui est une équation linéaire dépendant des paramètres physiques du système (perméabilité, conductivité, courant d'excitation,...), de la variable aux points voisins du nœud de calcul et du pas de maillage selon les axes x et y .

A la fin nous obtenons un système matriciel $[A] \cdot [X] = [B]$.

Où : $[A]$ est une matrice carrée de dimension $(m.n)$. $(m.n)$ si l'on a $(m.n)$ nœuds internes du domaine de résolution dans le cas 2 dimensions.

$[X]$ est une matrice colonne de dimension $(m.n)$ représentant le second membre des équations. Ce système d'équations peut être résolu par l'inverse de matrices ou par d'autres techniques.

La méthode des différences finies est très simple à mettre en œuvre, mais elle peut ne pas être précise puisqu'elle prend le développement en série de Taylor de l'inconnue jusqu'au troisième terme seulement.

C'est une méthode qui est difficilement applicable aux domaines à géométrie compliquée, elle est plutôt réservée aux domaines à géométrie simple et aux frontières régulières tels que les carrés et les rectangles.

III.2.2 Méthode des éléments finis (MEF)

La méthode des éléments finis est plus générale car elle est mieux adaptée aux géométries complexes et aux matériaux non linéaires.

Dans cette méthode on cherche à exprimer une formulation intégrale basée sur l'une des deux approches suivantes :

- La méthode variationnelle qui consiste à minimiser une fonctionnelle qui représente généralement, l'énergie du système étudié. Cette méthode n'est donc applicable que si l'on connaît une fonctionnelle équivalente au problème différentiel que l'on veut résoudre.
- La méthode des résidus pondérés ou méthode projective qui consiste à minimiser le résidu induit par l'approximation de la fonction inconnue.

La méthode des éléments finis consiste à subdiviser le domaine d'étude en domaines élémentaires appelés éléments finis, comme le montre la figure (II.2) et à exprimer l'inconnue sur chaque élément par les fonctions d'interpolation simples en fonction des valeurs de l'inconnue en chacun des sommets de cet élément. L'inconnue devra vérifier globalement les conditions de continuité à l'interface et au passage d'un milieu à un autre. Pour des structures bidimensionnelles, les éléments de maillage sont souvent des triangles, tandis que dans les problèmes tridimensionnels, les éléments sont de forme tétraédrique ou prismatique.

L'avantage de s'adapter aux géométries complexes et la prise en considération des non-linéarités ont fait que la méthode des éléments finis soit très utilisée en électromagnétisme bien qu'elle soit quelque peu difficile à mettre en œuvre puisqu'elle requiert une grande capacité de mémoire et un temps de calcul important.

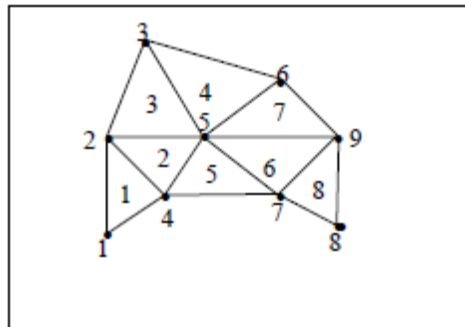


Figure III.2 Un domaine d'étude discrétisé en Elément finis.

III.2.3 Méthode des intégrales de frontières (MIF)

Lorsqu'on utilise la MDF ou la MEF, on calcule les variables inconnues dans tout le domaine. La MIF permet de ramener le maillage à la frontière du domaine. Ainsi, le calcul des valeurs de l'inconnue sur les frontières du domaine suffit pour obtenir la solution en tout point du domaine.

Pour ramener le problème sur les frontières, la MIF utilise le théorème d'Ostrogradski-Green. Cette méthode peut être intéressante pour l'étude de structure tridimensionnelle ou lorsque l'air ou les milieux passifs occupent une grande partie du domaine d'étude. Cependant, cette méthode a l'inconvénient de conduire à un système algébrique à matrice pleine (pas de termes nuls). Ceci augmente le temps utilisateur, donc le coût de calcul.

III.2.4 Méthode des volumes finis (MVF)

La MVF se déduit de la MDF. Le domaine d'étude (Ω) est subdivisé en un nombre d'éléments finis. Chaque élément contient quatre nœuds, pour le cas bidimensionnel axisymétrique, un volume fini entoure chaque nœud.

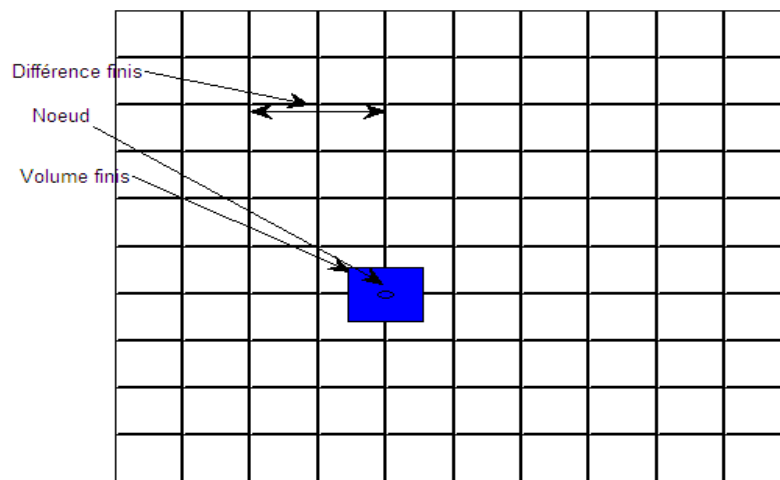


Figure III.3 Maillage du domaine d'étude.

L'équation différentielle est projetée sur une fonction de projection bien déterminée et ensuite intégrée dans chacun des volumes élémentaires. Pour calculer l'intégrale dans le volume élémentaire, la fonction inconnue est représentée à l'aide d'une fonction d'approximation (linéaire, parabolique, puissance, exponentielle,...etc.) entre deux nœuds consécutifs. Ensuite, la forme intégrale est discrétisée dans le domaine d'étude.

L'équation discrétisée de cette façon exprime le principe de conservation pour l'inconnu dans l'élément de volume et la solution obtenue est constituée uniquement par les valeurs nodales.

Cette méthode est utilisée, en particulier en mécanique des fluides (l'équation d'écoulement), où elle est apparue depuis une vingtaine d'années, sa procédure donne une solution plus précise que celle fournie par la MDF.

L'équation discrète obtenue exprime le principe de conservation de la fonction sur le volume de contrôle.

III.3 L'équation magnétodynamique d'un système cylindrique axisymétrique :

Pour le calcul numérique, différents choix de variables d'état aboutissant à des formulations différentes sont possibles.

Les formulations en potentiels en particulier, sont toute fois mieux adaptées aux volumes finis. En se basant sur les équations de J.C. Maxwell, l'équation qui décrit l'évolution spatio-temporelle des phénomènes électromagnétiques, trouvée précédemment est la suivante:

$$\overrightarrow{Rot} (v \overrightarrow{Rot} \vec{A}) + \sigma \partial \vec{A} / \partial t = \vec{J} \quad (\text{II.80})$$

Lorsque le courant est orienté suivant la direction (0φ) , alors le vecteur $\vec{A} = A\varphi$.

Les différentes grandeurs vectorielles ont les composantes suivantes :

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{e}_r \\ J_\varphi \vec{e}_\varphi & \\ 0 & \vec{e}_z \end{pmatrix}; \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{e}_r \\ E_\varphi \vec{e}_\varphi & \\ 0 & \vec{e}_z \end{pmatrix}; \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{e}_r \\ A_\varphi \vec{e}_\varphi & \\ 0 & \vec{e}_z \end{pmatrix}; \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_r \vec{e}_r \\ 0 & \vec{e}_\varphi \\ B_z \vec{e}_z \end{pmatrix}; \quad \vec{H} = \begin{pmatrix} H_r \vec{e}_r \\ 0 & \vec{e}_\varphi \\ H_z \vec{e}_z \end{pmatrix}$$

Comme le vecteur \vec{A} est confondu avec sa composante orthogonale, sa divergence est naturellement nulle $\vec{A} = A\varphi \vec{e}_\varphi$ et $Div \vec{A} = 0$

En coordonnées cylindriques axisymétriques, nous avons :

$$\overrightarrow{Rot} \vec{A} = 1/r \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \partial / \partial r & \partial / \partial \varphi & \partial / \partial z \\ 0 & r A_\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{Rot} \vec{A} = 1/r [-\partial(rA_\varphi)/\partial z] \vec{e}_r + 1/r [0] \vec{e}_\varphi + 1/r [\partial(rA_\varphi)/\partial r] \vec{e}_z$$

Et

$$\overrightarrow{Rot} (v\overrightarrow{Rot}\vec{A}) = -\left\{ \frac{\partial}{\partial r} [v/r \frac{\partial (rA\varphi)}{\partial r}] - \frac{\partial}{\partial z} [v \frac{\partial A\varphi}{\partial z}] \right\} \vec{e}_\varphi$$

Posons $K = v/r$ et $A^*\varphi = r A\varphi$

Donc l'équation (II.1) prend la forme :

$$\frac{\partial}{\partial z} K (\frac{\partial A^*\varphi}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial r} K (\frac{\partial A^*\varphi}{\partial r}) - \sigma/r (\frac{\partial A^*\varphi}{\partial t}) = J_s \quad (III.81)$$

C'est une équation aux dérivées partielles, qui présente le comportement Magnétodynamique d'un dispositif axisymétrique bidimensionnel alimenté en courant.

III.4 Principe de la méthode des volumes finis :

La méthode des volumes finis est une méthode de discrétisation performante, elle consiste à utiliser une approximation simple de l'inconnu pour transformer les équations aux dérivées partielles en un système d'équation algébriques.

Dans cette méthode, le domaine de calcul est subdivisé en un certain nombre de volumes de contrôle (volumes finis) non superposés, tel que chaque volume entoure chaque point du maillage.

L'équation différentielle est intégrée pour chaque volume de contrôle .Le résultat de cette intégration donne l'équation discrète.

L'équation discrète obtenue exprime le principe de conservation de la fonction sur le volume de contrôle, et la solution obtenue est constituée uniquement par les valeurs nodales.

III.5 Discrétisation de l'équation magnétodynamique axisymétrique :

Le domaine d'étude (Ω) est subdivisé en volumes élémentaires de telle manière que chaque volume entoure un nœud du maillage

Rappelons l'équation magnétodynamique linéaire :

$$\frac{\partial}{\partial z} K (\frac{\partial A^*\varphi}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial r} K (\frac{\partial A^*\varphi}{\partial r}) - \sigma/r (\frac{\partial A^*\varphi}{\partial t}) = J_s \quad (III.82)$$

Avec : $K = v/r$ et $A^*\varphi = r A\varphi$

III.5.1 Le point principale 'P' est à l'intérieur du volume fini :

Chaque nœud principal 'P' est entouré par deux points voisins sur l'axe horizontal r qui sont ouest (w), est(e) et deux autres points voisins sur l'axe vertical z qui sont sud(s), nord (n).

On choisi le volume qui a les dimensions Δr et Δz , on discrétise l'équation pour qu'elle doit être applicable en tous domaines désirés.

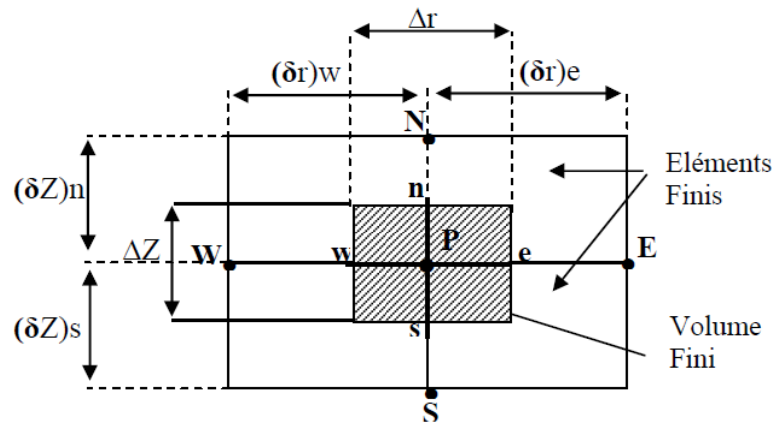


Figure III.4 : Description d'un volume Fini.

Nous intégrons l'équation magnétodynamique d'un système axisymétrique dans le volume choisi nous obtenons :

$$\int \int -\partial/\partial z [K (\partial A^* / \partial z)] dz dr + \int \int -\partial/\partial r [K (\partial A^* / \partial r)] dz dr + \int \int \sigma/r (\partial A^* / \partial t) dz dr + \int \int -Js dz dr = 0 \quad (\text{III.83})$$

On pose :

$$(I) \quad = \int \int -\partial/\partial z [K(\partial A^* / \partial z)] dz dr$$

$$(II) \quad = \int \int -\partial/\partial r [K (\partial A^* / \partial r)] dz dr$$

$$(III) \quad = \int \int \sigma/r (\partial A^* / \partial t) dz dr$$

$$(IV) \quad = - \int \int Js dz dr$$

$$\begin{aligned}
\text{(I)} \quad &= \int [-K(\partial A^* / \partial z)] dr = - [(K\partial A^* / \partial z) - (K\partial A^* / \partial z)] \Delta r \\
&= (Kn\Delta r / \Delta zn + Ks \Delta r / \Delta zs) A^*_P - (Kn\Delta r / \Delta zn) A^*_N - (Ks \Delta r / \Delta zs) A^*_S \\
\text{(II)} \quad &= \int [-K(\partial A^* / \partial r)] dz = - [(K\partial A^* / \partial r) - (K\partial A^* / \partial r)] \Delta z \\
&= (Ke\Delta z / \Delta re + Kw\Delta z / \Delta rw) A^*_P - Ke\Delta z / \Delta re A^*_E - Kw\Delta z / \Delta rw A^*_W \\
\text{(III)} \quad &= \int \int \sigma_p / r_j w A^* dz dr \\
&= j w \sigma_p / r_p A^*_P \Delta r \Delta z \\
\text{(IV)} \quad &= \int \int J_s dz dr = J_s \Delta r \Delta z
\end{aligned}$$

On remplace les quatre intégrales trouvées dans l'équation (II.2) du système on obtient :

$$\begin{aligned}
& [Kn \Delta r / \Delta zn + Ks \Delta r / \Delta zs + Ke \Delta z / \Delta re + Kw \Delta z / \Delta rw + j w \sigma_p / r_p \Delta r \Delta z] A^*_P = \\
& Kn \Delta r / \Delta zn A^*_N + Ks \Delta r / \Delta zs A^*_S + Ke \Delta z / \Delta re A^*_E + Kw \Delta z / \Delta rw A^*_W + J_s \Delta r \Delta z \text{(III.84)}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'équation algébrique finale s'écrit sous la forme :

$$Kp A^*_P = K_N A^*_N + K_S A^*_S + K_E A^*_E + K_W A^*_W + J_s \Delta r \Delta z \text{(III.85)}$$

Avec:

$$Kp = Kn\Delta r / \Delta zn + KS \Delta r / \Delta zs + Ke \Delta z / \Delta re + Kw\Delta z / \Delta rw + j w \sigma_p / r_p \Delta r \Delta z$$

$$Kp = K_N + K_S + K_E + K_W + j w \sigma_p / r_p \Delta r \Delta z$$

$$KN = Kn\Delta r / \Delta zn ; K_S = K_S \Delta r / ; K_E = Ke\Delta z / \Delta re ; K_W = Kw\Delta z / \Delta rw$$

$$Kn = \sigma_p / r_p ; K_S = \sigma_p / r_p ; Ke = \sigma_p / r_p ; Kw = \sigma_p / r_p$$

Si la discrétisation du domaine comporte N nœuds, on est amené à étudier un système. De N équations à N inconnues qui sont les valeurs nodales de A .

III.5.2 Le point principale 'P' est sur l'une des frontières du volume fini :

Comme il est indiqué sur la figure ci- dessous, le point principal est sur la limite. Deux points voisins sur l'axe horizontal r qui sont est, ouest et un point voisin sur l'axe Vertical z qui est sud ou nord.

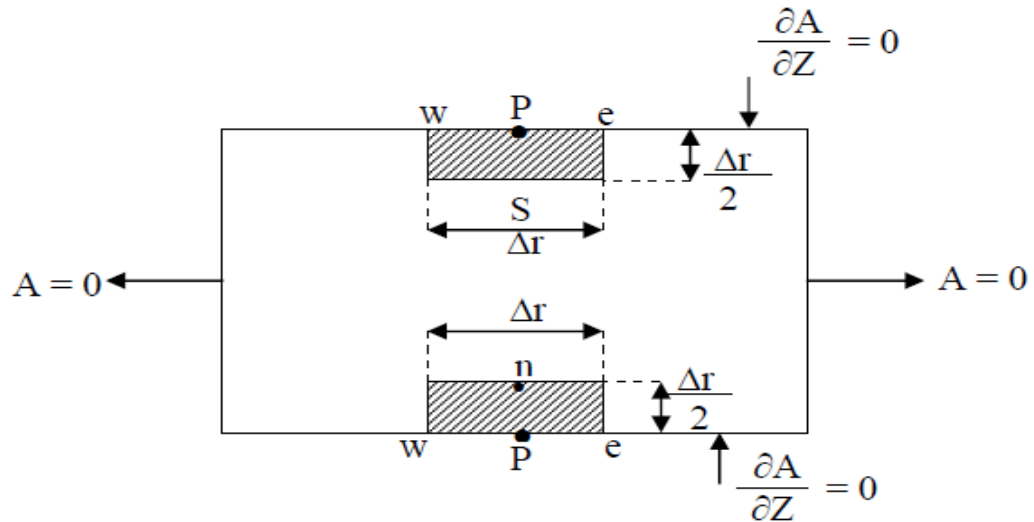


Figure III.5 : Le point principal sur les frontières.

Nous intégrons l'équation qui régit le phénomène physique dans le cas ou le point voisin est le nord.

$$\frac{\partial}{\partial z} K \left(\frac{\partial A^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} K \left(\frac{\partial A^*}{\partial r} \right) - \sigma/r \left(\frac{\partial A^*}{\partial t} \right) = Js$$

Formulation intégrale :

$$\int \int -\frac{\partial}{\partial z} [K(\frac{\partial A^*}{\partial z})] dz dr + \int \int -\frac{\partial}{\partial r} [K(\frac{\partial A^*}{\partial r})] dz dr + \int \int \sigma/r (\frac{\partial A^*}{\partial t}) dz dr + \int \int -Js dz dr = 0$$

Posons :

$$(I) = \int \int -\frac{\partial}{\partial z} [K(\frac{\partial A^*}{\partial z})] dz dr$$

$$(II) = \int \int -\frac{\partial}{\partial r} [K(\frac{\partial A^*}{\partial r})] dz dr$$

$$(III) = \int \int \sigma/r (\frac{\partial A^*}{\partial t}) dz dr$$

$$(IV) = - \int \int Js dz dr$$

$$(I) = \int -[K(\frac{\partial A^*}{\partial z})] dr = [(K\frac{\partial A^*}{\partial z})n - (K\frac{\partial A^*}{\partial z})p] \Delta r$$

$$\begin{aligned}
&= Kn((A^*N - A^*P) / \Delta zn) \Delta r \\
&= [(Kn\Delta r) / \Delta zn] A^*P - [(Kn\Delta r) / \Delta zn] A^*N \\
\text{(II)} \quad &= \int [K(\partial A^* / \partial r)] dz = [(K\partial A^* / \partial r) e - (K\partial A / \partial r)w] \Delta z / 2 \\
&= [Ke(A^*E - A^*p) / \Delta re] + Kw(A^*p - A^*W) / \Delta r W] \Delta z / 2 \\
&= [(Ke\Delta z / 2 \Delta re) + (\Delta z / 2\Delta rw) A^*P - (Ke\Delta z / 2 \Delta re) A^*E \\
&\quad + (Kw \Delta z / 2 \Delta rw) A^*W \\
\text{(III)} \quad &= \int \int j w \sigma / r A^* dr dz \\
&= 1/2 [j w (\sigma_p / r_p)] A^* p \Delta r \Delta z \\
&= jw/2 (\sigma_p / r_p) \Delta r \Delta z A^* p \\
\text{(IV)} \quad &= Js \Delta r \Delta z / 2
\end{aligned}$$

On substitue ces quatre intégrales dans l'équation (II.2) on trouve :

$$\begin{aligned}
&[(Kn\Delta r) / \Delta zn + Ke \Delta z / 2\Delta re + Kw \Delta z / 2\Delta rw + j w / 2 (\sigma_p / r_p) \Delta r \Delta z] A^*P = \\
&Kn\Delta r / \Delta zn A^*N + Ke\Delta z / 2\Delta re A^*E + Kw \Delta z / 2\Delta rw A^*W + 1/2 Js\Delta r \Delta z \quad \text{(III.86)}
\end{aligned}$$

Dans le cas ou le point voisin est le sud (limite supérieur) on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
&[Ks\Delta r / \Delta zs + Ke\Delta z / 2\Delta re + Kw\Delta z / 2\Delta rw + jw/2 (\sigma_p / r_p) \Delta r \Delta z] A^*P = \\
&Ks\Delta r / \Delta zs A^*s + Ke\Delta z / 2\Delta re A^*E + Kw\Delta z / 2\Delta rw A^*w + 1/2 Js \Delta r \Delta z \quad \text{(III.87)}
\end{aligned}$$

III.6 Les conditions aux limites :

On distingue essentiellement deux types de conditions aux limites, dans les problèmes de champs électromagnétiques formulés en termes de vecteur potentiel magnétique, [7], [8] et [9] :

III.6.1 Condition de Dirichlet :

Dans ce cas, le vecteur potentiel magnétique A est constant sur la frontière, ce qui veut dire que l'induction magnétique \vec{B} est parallèle à ce contour qui présente alors une équipotentielle. Cette condition aux limites peut se présenter aussi sur les plans ou les axes polaires (dans ce cas on se limite à mailler une partie du domaine de résolution).

III.6.2 Condition de Neumann :

On la trouve sur les plans ou les axes d'antisymétrie magnétiques (axes inter polaires par exemple). Sur cette frontière les lignes de l'induction magnétique sont normales. De même, lorsque ce type de conditions aux limites apparait sur des axes d'antisymétrie, le maillage est limité à une portion du domaine.

III.7 Propriétés physique aux interfaces :

L'interface est la partie intermédiaire entre deux milieux différents, comme il est indiqué sur la figure suivante :

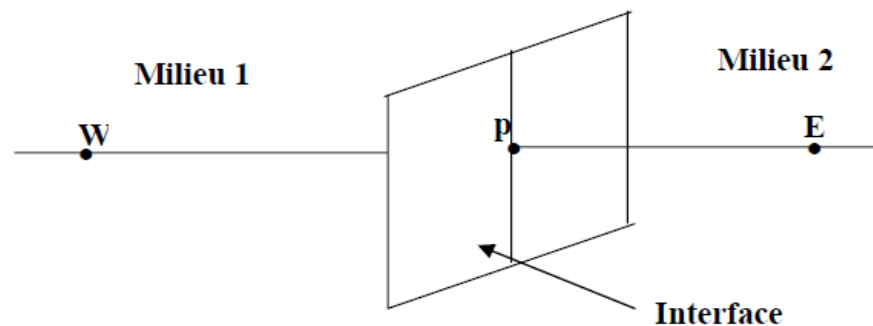


Figure III.6 : Description d'un nœud principal à l'interface.

Les nœuds qui se trouvent à l'interface prennent les propriétés physiques suivantes :

$$\sigma = (\sigma_A + \sigma_B) / 2 \quad (\text{conductivité d'interface})$$

$$\mu = (\mu_A + \mu_B) / 2 \quad (\text{perméabilité d'interface})$$

$$J_s = (J_{sA} + J_{sB}) / 2 \quad (\text{densité de courant d'interface})$$

$$\varepsilon = (\varepsilon_A + \varepsilon_B) / 2 \quad (\text{permittivité d'interface})$$

III.8 Méthodes de résolutions des systèmes des équations algébriques :

Pour la résolution des systèmes d'équations algébriques il existe deux grandes catégories de méthodes:

- ✓ les méthodes directes
- ✓ les méthodes itératives

III.8.1 Méthodes directes :

Ces méthodes sont applicables pour les systèmes linéaires dont le nombre d'élément est peu.

Elles sont précises et exactes mais demandent beaucoup d'espace mémoire et de temps de calcul.

$[A] \{X\} = \{B\}$ avec $A =$ constante

Parmi les méthodes directes nous citons :

Méthode de **Cramer**, méthode de **Gauss**, méthode de **Jordon**, méthode de **Crout**, méthode de **Cholevski**

III.8.2 Méthodes itératives :

Ces méthodes sont mieux adaptées aux matrices d'ordre élevé comportant de nombreux éléments nuls (matrice creuse). Parmi ces méthodes, nous citons :

III.8.2.1 Méthode de JACOBI :

Elle est basée sur la transformation du système :

$$[A][x] = [B] \Rightarrow X_i^{(k+1)} = [b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^k] / a_{ii}, i = 1, \dots, n$$

On estime une valeur arbitraire initiale x_j^0 pour ($k=0$) le calcul sera arrêté si :

$|x_i^{(k+1)} - x_i^k| < \varepsilon$ dans le cas d'une précision absolue et, $\left| \frac{x_i^{(k+1)} - x_i^k}{x_i^k} \right| < \varepsilon$ dans le cas d'une précision relative.

ε : précision imposée par l'utilisateur.

III.8.2.2 Méthode de GAUSS SEIDEL :

Cette méthode consiste à transformer le système :

$$[A][x] = [B] \Rightarrow X_i^{(k+1)} = [b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} X_j^{(k+1)} - \sum_{j \neq i} a_{ij} X_j^k] / a_{ii}, (i = 1, \dots, n)$$

En donnant aux inconnues x_j^k des valeurs arbitraires initial x_j^0 (pour $k=0$) le processus sera arrêté si :

$|x_i^{(k+1)} - x_i^k| < \varepsilon$ dans le cas d'une précision absolue, et $\left| \frac{x_i^{(k+1)} - x_i^k}{x_i^k} \right| < \varepsilon$ dans le cas d'une précision relative.

ε : précision imposée par l'utilisateur.

III.8.2.3 Méthode de relaxation :

Pour améliorer la rapidité de la convergence si on est sûr qu'il n'y a pas divergence, dans le cas des méthodes itératives, on utilise un facteur de relaxation α tel que :

$$x_i^{(k+1)} = x_i^k + \alpha(x_i^{(k+1)} - x_i^k)[02].$$

III.10. Conclusion

Le présent chapitre a été consacré à la présentation de quelques méthodes numériques d'approximation pour la résolution des problèmes électromagnétiques. En considération du type d'application à traiter, le cas cylindrique axisymétrique a été détaillé.

Dans le cadre de notre travail, la méthode utilisée pour la résolution des systèmes d'équations algébriques en électromagnétisme obtenue après avoir appliqué la (MVF) pour la transformation des (EDP s) est la méthode itérative, car elle consomme moins d'espace mémoire et converge souvent plus vite.

Le chapitre suivant, sera consacré à la présentation les résultats des simulations obtenus à partir des codes numériques développés et implémentés sous l'environnement MATLAB

Chapitre 4 :

Les Résultats DeSimulation

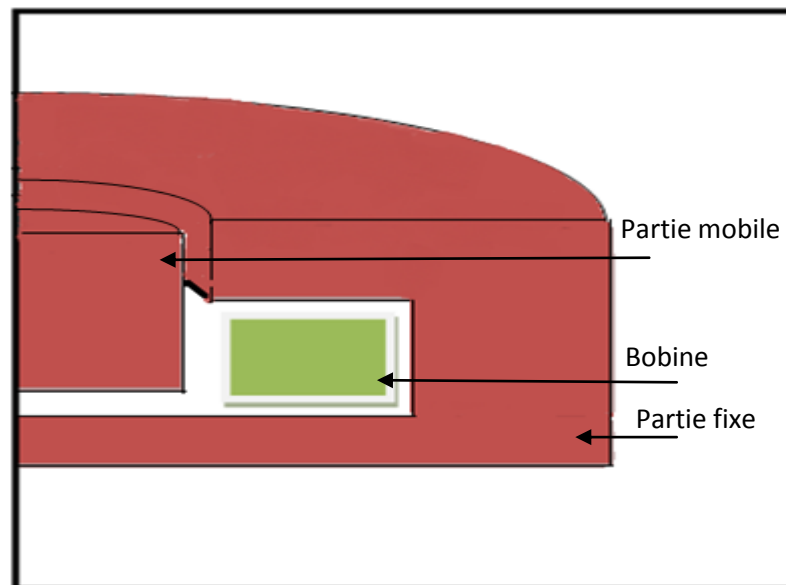
IV.1	Introduction
IV.2	Description du dispositif
IV.3	Caractéristiques de l'application
IV.4	Les résultats
IV.5	Effet de la densité de courant d'excitation et la perméabilité magnétique sur la force magnétique pour différents valeur d'écart entre la partie fixe et mobile.
IV.5.1	Les résultats pour un écart entre la partie mobile et fixe égale 5mm
IV.5.2	Les résultats pour différents valeurs d'écart entre la partie mobile et fixe (7.5mm et 10mm)
IV.6	Conclusion

IV.1 Introduction

Dans ce présent chapitre nous proposons pour application un système cylindrique axisymétrique prototype sur lequel le modèle de couplage proposé sera testé. Il s'agit d'un électro-aimant constitué d'un circuit magnétique, une bobine et un noyau plongeur. Dans ce cadre bien déterminé, nous étudions, le comportement électromagnétique de tout le système. En matière de résultats, la variation spatiale des grandeurs locales : le potentiel magnétique vecteur, l'induction magnétique, le champ magnétique,...etc., sont largement présentées et discuter. Ensuite, la variation des grandeurs à caractère globales : la force magnétique globale serait largement présentée et discuter aussi.

IV.2 Description du dispositif

La figureIII.1 représente une illustration tridimensionnelle de notre application. Il s'agit d'un électroaimant constitué d'un noyau mobile et d'une bobine alimentée en courant.



FigureIV.1 Electroaimant à noyau plongeur (team workshop problem 20).

IV.3 Caractéristiques de l'application

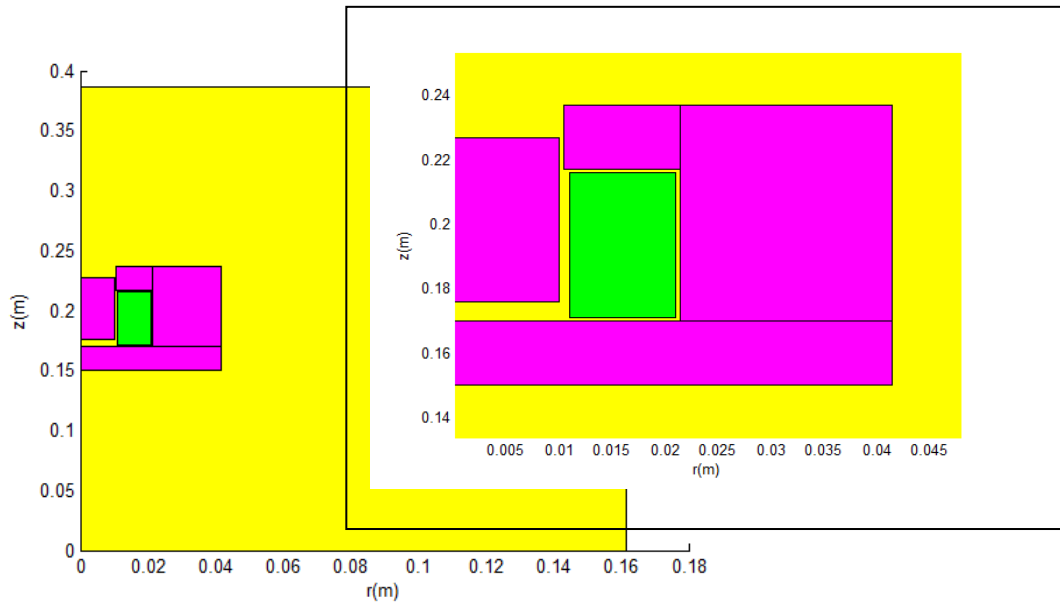
- Données électromagnétiques

La densité de courant d'excitation de l'inducteur $J_s = 1.10^6 \text{ A/m}^2$,

La perméabilité magnétique du vide $\mu = \mu_0$,

La perméabilité magnétique relative $\mu_{rch} = 1500$,

La conductivité électrique de l'inducteur $\sigma_i = 0 \text{ S/m}$,



La figure IV.2 présente le dispositif en coupe dans le plan (r, z) .

IV.4 Les résultats

Le problème que nous allons étudier consiste à la résolution des équations du modèle magnétostatique, pour ce cas le problème team workshop °20(3-D Static Force Problem) a été choisi, mais avec des petite changements car notre étude est en axisymétrique. Le dispositif étudié est illustré dans la figure (III.2).

Les résultats à caractère magnétique présentés sont, respectivement :

- la répartition spatiale du potentiel magnétique A en un point de domaine d'étude.
- la répartition spatiale de la composante verticale et radiale de l'induction magnétique
- Répartition du vecteur d'induction magnétique B .
- En suite, la force d'attraction exercée sur la partie mobile.

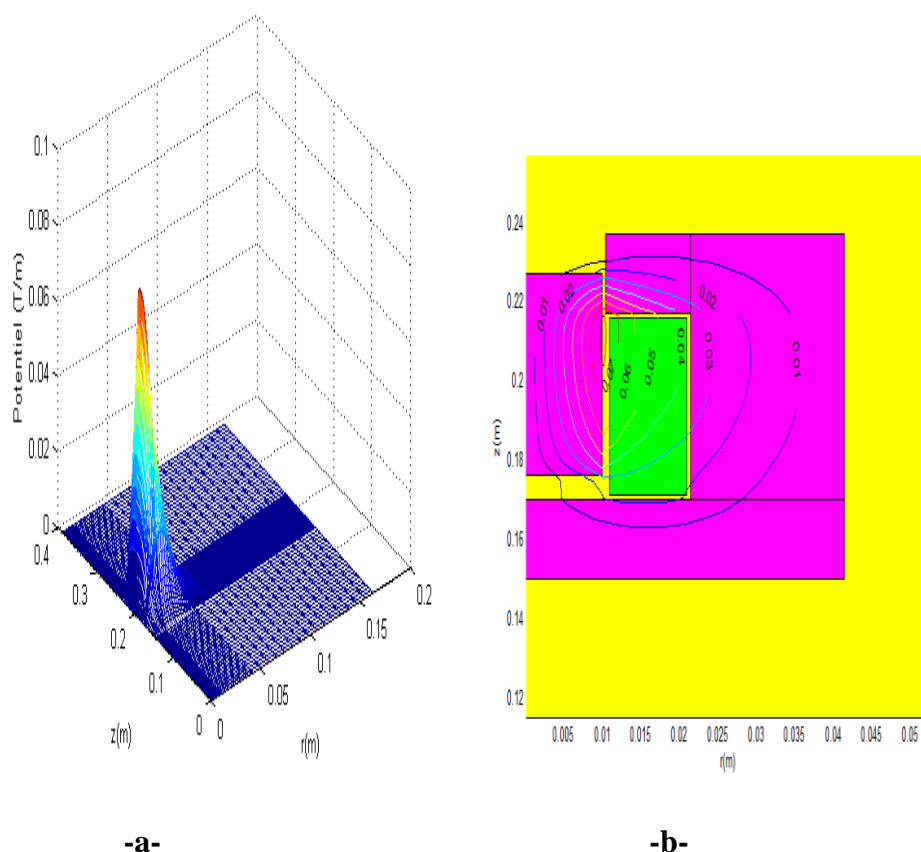


Figure IV.3 Répartition de potentiel magnétique A dans le plan (r, z) .

les figures (IV. 3 a,b), montrent la répartition spatiale de potentiel magnétique et les lignes équipotentielles de A , d'après ces figures on remarque que le potentiel est important 0.08A/m lorsque l'entrefer entre la partie fixe et mobile est court, et faible de 0.01A/m pour un entrefer égale 5mm. Aussi on remarque que la variation de potentiel est concave suivant l'axe Or et convexe suivant Oz.

les figures (IV. 4 a,b) et (IV. 5 a, b), montrent respectivement la variation spatiale des grandeurs de la composante radiale B_r et verticale de l'induction B_z , d'après ces figures, on remarque que la composante B_z est importante dans la partie mobile 0.36T car le champ est concentré (figure IV. 6). Et pour la composante radiale, on voit que les valeurs sont des signes positive et négative et de même quantité presque. Ce changement de signe pour entourer dans le circuit magnétique, et on peut voir aussi que les valeurs de B_r est faible par rapport B_z .

La figure (IV. 6) présente la répartition de vecteur d'induction magnétique totale.

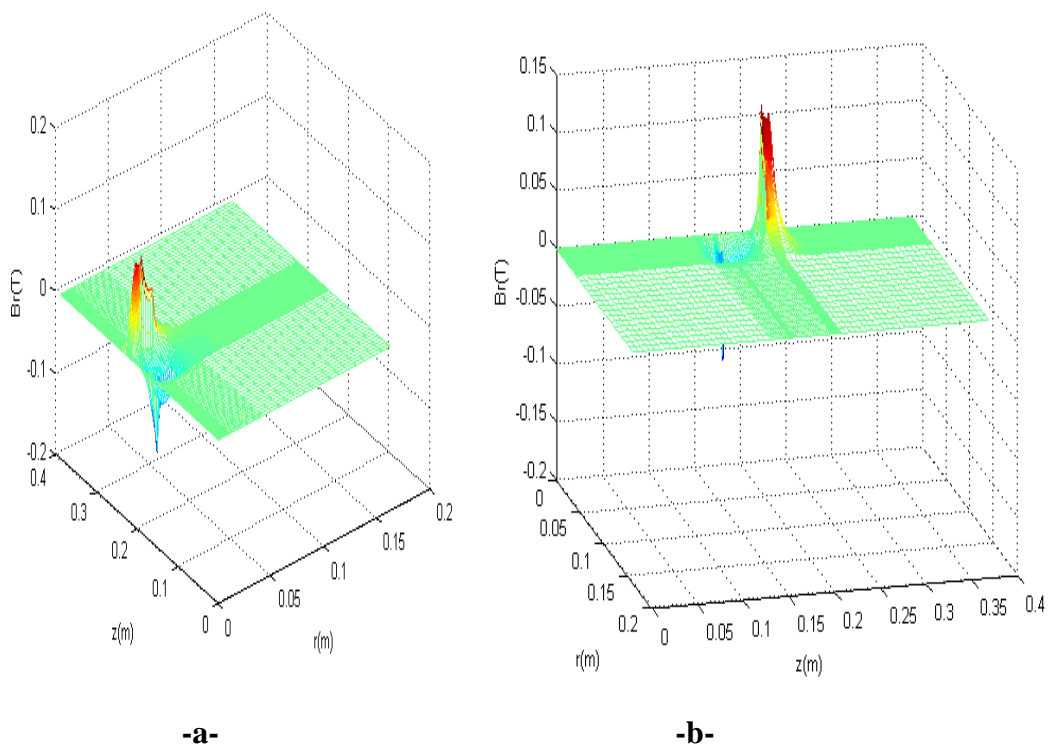


Figure IV.4 Répartition de l'induction magnétique B_r dans le plan (r, z) .

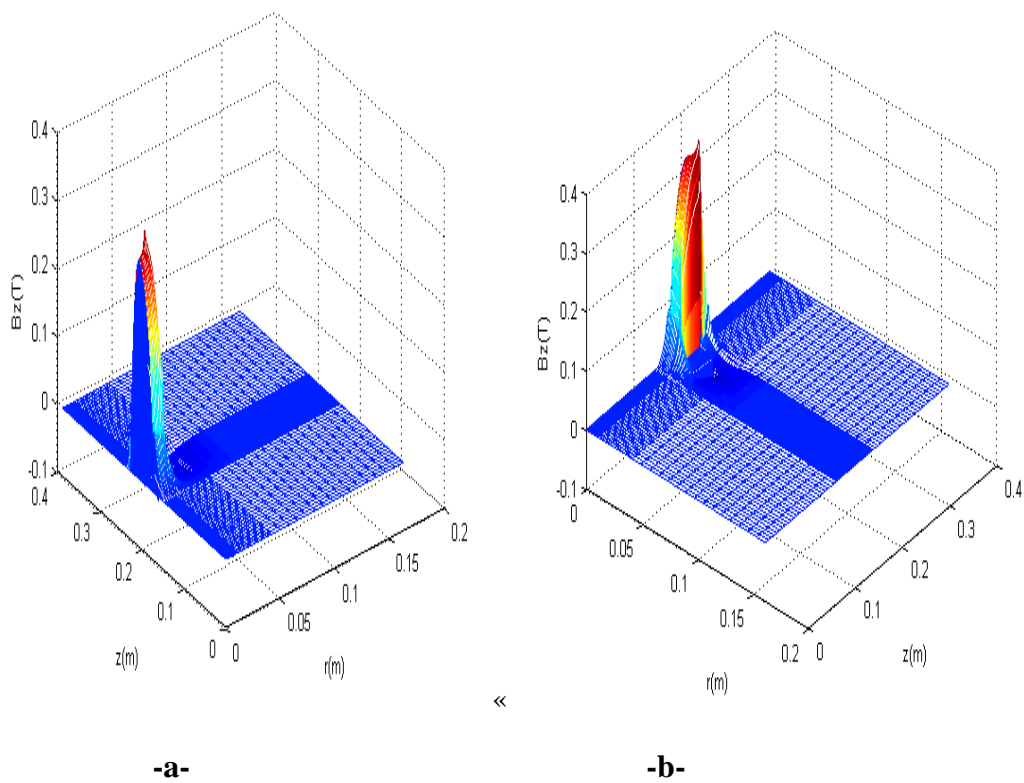
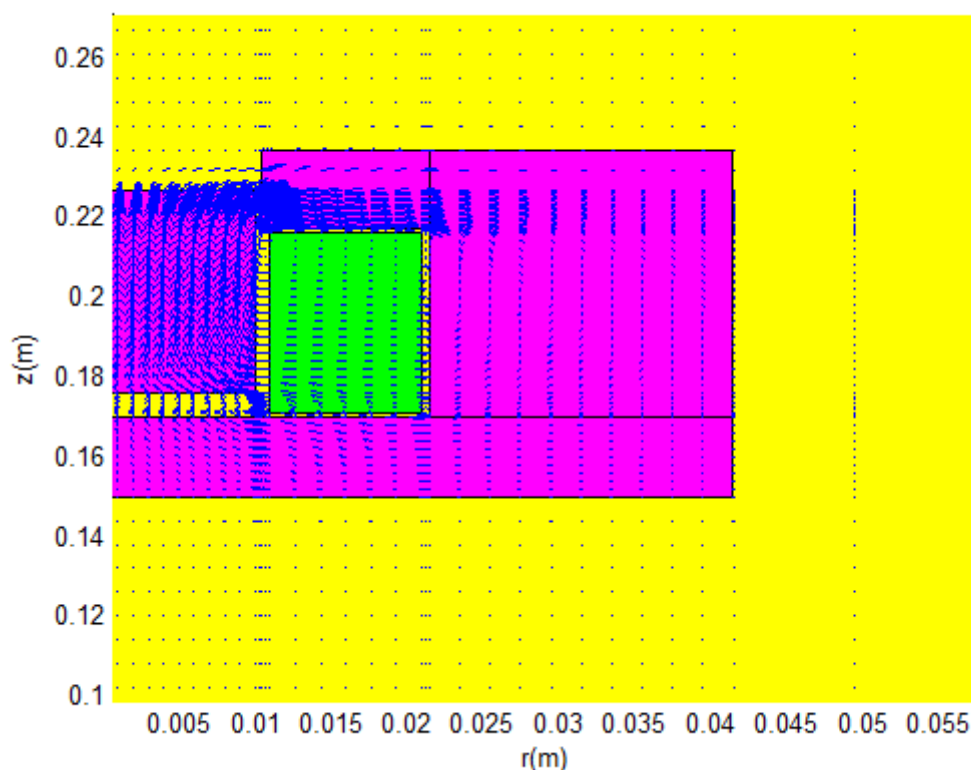


Figure IV. 5 Répartition de l'induction magnétique B_z dans le plan (r, z) .



FigureIV.6 Répartition du vecteur d'induction magnétique B dans le plan (r, z) .

IV.5 Effet de la densité de courant d'excitation et la perméabilité magétique sur la force magnétique pour différents valeur d'écart entre la partie fixe et mobile.

1- Les résultats pour un écart entre la partie mobile et fixe égale 5mm

Pour voir l'effet decourant excitation sur la valeur de la force verticale exercé sur la partie mobile, on a fait des calculs pour différents valeurs de courant (10^5 $3*10^5$ $5*10^5$ $1.9*10^5$) tout en gardant les autres paramètres fixes (la géométrie et la perméabilité magnétique). D'après les figures obtenues, l'augmentation du courantomplique l'augmentation de champ excitation et par la suite l'induction, puisque la perméabilité est constante (système linéaire), et donc les deux grandeurs influent sur la forces magnétique augmentent, et par conséquent la force magnétique.

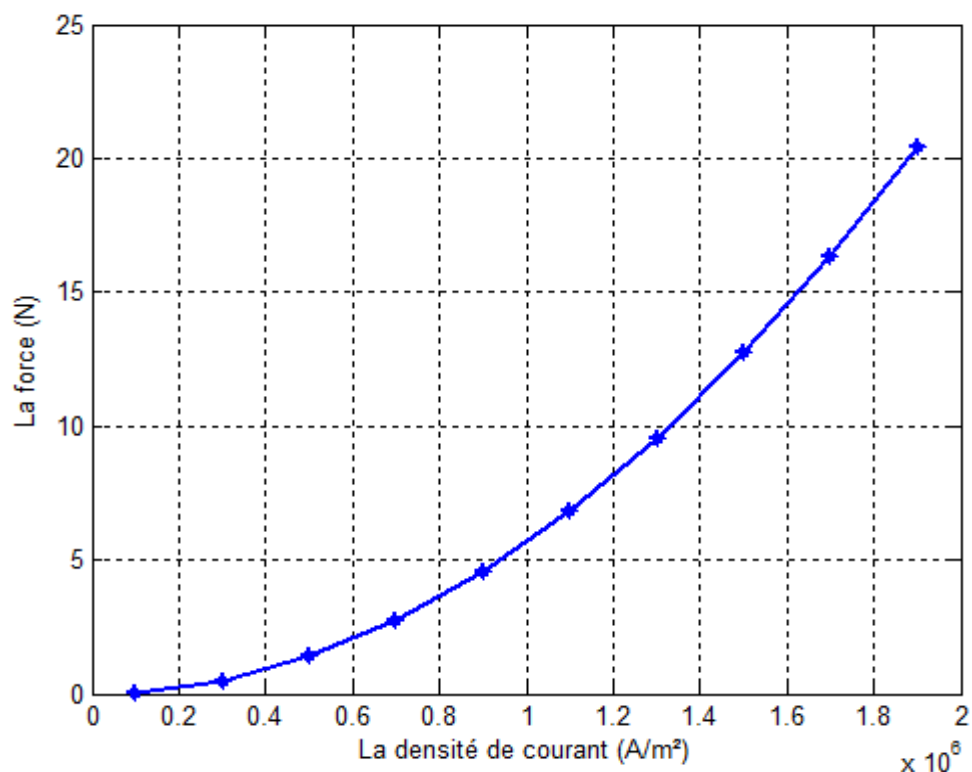


Figure IV.7 Effet de la densité de courant sur la force pour un écart entre la partie mobile et fixe égale 5mm

Pour voir l'effet de la valeur de la perméabilité relative sur la valeur de la force verticale exercée sur la partie mobile, on a fait des calculs pour différentes valeurs de la perméabilité (500, 600, 700, ... 1600) tout en gardant les autres paramètres fixes (c-à-d la géométrie et le courant d'excitation $J=3 \times 10^5 A/m^2$). D'après les figures obtenues, l'amélioration de la caractéristique magnétique de circuit, qui faite généralement à partir de l'augmentation de la perméabilité magnétique (diminution de la réluctance), donc suite l'induction magnétique augmenté, ce qui influe sur la forces magnétique.

D'après les deux figures III.8 III.7, on remarque que la force magnétique statique est influencée beaucoup plus par la densité de courant que par la perméabilité magnétique

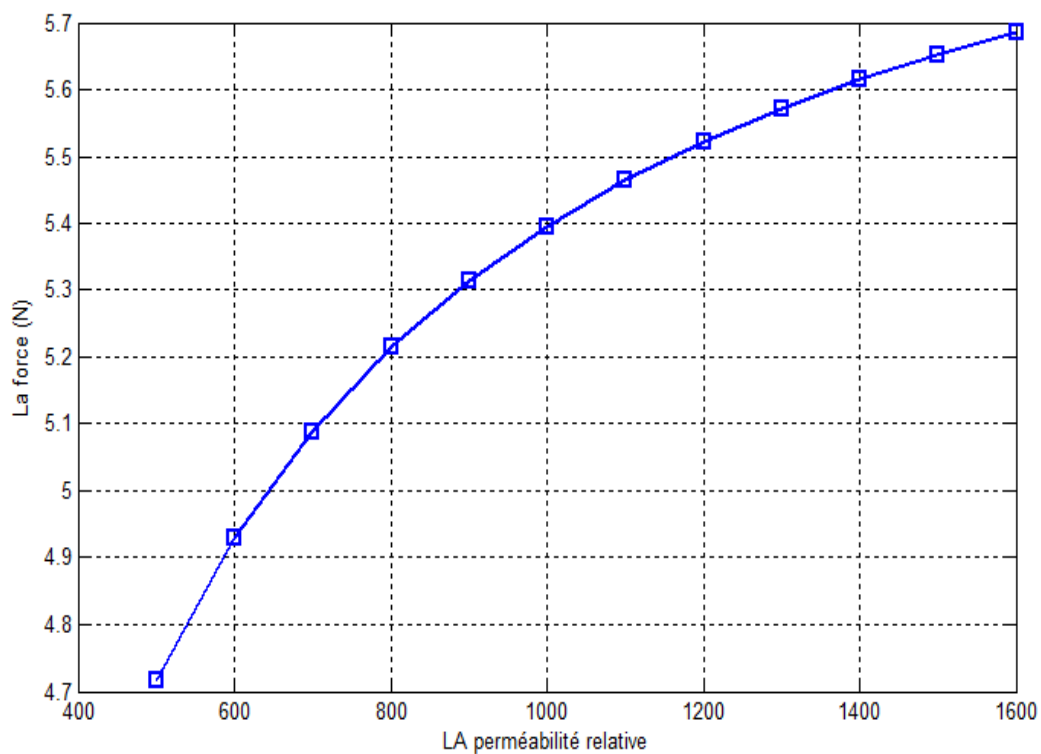
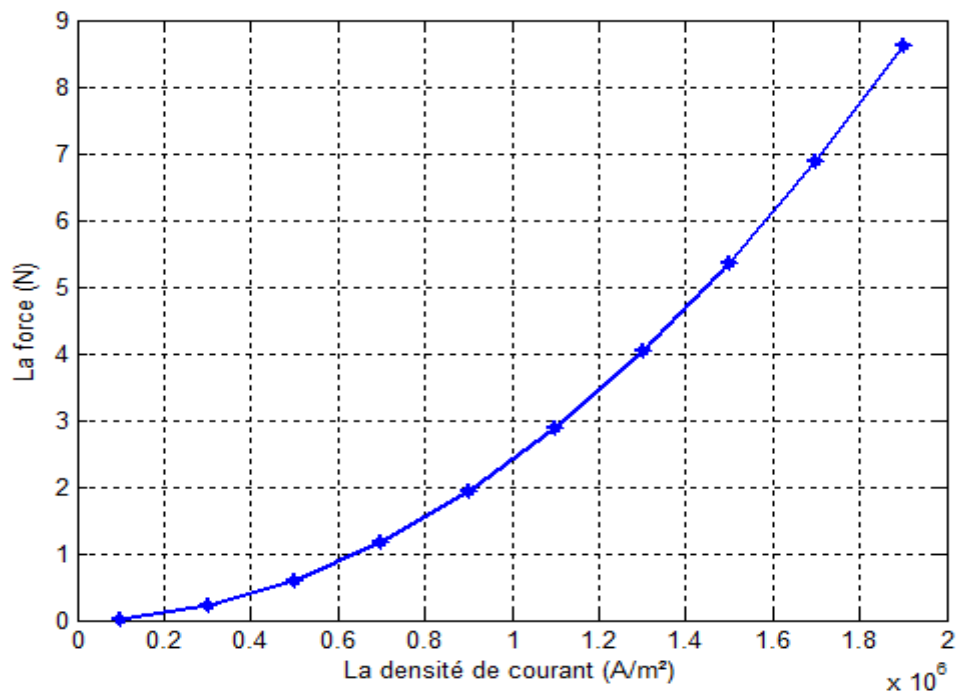


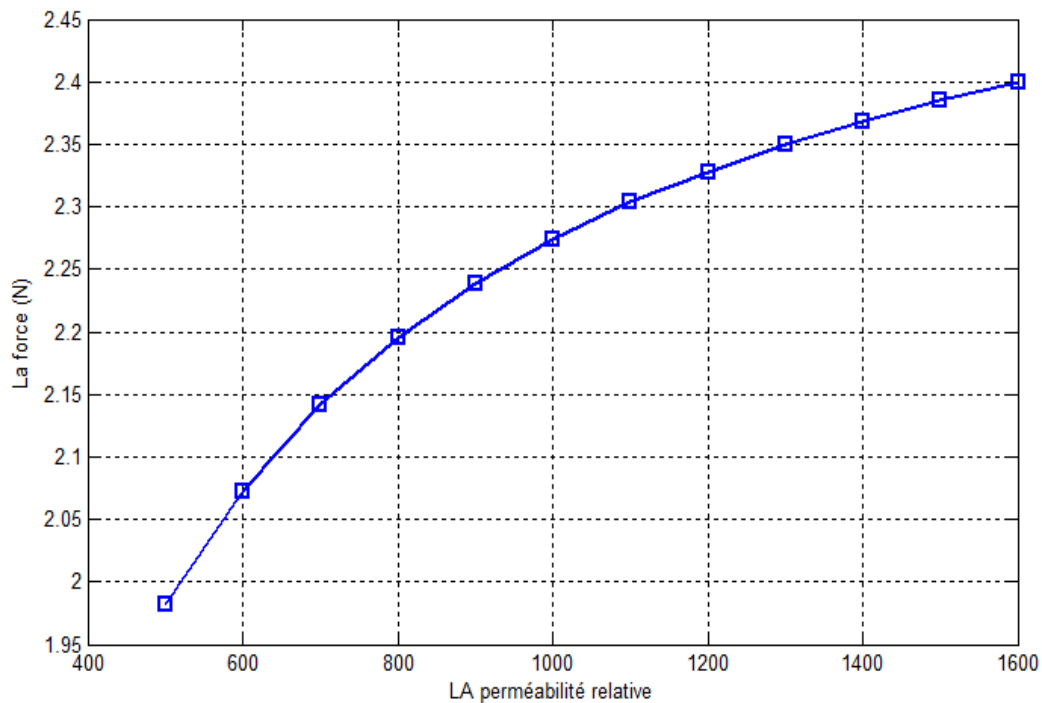
Figure IV .8 Effet de la perméabilité sur la force pour un écart entre la partie mobile et fixe égale 5mm.

2- Les résultats pour différents valeurs d'écart entre la partie mobile et fixe (7.5mm et 10mm)

Pour voir l'effet de l'écart entre la partie fixe et mobile (entrefer) sur la valeur de la force verticale exercé sur la partie mobile, on a fait des calculs pour différents valeurs d'écart (7.5mm, 10mm) tout en gardant les autres paramètres fixes (la géométrie et la perméabilité magnétique).



FigureIV.9 Effet de l'entrefer sur la force magnétique en fonction de la densité de courant (Pour un écart entre la partie mobile et fixe égale 7.5mm)



FigureIV.10 Effet de l'entrefer sur la force en fonction de la perméabilité relative (Pour un écart entre la partie mobile et fixe égale 7.5mm)

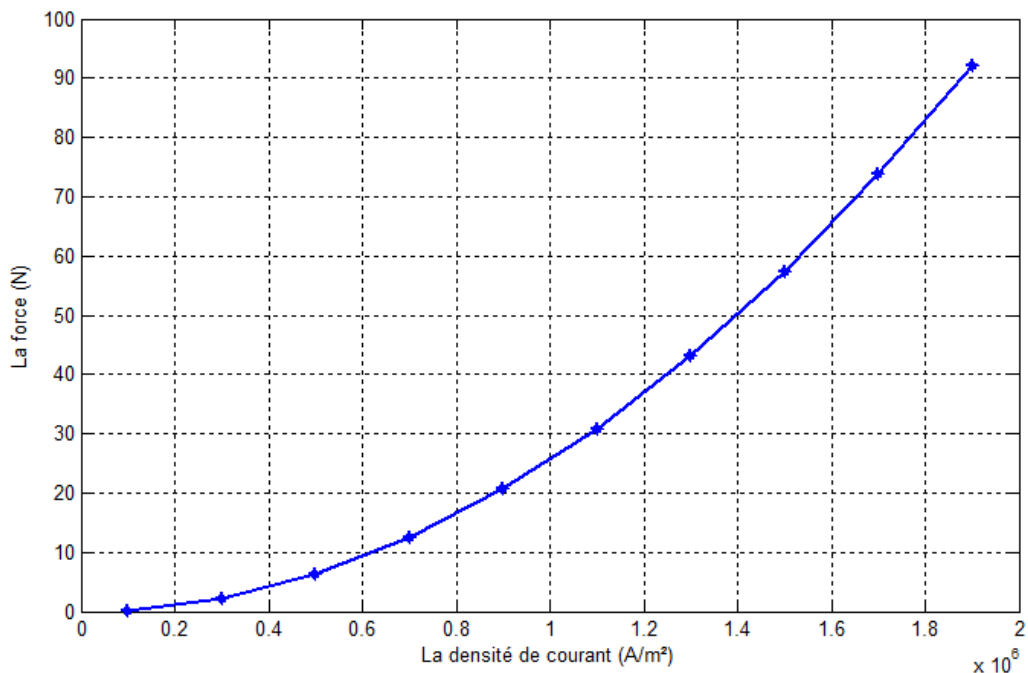


Figure IV.11 L'effet de l'entrefer sur la force en fonction de la densité de courant pour un écart entre la partie mobile et fixe égale 10mm

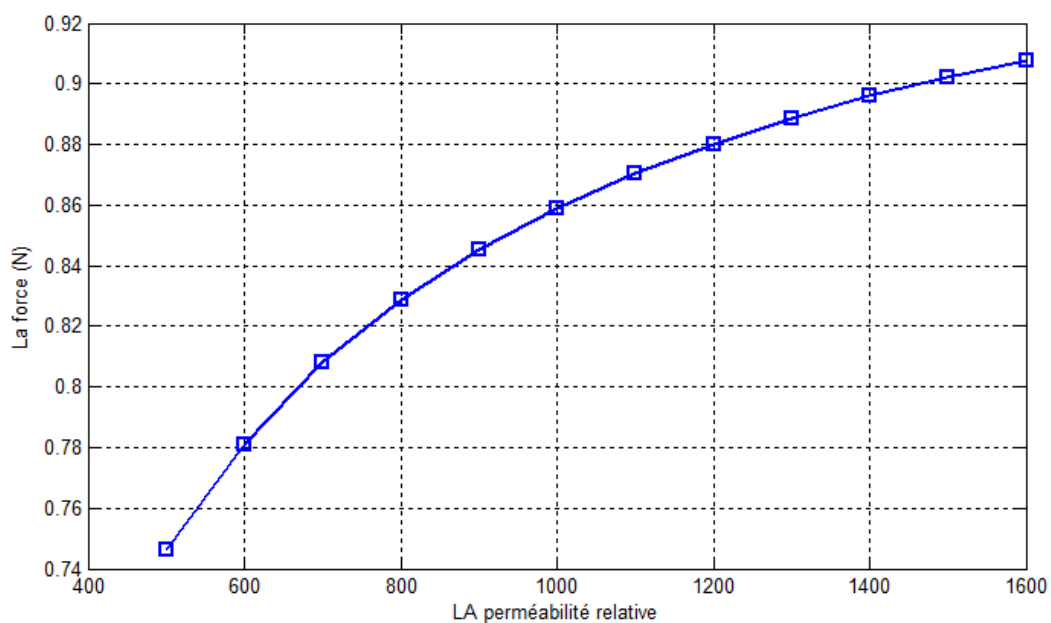


Figure IV.12 Effet de l'entrefer sur la force en fonction de la perméabilité relative pour un écart entre la partie mobile et fixe égale 10mm

D'après les figures obtenues, l'augmentation de l'écart implique une augmentation de l'entrefer et par la suite la réluctance totale de circuit magnétique, pour une valeur de courant d'excitation constant, si on augmente la réluctance de circuit, le flux totale

diminue et par conséquent l'induction magnétique cette diminution de flux influe sur la force magnétique statique.

IV.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a traité un système de conversion d'énergie qui est un électro-aimant à noyau plongeur. La force magnétique appliquée sur la partie mobile du circuit magnétique est conditionnée par plusieurs paramètres géométriques et physiques à savoir le courant d'excitation, la perméabilité magnétique du circuit et la longueur d'entrefer.

D'après les résultats obtenus, on peut dire que :

1. La force croît presque linéairement et d'une façon importante 90 % avec l'augmentation de courant d'excitation de 40%.
2. L'augmentation de la perméabilité magnétique de 40% fait une augmentation sur la valeur de la force statique de 3.2 % jusqu'à 4.2%.
3. L'augmentation de longueur de l'entrefer de 50% fait une diminution importante de sur la valeur de la force de 54%.

Conclusion générale

CONCLUSION GENERALE

Le mimore principal de ce mémoire est l'étude et le calcul de la force statique d'un électroaimant à noyau plongeur, on s'est intéressé à un dispositif type dont les conditions géométriques et physique sont choisies de manière à répondre aux exigences et à l'objectif du sujet.

Vu la complexité de l'équation aux dérivées partielles caractéristique de phénomène traité (phénomène électromagnétique) causé par les variations des identifications physiques la résolution de cette équation ne peut se faire que par une voie purement numérique, pour ceci la méthode des volumes finis est choisie comme méthode basée sur un principe de discrétisation celle-ci semble économique et simple à mettre en œuvre. Une méthode de résolution numérique qu'est la méthode de Gauss-Seidel.

Les résultats de la modélisation ainsi obtenus à caractère magnétique : le potentiel vecteur magnétique, l'induction magnétique, le champ magnétique, sont largement présentés et discutés.

Et de même pour les résultats obtenus à caractère mécanique.

Nous avons trouvé que la force est conditionnée par la géométrie et les grandeurs physique d'un électro-aimant, cette force est croître avec le courant d'excitation et la perméabilité magnétique et décroître avec l'augmentation de l'entrefer.

En perspective, nous proposons, en premier lieu la modélisation d'un dispositif de conversion d'énergie en tenant compte la dynamique. En moyen terme, une étude et calcul la force d'un dispositif de conversion d'énergie en tenant compte la non linéarité de la perméabilité magnétique

Références bibliographiques

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [01] Mouloud FELIACHI :“ Electroaimants pour systèmes électromécaniques ”, Article de technique de l’ingénieur (d5350), Institut universitaire de technologie de Saint-Nazaire, Université de Nantes, 10 février 2003.
- [02] Atika MAIOUFI : “Modélisation des phénomènes électromagnétiques non linéaires par la méthode des volumes finis” thèse Ingénieur, Université de Batna, Avril 2006.
- [03] Farid HOCINI : “ Association de la commande pour l’étude par éléments finis des phénomènes magnéto élastique et vibratoires dans les systèmes électrotechniques” ,thèse de doctorat, Université Mouloud de Tizi-Ouzou 2013.
- [04] Nassima BERGOUG : “Etude de l’influence des matériaux ferromagnétiques sur les performances d’une machine MHD par la modélisation numérique 2D” , thèse de Magister , Université de Batna2006.
- [05] Yamina BELKHIRI : “Modélisation des Phénomènes Electromagnétiques et Mécaniques Couplés par la Méthode des Volumes Finis (CVM)” , thèse de Ingénieur, Université de Batna.
- [06] NACEURE Sonia: “Contribution à La Modélisation Numérique D’une Pompe MHD En Tenant Compte De La Nature Des Matériaux Des Electrodes Et Du Fluide” , thèse de Magister, Université de Batna2007.
- [07] MOKRANI Lakhdar, « Contribution à la CAO optimisée des machines électriques, application au moteur linéaire à induction », thèse de doctorat, université de Batna 2005.
- [08] N. Ekhlef, « Modélisation numérique d’une installation convertisseur –plasma d’induction en vue d’une commande optimale », thèse de doctorat, université de Batna 2010.
- [09] P. Triwong, « Modélisation numérique 3D des phénomènes couplés dans les procédés d’élaboration par induction : couplage faible et couplage fort », Thèse de Doctorat, Institut Polytechnique de Grenoble, 2008.

Résumé:

Etude et Calcule la Force Statique d'un Electroaimant à Noyau Plongeur

Dans ce travail nous présentons une modélisation Axisymétrique des phénomènes électromagnétiques appliqués pour le déplacement linéaire d'un noyau en acier ferromagnétique massif. Les phénomènes mécaniques sont couplés à l'électromagnétisme par les inductions et des champs magnétiques et par conséquent les forces magnétiques. La méthode des volumes finis à été adoptée comme méthode de résolution des équations aux dérivées partielles caractéristiques au problème a modélisé.

Mots clés: Electro-aimant ,co-énergie ,méthodes volumes finis , phénomènes électromagnétique .

ملخص:

دراسة وحساب القوة الثابتة لدارة كهرومغناطيسي ذات الجزء المتحرك

نهتمفي هذا العمل بدراسة واحدة من تطبيقات الظواهر الكهرومغناطيسية في الأجهزة المتناظرة للتنقلات الخطية لنواة الدارة المغناطيسية . الظواهر الميكانيكية مرتبطة بالظواهر الكهرومغناطيسية عن طريق القوى المغناطيسية التي تنشأ من خلال وجود حقل مغناطيسي وبالتالي التحريض المغناطيسي . طريقة الأحجام المنتهية وغوس صايدال استعملنا في هذه المذكرة لتحويل المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية الى المعادلات الجبرية وحلها .

الكلمات المفتاحية:

الكهرومغناطيسي، مرافق الطاقة، طريقة الأحجام المنتهية، الظواهر الكهرومغناطيسية .

Abstract:

Study and Calculates the Static Force of a Solenoid Plunger

In this work we present an Axisymmetric modeling of electromagnetic phenomena applied to the linear movement of a solid ferromagnetic steel core. Mechanical phenomena are coupled by electromagnetic inductions and magnetic fields and therefore the magnetic forces. The finite volume method has been adopted as a method for solving partial differential equations characteristic to the problem modeled.

Key words: Electromagnetic, magnetic phenomena, finite volume method, co-energie.