

UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Sciences Appliquées

Département de Génie Electrique



Mémoire

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et technologies

Filière : Génie électrique

Spécialité : Matériaux électrotechnique

Présenté par :

BENDAOUD Mohamed Abed Elhalim

HAFIANE Mohamed Tarek

Thème:

**Modélisation des Phénomènes magnéto-thermique
dans les dispositifs de limiteur de courant à base de
supraconducteur à haute température critique**

Soutenu publiquement

Le :08/06/2015

Devant le jury :

M^{lle} BELKEBIR Amel

MA (A)

Président

UKM Ouargla

M^r BEN ALIA Khaled

MC (B)

Encadreur/rapporteur

UKM Ouargla

M^{me} NACEUR Sonia

MA (A)

Examineur

UKM Ouargla

Année universitaire 2014/2015

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

À mes parents

À mes frères et sœurs

À Toute la famille et la famille universitaire

À mes amis

Bendaoude Mouhamed Abdelhalim

Dédicace

Je dédie ce mémoire

À mes chers parents ma mère et mon père

Pour leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements

À mes frères

À ma seule sœur

À mes amies et mes camarades

Sans oublier tous les professeurs et toute la famille universitaire.

Hafiane Med Tarek

REMERCIEMENT

*Nous tenons tout d'abord à remercier « Dieu » le tout puissant. Nous remercions vivement notre encadreur: **Dr. Khaled BEN ALIA** qui a Un rôle important dans le déroulement de cette étude. Pour son aide, ainsi que pour la confiance qu'il nous a prodiguée durant la réalisation de ce travail. Nos plus vifs remerciements s'adressent également aux membres de jury qui nous ont honorés en acceptant d'évaluer ce travail :*

1- M^{lle} BELKEBIR Amel

2- M^r BEN ALIA Khaled

3- M^{me} NACEUR Sonia

Que tous les enseignants qui ont contribué à notre formation reçoivent notre gratitude et en particulier ceux du département de génie électrique de l'université d'Ouargla.

Nous aimerons à présent remercier nos proches et en premier lieu nos parents de nous avoir soutenus et d'avoir cru en nous. Nous remercions aussi nos frère et nos sœurs.

Sans oublier d'exprimer nos remerciements à tous nos amis et à tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin.

✓ *BENDAOU MOHAMED ABDEL HALIM*

✓ *HAFIANE MOHAMED TAREK*

Sommaire

Introduction Générale	1
-----------------------------	---

Chapitre I : L'Etat de Supraconducteur

I.1 INTRODUCTION	3
I.2 Historique De La Supraconductivité.....	3
I.3 La Supraconductivité.....	6
I.4 Propriétés Des Matériaux Supraconducteurs	7
I.4.1 Résistivité	7
I.4.2 Aimantation	8
I.5 Les Grandeurs Critiques.....	9
a) Température critique	9
b) Champ magnétique critique H_c	10
c) Densité de courant critique J_c	10
I.6 Classification des supraconducteurs selon H_c.....	11
I.6.1 Supraconducteur de type I.....	11
I.6.2 Supraconducteur de type II.....	11
I.7 Effet Meissner	13
I.8 Modèle De Supraconducteur	13
I.8.1 Modèle de Bean.....	13
I.8.2 Modèle de Flux Flow et Flux Creep	14
I.8.3 Modèle de la loi en puissance $E - J$	15
I.8.4 Le modèle de KIM	16
I.9 Limiteur de courant de défaut	16
I.9.1 Autres intérêts	17
I.9.2 Contraintes de conception	17
I.9.3 Limiteur de courant a semi-conducteurs ...	18
I.9.3.1 À semi-conducteurs en série	18
I.9.3.2 À semi-conducteurs en pont	19
I.9.3.3 À supraconducteurs.....	19
I.9.4 Supraconducteur résistif.....	19
I.10 Applications Des Supraconducteurs En Electrotechnique	21
I.10.1 Les applications ´médicales	22
I.10.2 Stockage de l'énergie	23

I.10.3	Les trains à lévitation magnétique.....	23
I.10.4	Machines électriques	23
I.10.5	Transformateur et limiteur de courant de court-circuit.....	24
I.10.6	Transport de l'énergie	25
I.11	CONCLUSION.....	26
Chapitre II : Formulation Mathématique en électromagnétisme		
II.1	INTRODUCTION.....	26
II.2	Les Equations De Maxwell.....	26
II.3	Lois constitutives des milieux	27
II.4	Interprétation physique des équations de MAXWELL.....	27
II.4.1	Equations de couplages électromagnétiques	27
a)	Loi d'induction de FARADAY	27
b)	Théorème D'ampère.....	28
c)	Les équations de conservations.....	29
d)	Théorème de GAUSS.....	29
e)	Loi de comportement des matériaux (milieu physique)	30
II.5	Formulation des équations électromagnétiques.....	30
II.5.1	Modèle Electrostatique	30
II.5.2	Modèle Electrocinéétique	31
II.5.3	Modèle Magnétostatique.....	32
a)	Modèle magnétostatique scalaire	32
b)	Modèle magnétostatique vectorielle.....	32
II.5.4	Le Modèle magnétodynamique.....	33
II.6	Formulation de L'équation Magnétodynamique	34
II.7	Formulation de l'équation thermique :.....	36
II.8	Le Modèle Cylindrique Axisymétrique En Electromagnétisme	36
II.8.1	L'équation magnétodynamique d'un système cylindrique axisymétrique	37
II.9	Différentes techniques de résolutions des équations aux dérivées partielles.....	39
II.9.1	Méthode des Eléments Finis (MEF).....	39
II.9.2	Méthode des Différences Finis (MDF).....	40
II.9.3	Méthode des intégrales de frontières (MIF)	41
II.9.4	Méthode des Volumes Finis (MVF).....	41
II.10	CONCLUSION	42

Chapitre III : Modèle Numérique

III.1	Introduction	43
III.2	Principe de la méthode des volumes finis.....	43
III.3	Discretisation de l'équation magnétodynamique bidimensionnelle axisymétrique	43
III.3.1	Le point principale 'P' est à l'intérieur du volume fini.....	44
III.3.2	Le point principale 'P' est sur l'une des frontières du volume fini.....	46
III.4	L'équation thermique	47
III.5	Les conditions aux limites.....	49
III.5.1	Condition de Dirichlet.....	49
III.5.2	Condition de Neumann.....	50
III.6	Propriétés physiques aux interfaces.....	50
III.7	Méthode de résolution numérique des systèmes d'équations algébriques.....	50
III.7.1	Méthodes Directes.....	51
III.7.2	Méthodes Itératives.....	51
III.7.2.1	Méthode de Jacobi.....	51
III.7.2.2	Méthode de Gauss Seidel.....	51
III.7.2.3	Méthode de Relaxation.....	52
III.8	Algorithme de résolution.....	52
III.9	CONCLUSION.....	55

Chapitre IV : Application et validation

IV.1	Introduction.....	56
IV.2	Dispositif.....	56
IV.3	Résultats Des Simulations.....	57
IV.4	Répartition spatiale de la température T au sein de la pastille supraconductrice	59
IV.5	L'influence de la valeur de la densité du courant critique J_c sur le comportement thermique d'un limiteur du courant.....	62
IV.6	L'influence de la géométrie de la pastille supraconductrice sur le comportement résistif d'un limiteur du courant	65
IV.7	Conclusion	67
	Conclusion générale.....	68
	Bibliographique	69

Liste Des Figure

Chapitre I : L'Etat de Supraconducteur

Figure.I.1 HeikeKamerlingOnnes	3
Figure.I.2 John Bardeen, Leon Neil Cooper, John Robert Schrieffer	5
Figure.I.3 Brian Josephson	5
Figure.I.4 Résistivité d'un supraconducteur en fonction de la température	7
Figure.I.5 Diamagnétisme parfait des supraconducteurs	8
Figure.I.6 Evolution de la résistivité électrique en fonction de la température	9
Figure.I.7 Température critique et année de découverte de quelques matériaux supraconducteurs	10
Figure.I.8 Surface critique délimitant la zone supraconductrice	11
Figure.I.9 caractéristique $B(H)$ d'un supraconducteur de type I	12
Figure.I.10 Caractéristique $B(H)$ d'un supraconducteur de type II	12
Figure.I.11 modèle de Flux Flow et Creep	15
Figure.I.12 Schéma d'un limiteur de courant à semi-conducteur	17
Figure.I.13 Schéma d'un pont à semi-conducteur limiteur de courant	18
Figure.I.14 Limiteur de courant de défaut à supraconducteur avec une inductance en parallèle	19
Figure.I.15 En temps normal, l'élément supraconducteur a une résistance nulle	20
Figure.I.16 En cas de court-circuit, l'élément supraconducteur retourne à l'état normal et limite le courant	20
Figure.I.17 Après un court-circuit, l'élément supraconducteur a besoin de temps pour revenir à l'état supraconducteur	20

Figure.I.18 IRM	22
Figure.I.19 La force magnétique représentée est celle qui permet la lévitation du train	23
Figure.I.20 train MagLev(552 km/h)	23
Figure.I.21 Limiteur de courant	24
Figure.I.22 Vue en coupe d'un λ de NbSn de Bruker. Source	25

Chapitre II : Formulation Mathématique en électromagnétisme

Figure II.1 Dispositif axisymétrique ou le courant selon la direction (oz) et dispositif axisymétrique ou le courant selon la direction ($e\phi$)	37
Figure.II.2 Un domaine d'étude discrétisé en Elément finis	40

Chapitre III : Modèle Numérique

Figure.III.1 Maillage du domaine d'étude. Rappelons l'équation	44
Figure.III.2 Description d'un volume Fini	44
Figure.III.3 Le point principal sur les frontières	46
Figure.III.4 Description d'un nœud principal à l'interface	50
Figure.III.6 Organigramme du code de calcul	53
Figure.III.7 Algorithme de résolution du code de calcul de la résolution de l'équation électromagnétique et thermique	55

Chapitre IV : Application Et Validation

Figure.IV.1 Maillage du dispositif	57
Figure .IV.2 L'allure du courant de court-circuit appliqué	58
Figure .IV.3 La variation de la température moyenne en fonction du temps	59
Figure .IV.4 La distribution de la température	60
Figure .IV.5 Les pertes en fonction du temps	60

Figure .IV.6 La distribution de champ électrique	61
Figure .IV.7 La distribution de courant électrique	61
Figure .IV.8 La variation de la température moyenne en fonction du temps	62
Figure .IV.9 La distribution de la température	63
Figure .IV.10 Les pertes en fonction du temps	63
Figure .IV.11 La variation de la résistance moyenne en fonction du temps	64
Figure VI.12 La variation de la résistance en fonction de temps a défèrent géométrie des pastilles	66
Figure VI.14 La variation de les températures en fonction de temps a défèrent géométrie des pastilles en différent densité de courant	66

Liste Des Tableaux

Tableau I.1: Résumé de l'historique de la supraconductivité	5
Tableau I.2: Comparaison entre le comportement magnétique d'un conducteur parfait et celui d'un supraconducteur idéal	9
Tableau IV.1 : Paramètres de la simulation pour la pastille Bi-2212	57
Tableau IV.2 : Caractéristiques géométriques des différentes pastilles étudiées	65

Liste Des Abréviations Et Des Symboles

I_c [A] : courant de court-circuit.

J_c [A / m²] : densité du courant critique.

U_n [V] : tension nominale composée.

V_n [V] : tension nominal simple.

I(t) [A] : courant de court-circuit instantané.

B [T] : induction magnétique.

E [V/m] : champ électrique.

E_c [V/m] : champ électrique critique.

H [A/m] : champ magnétique.

H₀ [A/m] : champ magnétique à la surface du supraconducteur.

H_c [A/m] : champ magnétique critique.

H_{c1} [A/m] : premier champ magnétique critique.

H_{c2} [A/m] : second champ magnétique critique.

I_c [A] : courant critique.

J [A/m²] : densité de courant.

J_c [A/m²] : densité de courant critique.

I [A/m] : aimantation développée dans le matériau.

n: puissance de J de la relation E(J) dans un matériau supraconducteur.

P_v [W/m³] : puissance des pertes par unité de volume.

T [K°] : température.

T_c [K°] : température critique.

χ : susceptibilité magnétique.

μ [H/m] : perméabilité magnétique.

μ₀ [H/m] : perméabilité magnétique du vide.

δ [s. m⁻¹]: Conductivité électrique

ε [F. m⁻¹]: Permittivité

v [m. H⁻¹] : Réductivité magnétique

MVF : Méthode des volumes finis.

SFCL : Superconducting fault current limiter.

SHTC : supraconducteur à haute température critique.

INTRODUCTION GENERA

Introduction Générale :

Depuis leur découverte en 1911, les matériaux supraconducteurs à basse température critique ont présentes un intérêt pour les applications en électrotechnique, par exemple, les transformateurs, les moteurs, les électro-aimants. Et à partir de 1986, la découverte des matériaux supraconducteurs à haute température critique, c'est à dire les matériaux qui sont supraconducteurs au-dessus d'une température de 77 K, a présenté un intérêt grandissant pour cette technologie grâce à une minimisation des couts liés au refroidissement [1].

Les propriétés exceptionnelles de ces matériaux peuvent être utilisées dans la production, le transport et le stockage de l'énergie électrique, l'application la plus prometteuse semble être la protection des réseaux par l'utilisation des limiteurs de courant conçu à partir d'un matériau supraconducteur à haute température critique [21].ces matériaux possèdent une résistance nulle dans une certaine plage de courant, peuvent également développer une résistance importante en cas de dépassement du courant critique du matériau. Ces limiteurs sont utilisés pour la protection les réseaux électriques, ils sont considérés comme des nouveaux systèmes complémentaires aux appareils des protections classiques (disjoncteurs, sectionneurs, interrupteurs) à cause de sa rapidité et absence des problèmes liés au déclenchement.

L'objectif de ce mémoire est de présentés les différentes caractéristiques des SHTc, ainsi de modélisé le comportement magnétique et thermique de limiteur de courant conçu à partir d'un supraconducteur à haute température critique durant le processus de la limitation du courant de défaut.

Ce mémoire de master s'articule autour de quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré à l'étude théorique sur les matériaux supraconducteurs, en particulier les supraconducteurs à haute température critique ainsi que les différentes modèles ainsi que leurs applications dans le domaine du génie électrique.

Le deuxième chapitre présentera les équations aux dérivées partielles (EDP), dons le domaine magnétothermique ainsi que leurs interprétation physique.

Le troisième chapitre est consacré au Modèle Numérique (MVF Méthode de Volume finie) adopté pour la résolution des équations aux dérivées partielles caractéristiques aux phénomènes électromagnétique et thermique à traiter. Les procédures d'implémentation, sous

l'environnement MATLAB, des modèles mathématico-numériques développés dans le cadre de ce travail sont aussi présentées.

Le quatrième chapitre présentera les résultats des simulations des comportements magnétique et thermique d'un limiteur de courant supraconducteur obtenus à partir d'un code de calcul développé et implémenté sous l'environnement MATLAB. Ces résultats concernant le calcul et la visualisation de la répartition spatiale des différentes grandeurs électromagnétiques et thermiques au sein de la pastille supraconductrice utilisée pour limiter le courant de défaut.

Nous terminerons par une conclusion générale et perspectives envisagée.

Chapitre I :

L'Etat Supraconducteur

- ❖ Introduction
- ❖ Historique De La Supraconductivité
- ❖ La Supraconductivité
- ❖ Propriétés Des Matériaux Supraconducteurs
- ❖ Les Grandeurs Critiques
- ❖ Classification des supraconducteurs selon H_c
- ❖ Effet Meissner
- ❖ Modèle De Supraconducteur
- ❖ Limiteur De Courant De Défaut
- ❖ Applications Des Supraconducteurs En Electrotechnique
- ❖ Conclusion

I.1 INTRODUCTION :

Ce chapitre est consacré à la présentation des matériaux supraconducteurs et de leurs applications. Après un rappel de l'histoire de la supraconductivité, nous citons les propriétés fondamentales des matériaux supraconducteurs. Nous présentons aussi la définition des supraconducteurs de type I et de type II. A la fin de ce chapitre, nous établissons un récapitulatif des principales applications des supraconducteurs, haute température critique en électrotechnique.

I.2 Historique De La Supraconductivité :

En 1911, deux ans après avoir réussi la liquéfaction de l'Hélium - atteignant alors la plus basse température connue : 4,2 Kelvin (K), c'est-à-dire -269°C - le physicien Heike Kamerlingh Onnes proposa à son élève Gilles Holst de mesurer la résistivité d'un barreau de mercure. Ils découvrirent que celle-ci s'annulait en dessous de 4,15 K. Holst fit et refit les expériences, vérifia les instruments de mesure mais le doute n'était plus permis : le comportement se confirmait.



Figure.I.1: Heike KamerlingOnnes

L'année suivante, Onnes découvrit que l'étain et le plomb (qui est un très mauvais conducteur à température ambiante), perdaient leur résistance respectivement à 3,7 K et 6 K. L'absence de résistivité du matériau, c'est-à-dire que celle-ci ne soit ni faible ni très faible mais totalement absente, est le premier phénomène spectaculaire de la supraconductivité.

En 1933, W. Meissner et R. Oschenfeld découvrirent la propriété d'un barreau de métal pur à être imperméable aux champs magnétiques : le diamagnétisme parfait, que l'on appelle depuis

effet Meissner. Ce diamagnétisme, qui est le second effet surprenant de la supraconductivité, se traduit par la capacité d'un supraconducteur à émettre un champ magnétique opposé à un autre champ qui lui serait appliqué, et ce, quelle que soit la polarité du champ appliqué.

Sans aucune théorie sur laquelle s'appuyer, les chercheurs durent se contenter d'expérimenter, presque au hasard, différents alliages à base de titane, de strontium, de germanium et surtout de niobium, qui donnait les meilleurs résultats. Des recherches furent même menées dans le domaine des molécules organiques, essentiellement avec les fullerènes ou footballènes, avec des températures de l'ordre de 33 K.

La question de l'origine de la supraconductivité hantait les scientifiques : « D'où vient ce phénomène qu'aucune théorie n'avait soupçonné auparavant ? » En 1935, des théories incomplètes bien que puissantes furent proposées par les frères London puis en 1950 par V. Ginzburg et L. Landau.

Mais en 1957, apparut la théorie B.C.S, du nom de ses découvreurs John Bardeen, Leon Cooper et John Schiffer, qui décrivait en partie le principe fondamental de la supraconductivité. Cette théorie, que nous expliciterons dans la suite de ce projet, stipule qu'à basse température, les électrons se déplacent par paires, appelées paires de Cooper, sous la forme de phonons. C'est grâce à cette théorie de base que les chercheurs ont pu progresser dans leur recherche de matériaux supraconducteurs à « haute température ». Les alliages contenant du Niobium se révélant les plus efficaces, on l'utilisa donc dans la majorité des composés supraconducteurs. Malheureusement, tous les alliages testés ne dépassaient pas une température supérieure à 23 K et la théorie B.C.S semblait avoir trouvé ses limites.

Parallèlement à ces recherches, Brian Josephson prédit en 1962 les effets quantiques qui portent son nom et sont utilisés en détection ultrasensible des champs magnétiques. La découverte de Josephson, qui laissa pantois tous les chercheurs, explique qu'un courant électrique non nul pouvait circuler d'un bloc supraconducteur à un autre bloc supraconducteur séparé du premier par une mince couche isolante, en l'absence même de différence de potentiel entre les deux blocs. Cette théorie fut vérifiée expérimentalement quelques années plus tard, ce qui valut à Josephson et Giaver de recevoir le prix Nobel en 1974 [2].



Figure.I.2: John Bardeen, Leon Neil Cooper,
John Robert Schrieffer

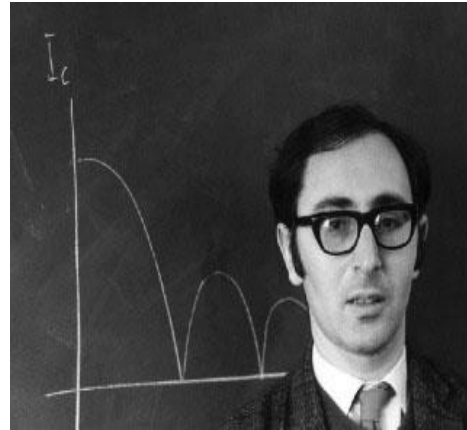


Figure.I.3: Brian Josephson

1908	Liquéfaction de l'hélium
1911	Kammerling-Onnes découvre la supraconductivité du mercure en dessous de 4,2 K
1933	W. Meissner et R. Ochsenfeld découvre le diamagnétisme parfait associé à l'état supraconducteur
1935	Théorie de London sur le comportement électrodynamique des supraconducteurs
1957	J. Bardeen, N. Cooper et J.R. Schrieffer propose une explication quantique de la supraconductivité (théorie BCS)
1961	Confirmation expérimentale de la valeur du fluxoïde (quantum de flux) Cette découverte prouve l'existence de paires de Cooper
1962	B. D. Josephson prédit de manière théorique l'effet tunnel des paires de Cooper à travers une couche mince isolante (oxyde)
1965	Fabrication de câbles en NbTi
1987	Supraconductivité à 92 K dans les composés $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$
1993	$T_c = 135 \text{ K}$ des composés $\text{HgBa}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{8-\delta}$
2001	Découverte des propriétés supraconductrices du composé MgB_2

Tableau I.1: Résumé de l'histoire de la supraconductivité [2].

I.3 La Supraconductivité :

La supraconductivité, capacité d'un métal à laisser passer le courant électrique sans perte d'énergie, peut avoir des applications étonnantes. L'étude de ce phénomène fait intervenir divers domaines des mathématiques, comme le calcul des variations, les équations aux dérivées partielles, l'analyse asymptotique.

La supraconductivité (ou supraconduction) est un phénomène caractérisé par l'absence de résistance électrique et l'expulsion du champ magnétique l'effet Meissner à l'intérieur de certains matériaux dits supraconducteurs. La supraconductivité découverte historiquement en premier, et que l'on nomme communément supraconductivité conventionnelle, se manifeste à des températures très basses, proches du zéro absolu ($-273,15\text{ }^{\circ}\text{C}$). La supraconductivité permettrait notamment de transporter de l'électricité sans perte d'énergie, les applications potentielles sont donc stratégiques.

Dans les supraconducteurs conventionnels, des interactions complexes se produisent entre les atomes et les électrons libres et conduisent à l'apparition de paires liées d'électrons, appelées paires de Cooper. L'explication de la supraconductivité est intimement liée aux caractéristiques quantiques de la matière. Alors que les électrons sont des fermions, ces paires d'électrons se comportent comme des bosons, de spin égal à 0, et sont « condensées » dans un seul état quantique, sous la forme d'un superfluide de paires de Cooper.

Un effet similaire de la supraconductivité est la superfluidité ou suprafluidité, caractérisant un écoulement sans aucune résistance, c'est-à-dire qu'une petite perturbation que l'on soumet à ce type de liquide ne s'arrête jamais, de la même façon que les paires de Cooper se déplacent sans aucune résistance dans un supraconducteur.

Il existe également d'autres classes de matériaux, collectivement appelés « supraconducteurs non conventionnels (par opposition à la dénomination de supraconductivité conventionnelle), dont les propriétés ne sont pas expliquées par la théorie conventionnelle. En particulier, la classe des cuprates ou « supraconducteurs à haute température critique », découverte en 1986, présente des propriétés supraconductrices à des températures bien plus élevées que les supraconducteurs conventionnels. Toutefois, ce que les physiciens nomment « haute température » reste extrêmement bas comparativement aux températures à la surface de la Terre (le maximum est 133 K, soit $-140\text{ }^{\circ}\text{C}$) [3]

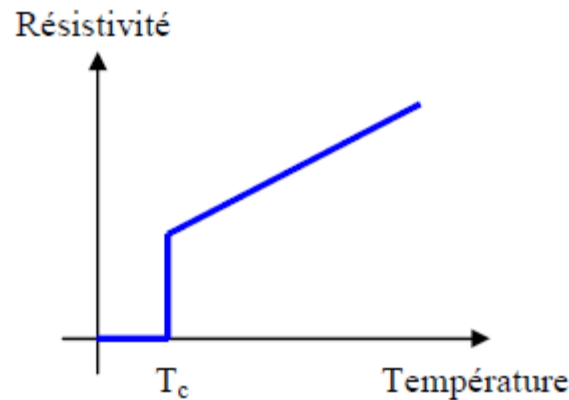


Figure. I.4: Résistivité d'un supraconducteur en fonction de la température

I.4 Propriétés Des Matériaux Supraconducteurs :

La supraconductivité, qui n'apparaît qu'en dessous d'une certaine température critique et d'un certain champ magnétique appliqué, est caractérisée par quelques propriétés spécifiques.

L'absence de résistivité ($<10^{-25}\Omega m$) en courant continu, est le phénomène le plus intéressant pour ce qui concerne le transport de l'énergie électrique.

Le diamagnétisme parfait est un autre aspect important. Quand un échantillon supraconducteur est refroidi en dessous de sa température critique puis placé dans un champ magnétique, celui-ci est éjecté de l'échantillon (Figure. I.5). La susceptibilité χ dans l'échantillon est égale à -1 (diamagnétisme parfait). C'est l'effet Meissner. C'est l'apparition de courant supraconducteur de surface qui empêche le champ magnétique de pénétrer à l'intérieur du matériau [3].

I.4.1 Résistivité :

La « première signature » du caractère supraconducteur d'un matériau est sa résistivité nulle en dessous d'une certaine température T_c , appelée température critique qui se traduit par une transition franche, et sépare ainsi le comportement de l'état normal du matériau de celui de son état supraconducteur. L'intervalle de température dans lequel la résistivité change brusquement est très étroit et il est inférieur à $10^{-5}K$ dans le gallium très pur [4]. Ceci indique que l'état supraconducteur est un nouvel état de la matière, autrement dit un état qui

correspond à un arrangement particulier du système des électrons. On peut donc dire que le franchissement de la température critique correspond à une transition de phase.[3]

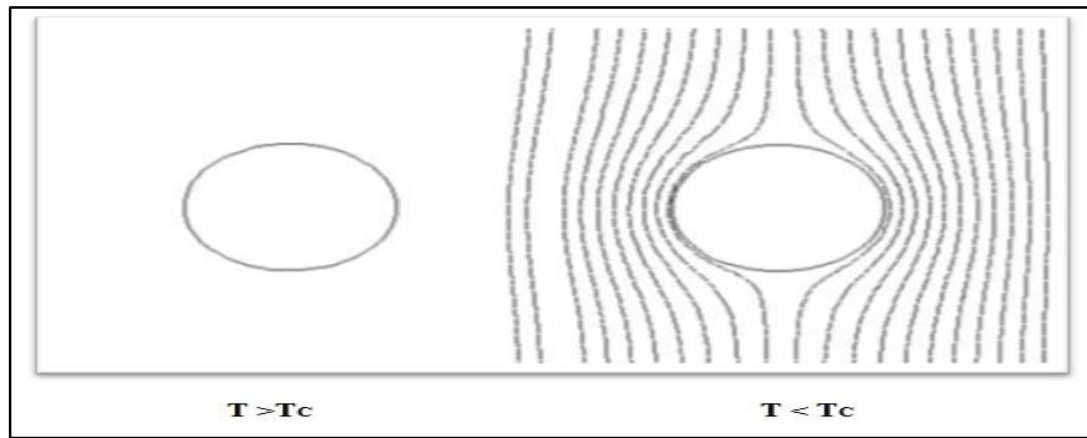


Figure.I.5: Diamagnétisme parfait des supraconducteurs

I.4.2 Aimantation :

Un matériau supraconducteur n'est pas seulement un conducteur parfait. Dans l'état normal, il est non magnétique, son comportement n'est pas modifié par la présence d'un champ magnétique. En revanche, en dessous de la température critique, il devient diamagnétique : son aimantation est négative, pour des champs magnétiques inférieurs à une certaine valeur appelée champ critique (H_c). Ce diamagnétisme, sous certaines conditions, peut être pratiquement parfait. Le supraconducteur expulse alors totalement l'induction magnétique, et ce indépendamment des conditions initiales. La susceptibilité magnétique χ est alors égale à -1 . Cet effet est appelé effet Meissner.

Ce comportement diamagnétique distingue les matériaux supraconducteurs des matériaux parfaitement conducteurs. Un matériau dont seule la résistivité s'annule (conducteur parfait) présente une hystérésis magnétique. En champ croissant, ce matériau va se comporter comme un supraconducteur : des courants induits en surface vont écranter l'induction magnétique extérieure. Par contre, en champ décroissant à partir de H_c , les courants induits dans le conducteur parfait vont s'opposer à la variation d'induction (loi de Lenz) alors que dans un supraconducteur, les courants induits vont s'annuler. Le tableau 2 ci-après illustre cette distinction entre conducteur parfait et supraconducteur lors d'un refroidissement sous champ magnétique externe [5].

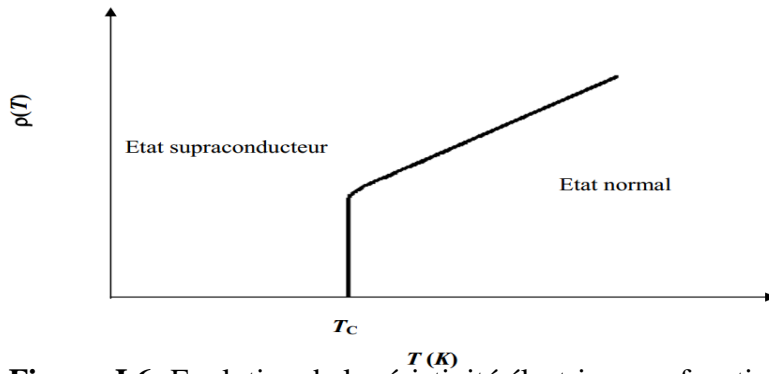


Figure. I.6: Evolution de la résistivité électrique en fonction de la température

Refroidissement puis suppression du champ B_e			
	$T = 300\text{ K}$ $B_e \neq 0\text{ T}$	$T < T_c$ $B_e \neq 0\text{ T}$	$T < T_c$ $B_e = 0\text{ T}$
Conducteur parfait ($\rho = 0$)			
Supraconducteur idéal ($\rho = 0$ et $\chi = -1$)			

Tableau I.2: Comparaison entre le comportement magnétique d'un conducteur parfait et celui d'un supraconducteur idéal

I.5 Les Grandeurs Critiques :

Trois paramètres fondamentaux gouvernent et influencent l'état supraconducteur :

- La température T_c
- Le champ magnétique H_c
- La densité de courant J_c

Comme nous l'avons dit juste avant, la supraconductivité n'apparaît que quand la température est inférieure à une valeur critique. Cette température critique n'est pas la seule grandeur critique de la supraconductivité. On définit aussi les champs magnétiques critiques et la densité de courant critique [6].

a) Température critique :

La température critique est la température en dessous de laquelle apparaît la supraconductivité. Elle est inférieure à 23K pour les matériaux à basse température critique

(10K pour NbTi), elle est de l'ordre de 100 K pour les supraconducteurs à haute température critique.

La température critique est très variable en fonction de la nature du (des) matériau(x) composant(s) le supraconducteur.

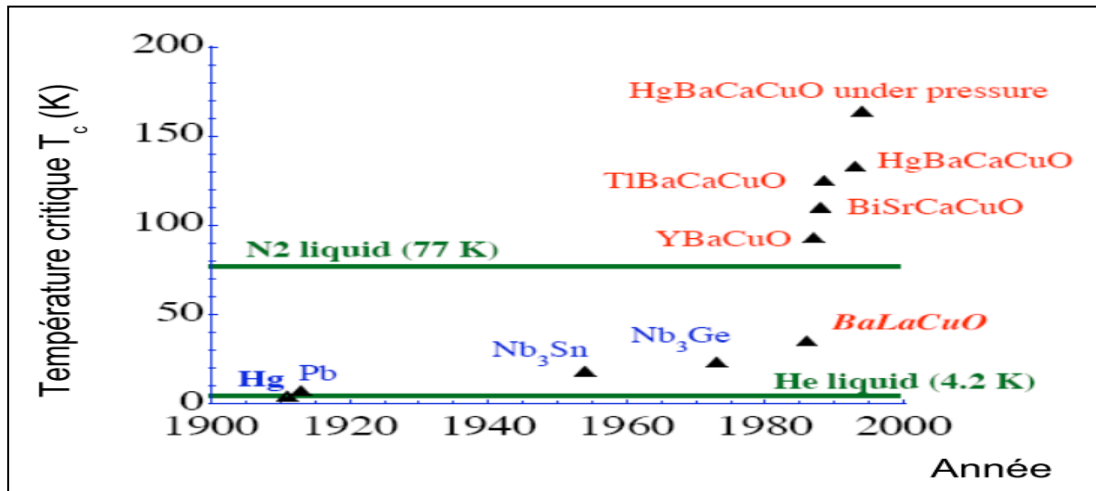


Figure.I.7 : Température critique et année de découverte de quelques matériaux supraconducteurs

b) Champ magnétique critique H_c :

La valeur du champ magnétique critique est considérée comme la deuxième grandeur critique des matériaux supraconducteurs. L'état supraconducteur du matériau dépend de la valeur du champ magnétique extérieur appliqué. Dès que la valeur de ce champ dépasse une valeur critique, la supraconductivité disparaît. Ce comportement est lié à la pénétration du champ dans un supraconducteur (Effet Meissner). L'induction magnétique à l'intérieur du matériau est donnée par la relation suivante :

$$B = \mu_0(H + M) \quad (I.1)$$

Où : μ_0 est la perméabilité magnétique du vide,

H : est le champ magnétique à l'intérieur du matériau et M est l'aimantation[6].

c) Densité de courant critique J_c :

Dans un supraconducteur type I, la densité de courant critique est liée au champ magnétique critique H_c : le courant circulant dans un supraconducteur produit un champ magnétique à la surface du conducteur, le courant critique est simplement le courant pour lequel le champ magnétique produit est égal au champ magnétique critique. Dans un supraconducteur de type II, la définition d'une densité de courant critique est plus complexe du fait de la pénétration partielle du champ dans le matériau et de la simultanéité de deux

phases: normale et supraconductrice. Pour des alliages couramment utilisés comme le NbTi ou le Nb₃Sn, la densité de courant critique, à champ faible, est supérieure à 10^5 A/cm. Lorsque le courant dépasse une valeur critique, il détruit la supraconductivité. Donc la résistivité passe subitement de la valeur zéro à une valeur non nulle[6].

*

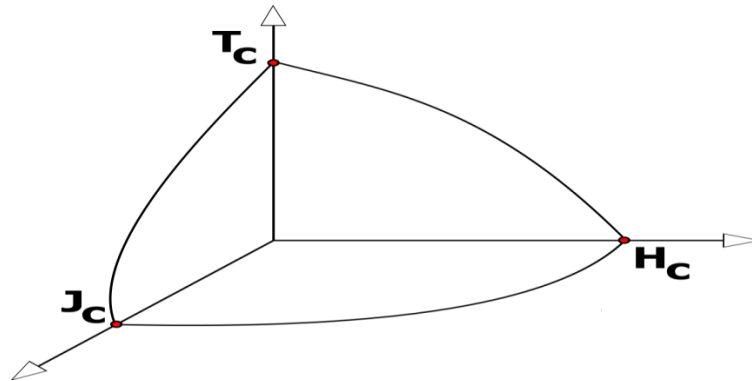


Figure.I.8: Surface critique délimitant la zone supraconductrice

I.6 Classification des supraconducteur selon Hc:

I.6.1 Supraconducteur de type I :

Les supraconducteurs de type I sont caractérisés par un seul champ magnétique critique[7], noté H_c . Le champ magnétique pénètre sur une épaisseur appelée Longueur de pénétration de London dans laquelle se développent des super-courants. Le comportement de ce type de supraconducteurs est simple car il n'existe que deux états. L'état normal correspond à une valeur élevée de la résistance du matériau et l'état supraconducteur est caractérisé par une résistance nulle et un diamagnétisme presque parfait. Dans la figure (I.9), la caractéristique $B(H)$ d'un supraconducteur du type I est présentée. Les applications de ce type de matériau sont limitées, cela est dû au coût du refroidissement élevé, d'une part et d'autre part, ces matériaux sont limités en champ magnétique, la valeur du champ d'induction magnétique B ne dépasse pas la valeur de 0.2 Tesla. [6]

I.6.2 Supraconducteur de type II :

Ce type de supraconducteurs possède deux champs critiques H_{c1} et H_{c2} , la valeur du champ magnétique H_{c2} est nettement plus grande que la première valeur H_{c1} . En outre, ceux-ci présentent des valeurs plus élevées de champ, de température et de courant critiques par rapport aux supraconducteurs de type I, ce qui les rend très attractifs pour l'électrotechnique. Le comportement d'un supraconducteur de type II en présence d'un champ magnétique est décrit sur la figure (I.10). On distingue trois zones différentes :

- Zone 1 : dans cette zone, le matériau est dans un état supraconducteur où l'effet diamagnétique est presque parfait, cet état est défini pour des valeurs du champ magnétique inférieur à H_{c1} (en général petit).
- Zone 2 : le matériau supraconducteur est dans un état mixte où le diamagnétisme est partiel, cet état est défini pour des valeurs du champ magnétique comprises entre H_{c1} et H_{c2} . Entre les deux champs H_{c1} et H_{c2} , le champ extérieur pénètre dans le matériau supraconducteur, cette pénétration du champ s'effectue sous la forme de fins tubes microscopiques appelés vortex.
- Zone 3 : le matériau est dans un état normal avec une forte résistance électrique, pour des valeurs de champ magnétique supérieures à H_{c2} .

Les supraconducteurs de ce type sont principalement des alliages ou des métaux ayant une forte résistivité à l'état normal et des champs critiques H_{c2} élevés. Ces deux propriétés leur autorisent des utilisations pratiques, en particulier dans le domaine du génie électrique [6].

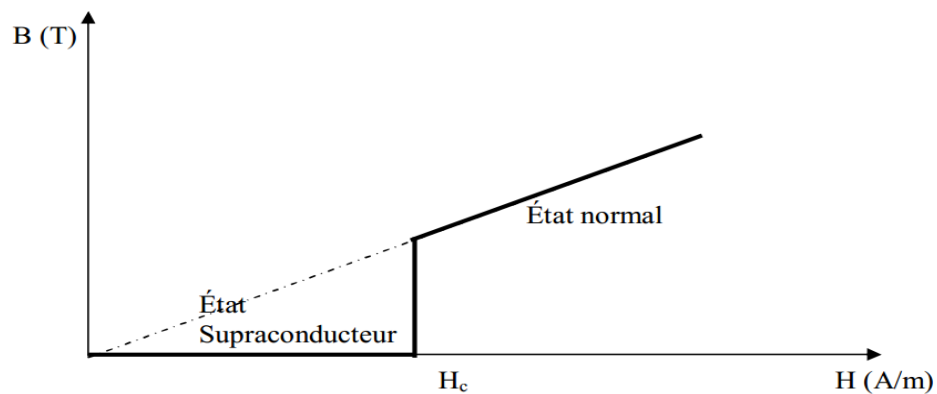


Figure. I.9: caractéristique $B(H)$ d'un supraconducteur de type I

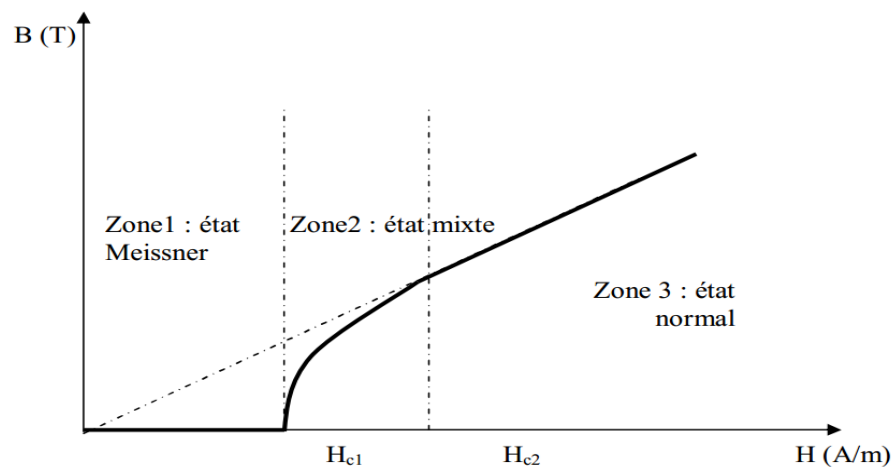


Figure. I.10: Caractéristique $B(H)$ d'un supraconducteur de type II

I.7 Effet Meissner :

Si la chute brutale de la résistivité reste la manifestation la plus spectaculaire de la supraconductivité, le comportement magnétique tout à fait original des supraconducteurs s'avère être la signature la plus profonde du phénomène[6].

En 1933, le centre de supraconductivité se déplace de Leiden à Berlin. C'est là que Walther Meissner et Robert Ochsenfeld découvrent que lorsqu'un conducteur parfait, sous champ nul à température ambiante, est refroidi en dessous de T_c puis soumis à un champ magnétique (refroidissement hors champ magnétique), des courants d'écrantage vont être induits pour conserver $B = 0$ à l'intérieur du matériau

Si au contraire, le conducteur parfait est soumis à un champ magnétique avant d'être refroidi (refroidissement sous champ magnétique), par la suite, le champ magnétique extérieur est ramené à zéro, dans ce cas, la variation dB/dt doit être conservée et des courants de piégeage seront induits pour piéger l'induction magnétique à l'intérieur du matériau

Il en va tout à fait différemment dans le cas d'un supraconducteur :

Dans le premier cas où le champ magnétique est appliqué après refroidissement, le conducteur parfait et le supraconducteur se comporte d'une manière identique car l'induction magnétique est toujours nulle dans le matériau

Dns le second cas, c'est-à-dire dans le cas de refroidissement sous champ magnétique, l'induction magnétique est expulsée de l'intérieur du supraconducteur ($B=0$) dès qu'il est refroidit en dessous de sa température critique

Ce comportement est connu sous le nom d'effet Meissner : il s'agit de l'expulsion de toute induction magnétique de l'intérieur du supraconducteur, qu'elle soit là avant que le spécimen soit devenu supraconducteur ou pas. Le diamagnétisme parfait est une propriété intrinsèque d'un supraconducteur, qui n'est cependant valable que si la température et le champ magnétique sont en tout point inférieurs à leur valeur critique $T < T_c$, $H < H_c$. [6]

I.8 Modèle De Supraconducteur :

I.8.1 Modèle de Bean :

Le modèle de Bean, également appelé modèle de l'état critique, prédit le comportement des matériaux supraconducteurs de manière binaire. Ainsi, dans le matériau, la densité de courant ne peut prendre que deux valeurs, i.e. soit elle est nulle, soit elle vaut la densité de courant critique J_c .

Cette loi de comportement est la plus simple que l'on puisse trouver, car en l'utilisant, on fait l'hypothèse que la densité de courant critique est indépendante du champ magnétique. [8]

On négligé les effets thermiques et l'élévation de la température du matériau. Ce modèle simple permet de réaliser des calculs de façon analytique pour des géométries simples et permet une première approximation du calcul des pertes AC pour les supraconducteurs à basse température critique. En effet, la transition de ces derniers est très brusque et l'augmentation de E est très rapide lorsque $J > J_c$ ainsi le modèle de Bean convient bien aux matériaux basse température. [8]

I.8.2 Modèle de Flux Flow et Flux Creep :

Nous pouvons définir deux modes de fonctionnement pour le supraconducteur, selon la valeur de la densité de courant critique J_c :

Si $|J| \leq J_c$, le réseau de vortex est ancré, néanmoins, des vortex passent d'un site d'ancrage à un autre sous l'action de l'agitation thermique. Ce phénomène dissipatif est appelé régime de « flux Creep »

$$E = 2\rho_c J_c \sinh\left(\frac{U_0}{k\theta} \frac{J}{J_c}\right) \exp\left(-\frac{U_0}{k\theta}\right) \quad (I.2)$$

k : Constant de Boltzmann.

θ : Température.

ρ_c : Résistivité de Flux Creep.

U_0 : Potentiel de profondeur.

Si $|J| > J_c$, le réseau de vortex se déplace et génère des pertes faisant apparaître une résistance électrique dans le matériau supraconducteur. Ce phénomène est appelé régime de « flux flow ».

$$E = \pm(E_c + \rho_f J_c \left(\frac{|J|}{J_c} - 1\right)) \quad (I.3)$$

ρ_f : Résistivité de Flux Flow La densité de courant critique peut alors être définie comme étant la limite entre le régime de flux creep et le régime de flux flow. Cette limite étant très floue, la densité critique de courant est souvent déterminée par la valeur d'un champ électrique critique E_c . [6]

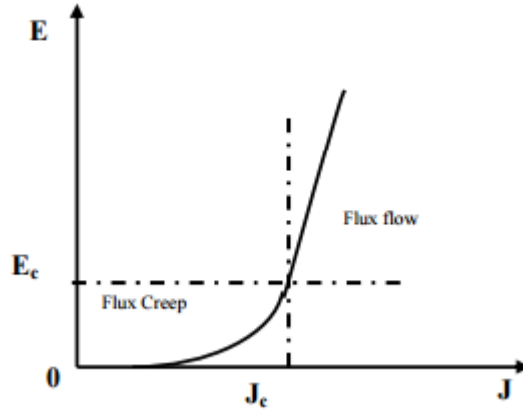


Figure.I.11: modèle de Flux Flow et Creep

I.8.3 Modèle de la loi en puissance E – J :

La relation qui lie la densité de courant et le champ électrique est souvent écrite sous la forme de la loi d'Ohm, c'est-à-dire $E = \rho J$, où ρ est la résistivité du matériau. Le principal problème dans la modélisation des SHT est la définition de la résistivité, qui n'est pas constante et engendre une loi d'Ohm non linéaire. Le modèle de Bean et toutes ses variantes ne correspondent pas parfaitement aux caractéristiques expérimentales $E(J)$ des matériaux SHT, qui sont mieux décrites par des relations du type loi en puissance. Dans ce modèle de loi en puissance, le champ électrique E est proportionnel à la densité de courant J élevée à la puissance n de la façon suivante

$$E = E_c \left(\frac{|J|}{J_c} \right)^n \frac{J}{|J|} \quad (I.4)$$

n : Raideur de transition (varie entre $n=1$ et $n \rightarrow \infty$)

Il faut rappeler que dans le cas des applications du génie électrique, les matériaux supraconducteurs utilisés sont caractérisés par des densités de courant critique J_c élevées, alors il s'agit du régime flux creep. Dans ce cas, on a tendance à utiliser ce modèle qui décrit bien ce régime, d'ailleurs c'est la confrontation de ce modèle avec des relevés expérimentaux de la caractéristique **E-J** des SHTC qui a confirmé l'exactitude de ce modèle. De plus, ce modèle peut prendre en compte l'effet thermique sur le comportement magnétique des SHTC par la dépendance en température de diverses grandeurs caractéristiques du SHTC, tels que, la densité de courant critique J_c et l'exposant en puissance n [6].

I.8.4 Le modèle de KIM :

Le modèle de Bean ainsi que la loi en puissance considèrent le matériau supraconducteur isotrope et isotherme. Ils ne tiennent pas compte de l'échauffement éventuel du conducteur sous l'effet des pertes qui entraînerait une diminution du courant critique. Dans le modèle de Bean, la densité de courant critique est supposée constante quel que soit le champ magnétique extérieur. Dans la réalité la densité de courant dépend fortement de son orientation par rapport au champ et de l'induction magnétique, B . Une expression de $J_c(B)$ dans le cas isotrope a été donnée par Kim.

$$J_c(|B|) = \frac{J_{c0} B_0}{|B| + B_0} \quad (I.5)$$

C'est le modèle le plus utilisé pour la modélisation de la dépendance de la densité de courant critique avec l'induction magnétique.

I.9 Limiteur De Courant De Défaut :

Les limiteurs de courant de défaut sont des appareils électriques permettant de limiter la valeur du courant en cas de défaut électrique et notamment de court-circuit. Ces derniers sont en effet beaucoup plus élevés que les courants nominaux, ce qui impose de nombreuses contraintes dans le dimensionnement des autres appareils électriques d'un poste électrique. Par ailleurs, la valeur du courant de court-circuit augmente avec le nombre de centrales électriques connectées au réseau, il est donc possible que les équipements d'un poste ne soient plus adaptés aux contraintes en matière de court-circuit s'ils sont anciens. La mise en place d'un limiteur de courant peut alors permettre d'éviter d'avoir à remplacer des équipements.

La manière la plus simple de limiter le courant de court-circuit est d'insérer une inductance en série avec la ligne électrique, que ce soit sous forme de bobine ou en choisissant des transformateurs ayant une impédance de court-circuit plus élevée. Toutefois cela n'est pas désirable, car les inductances consomment de la puissance réactive, causant ainsi des pertes et une chute de tension sur les longues lignes. Un limiteur de courant de défaut idéal a une inductance nulle en condition normale et infinie en cas de défaut.

Si le concept est ancien, les limiteurs de courant en sont encore à leurs balbutiements. Plusieurs concepts différents existent : en pont à semi-conducteurs, à noyaux magnétiques biaisés, supraconductif résistif, à métal liquide et pyrotechnique. Des coûts de construction trop élevés expliquent pour l'instant leur faible utilisation [9].

I.9.1 Autres intérêts :

Les limiteurs de courant peuvent, sous certaines conditions, améliorer la stabilité dynamique des réseaux

I.9.2 Contraintes de conception :

Il faut éviter qu'un limiteur de courant ne vienne augmenter dans de trop fortes proportions la tension transitoire de rétablissement. Par ailleurs, il ne doit causer en régime permanent ni chute de tension, ni harmoniques, ni ferrorésonance.

Il doit limiter le courant très rapidement : au bout de 1 à 2 ms. Sa consommation de puissance active et réactive doit être aussi faible que possible en régime permanent. Par ailleurs, il faut éviter qu'il n'ait besoin de temps pour retrouver ses capacités. Cela veut dire également que les pièces à remplacer après déclenchements sont à éviter. Des successions de court-circuit ne sont pas rares. Enfin il doit être aussi fiable que possible

I.9.3 Limiteur de courant à semi-conducteurs :

I.9.3.1 À semi-conducteurs en série :

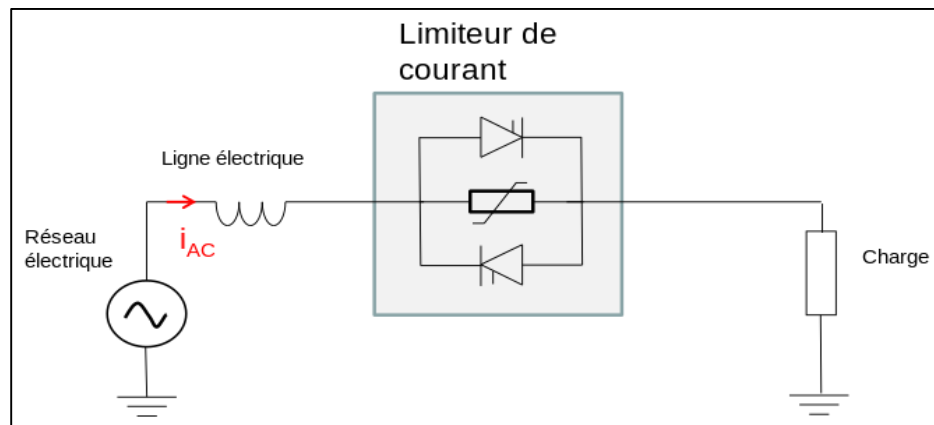


Figure.I.12: Schéma d'un limiteur de courant à semi-conducteur

Un limiteur de courant de défaut à semi-conducteurs peut être schématisé par deux éléments semi-conducteurs montés en tête bêche. Naturellement chacun de ces éléments est lui-même constitué de nombreux semi-conducteurs montés en série : au plus la tension est élevée au plus leur nombre est grand. Si les semi-conducteurs utilisés sont des thyristors, en cas de court-circuit, le système commence par limiter le courant, mais ne peut l'interrompre qu'au premier zéro du courant. Si des GTO, IGCT ou IGBT sont employés, l'interruption peut être instantanée : de l'ordre de 100 us. Au moment de l'interruption, le système insère une

résistance dans le circuit pour absorber l'énergie. Ils sont très rapide et permettent de limiter non seulement les défauts, mais également les courants d'enclenchement et les chocs de manœuvre. Le coût important doit donc être mis en relation avec le gain en durée de vie procuré aux transformateurs ainsi protégés [9].

Un des principaux problèmes est que les éléments semi-conducteurs sont continuellement traversés par le courant: ils produisent donc des pertes. Celles-ci sont plus élevées pour les IGBT que pour les IGCT ou les GTO, il est donc peu probable qu'ils soient utilisés pour cette application. Les thyristors sont les meilleurs dans le domaine, mais leur incapacité à interrompre le courant est un désavantage. Des circuits existent toutefois pour surmonter ce problème.

I.9.3.2À semi-conducteurs en pont :

Une des solutions pour construire un limiteur de courant de défaut est d'introduire un pont de diode dans le circuit équipé d'une source de tension continue. Cette dernière génère un courant I_0 , choisi de sorte qu'en cas de fonctionnement normal, le courant nominal crête soit inférieur à $I_0/2$. Ainsi les diodes sont toujours conductrice en cas normal, la bobine n'est pas visible par le circuit. En cas de court-circuit, le courant devient supérieur à $I_0/2$, 2 diodes se bloquent alors à chaque demi-période, le courant traverse alors la bobine qui le limite.

L'un des défauts du dispositif est que le courant traverse constamment les diodes ce qui entraîne des pertes. À l'inverse, il a l'avantage de ne pas avoir besoin de temps de repos entre 2 courts-circuits pour retrouver son pouvoir limiteur.

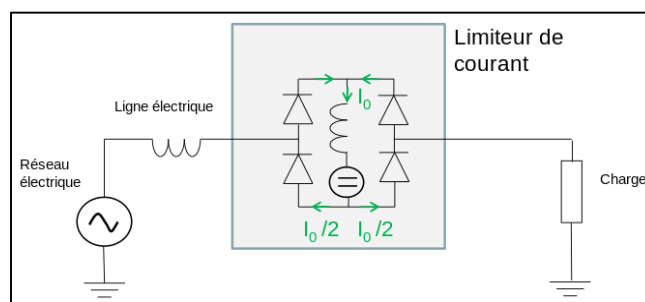


Figure.I.13: Schéma d'un pont à semi-conducteur limiteur de courant

I.9.3.3À supraconducteurs :

Les matériaux supraconducteur ont la propriété d'avoir une résistance quasiment nulle quand ils sont dans l'état supraconducteur. Ils n'ont dans ce cas pas d'effet négatif sur le réseau. Le

dépassement de la température critique, du courant critique ou du champ magnétique externe critique des matériaux entraîne un retour à un état normal où sa résistance est beaucoup plus élevée. L'élément supraconducteur est dimensionné de sorte qu'en régime nominal il se trouve dans l'état supraconducteur et n'impose donc aucune résistance au courant, par contre il doit revenir à l'état normal en cas de court-circuit, auquel cas il limite le courant. Après ce passage à l'état normal, l'élément supraconducteur a besoin de temps pour revenir à l'état supraconducteur. [9]

I.9.4 Supraconducteur résistif :

Un limiteur de courant à supraconducteur résistif est constitué d'un élément en supraconducteur qui conduit le courant en conditions normales. En cas de court-circuit, cet élément sort de son état supraconducteur et son impédance augmente fortement. Pour éviter sa destruction par surchauffe, un élément impudent doit être placé en parallèle : bobine ou résistance. Cet élément évite également que le courant soit complètement interrompu ce qui entraînerait une surtension sur le réseau.

Un des avantages du dispositif est d'être insensible aux pannes. Il est également très compact. La nécessité d'un temps de repos entre deux courts-circuits est par contre désavantageux. Le fait que le courant nominal le traverse en permanence, fait que les pertes joules sont importantes et le système de refroidissement doit être dimensionné en fonction[9].

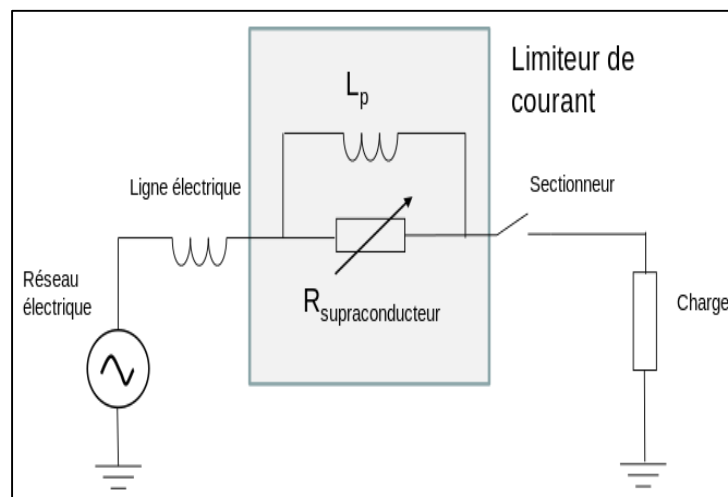


Figure. I.14: Limiteur de courant de défaut à supraconducteur avec une inductance en parallèle

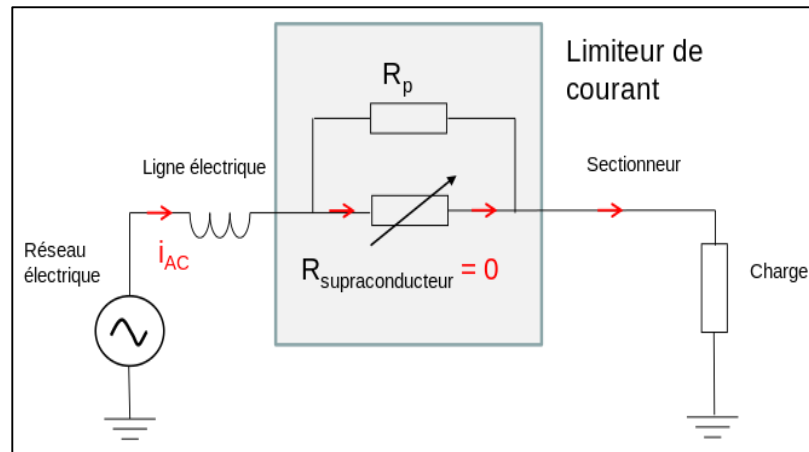


Figure. I.15: En temps normal, l'élément supraconducteur a une résistance nulle

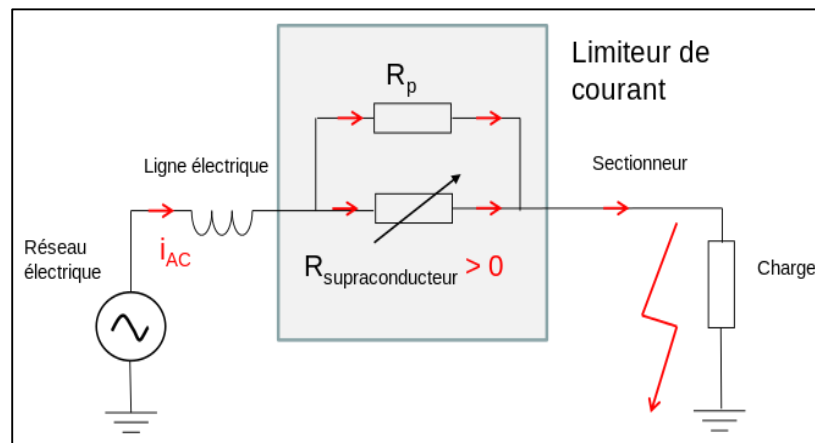


Figure. I.16 : En cas de court-circuit, l'élément supraconducteur retourne à l'état normal et limite le courant

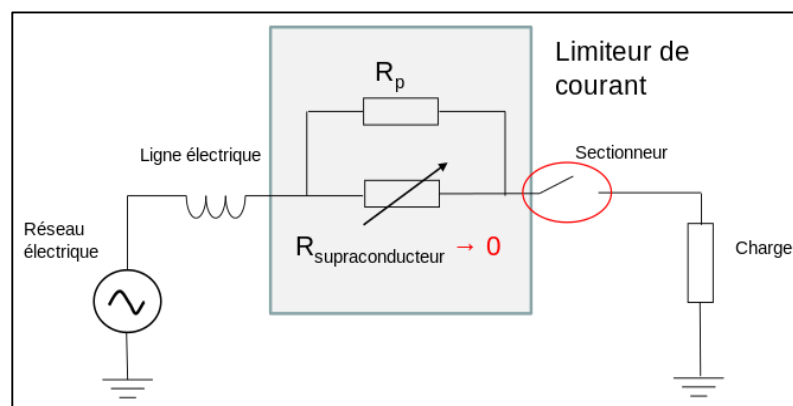


Figure. I.17 : Après un court-circuit, l'élément supraconducteur a besoin de temps pour revenir à l'état supraconducteur

I.10 Applications Des Supraconducteurs En Electrotechnique :

Les matériaux supraconducteurs présentent de nombreux aspects pour diverses applications technologiques. Cependant, la nécessité de refroidir ces matériaux à la température de l'hélium liquide, a freiné le développement des applications industrielles utilisant les supraconducteurs conventionnels.

Les supraconducteurs à haute température critique qui ont l'avantage de garder leur état supraconducteur à la température de l'azote liquide sont plus prometteurs quant aux applications. Dans le domaine des énergies renouvelables, des systèmes modernes de stockage d'énergie électrique basés sur des éléments supraconducteurs ont été développés. En effet, des paliers supraconducteurs sont intégrés dans des systèmes inertiels de stockage d'énergie associés à des générateurs éoliens pour stocker l'énergie cinétique dans des volants d'inertie en lévitation [6].

I.10.1 Les applications médicales :

Une application médicale est l'imagerie par résonance magnétique (I.R.M.). L'I.R.M. est basée sur le principe suivant : un noyau atomique doté d'un moment magnétique et soumis à une induction B_0 constante décrit un mouvement de précession autour de son axe avec une vitesse angulaire proportionnelle à B_0 . En appliquant un champ magnétique perpendiculaire à B_0 , on observe un phénomène de résonance si la fréquence d'excitation f est égale à la vitesse angulaire de précession. On recueille ainsi un signal caractéristique. L'induction de polarisation B_0 varie dans l'espace, et f aussi donc, ce qui permet l'obtention des images. L'induction magnétique de 0,5 à 4 Teslas nécessaire ne peut être obtenue qu'à l'aide d'aimants supraconducteurs. De plus, mis à part la phase d'établissement du courant, l'alimentation électrique n'a plus lieu d'être. La consommation de "froid" est très faible et le poids de l'engin est réduit. Le grand gagnant est le patient : celui-ci ne subit aucun effet nocif connu à ce jour et les images prises de son corps (crâne, corps, membres ...) sont d'excellente qualité, ce qui permet aux médecins de faire un diagnostic correct. Une autre application sur le même principe que l'I.R.M. est la spectroscopie par résonance magnétique nucléaire (RMN). À la différence de l'I.R.M., deux champs magnétiques orthogonaux entrent en jeu (un à haute fréquence, l'autre continu). Sous leurs effets, les noyaux entrent en précession et émettent des signaux que l'on recueille ensuite pour l'analyse de la nature, la composition chimique et la structure des échantillons. Et comme il faut des inductions magnétiques supérieures à 7-13T, les aimants supraconducteurs sont extrêmement utiles [10].



Figure.I.18:IRM

I.10.2 Stockage de l'énergie :

En dehors des batteries et des condensateurs, nous ne disposons que de très peu de moyens de stocker l'électricité directement. Un moyen de résoudre ce problème est de stocker l'énergie de façon magnétique ou mécanique. Pour cela, on peut utiliser des SMES (superconducting magnetic energy storage) par le biais de bobines supraconductrices en court-circuit, ce qui évite d'avoir des pertes par effets Joule. On peut également employer des volants d'inertie avec des paliers magnétiques utilisant des matériaux supraconducteurs, le tout étant maintenu sous vide pour éviter les pertes par frottements. [8]

I.10.3 Les trains à lévitation magnétique :

Imaginons un train qui glisse quelques centimètres au-dessus de la voie à plus de 500 km/h. Cela existe à l'échelle réduite, mais aussi à l'échelle 1:1, au Japon. Pour propulser le train, il faut d'abord qu'il entre en lévitation. Deux méthodes sont possibles : la lévitation magnétique de type électromagnétique ou celle de type électrodynamique. La première ne fait pas appel à la supraconductivité, contrairement à la seconde. Cette dernière est basée sur la répulsion entre les éléments embarqués sur le train et des plaques conductrices situées sur la voie. L'avantage des bobines est de réduire la puissance dissipée. L'entrefer peut être de 10 cm si les aimants du train sont suffisamment puissants. Il faut faire appel à la supraconductivité. Par interaction entre un inducteur embarqué et des bobines sur la voie, le train se meut pour le plus grand bonheur des ruminants.

En 1977, le prototype ML 500 japonais atteignit la vitesse record de 517 km/h. Même le TGV Atlantique français ne put faire mieux treize ans après avec 515,3 km/h. Ces trains à lévitation présentent plusieurs avantages. Outre le fait qu'ils circulent à de très hautes vitesses, ils n'usent pas les voies, et le problème du captage du courant par pantographe ne se pose plus. Les contraintes des trains sur rails n'autorisent pas aujourd'hui des vitesses commerciales au-delà de 350 km/h. Les trains à lévitation semblent donc prometteurs, mais les problèmes liés à leur mise au point et les infrastructures nécessaires font qu'aujourd'hui, les trains conventionnels ont encore de beaux jours devant eux [10].

I.10.4 Machines électriques :

L'utilisation de matériaux supraconducteurs pour cette application permet d'augmenter le champ magnétique et d'améliorer le rendement avec une diminution des pertes. La diminution du poids et du volume et l'augmentation du rendement pour une même puissance facilite le développement des moteurs supraconducteurs dans les applications embarquées.[8]

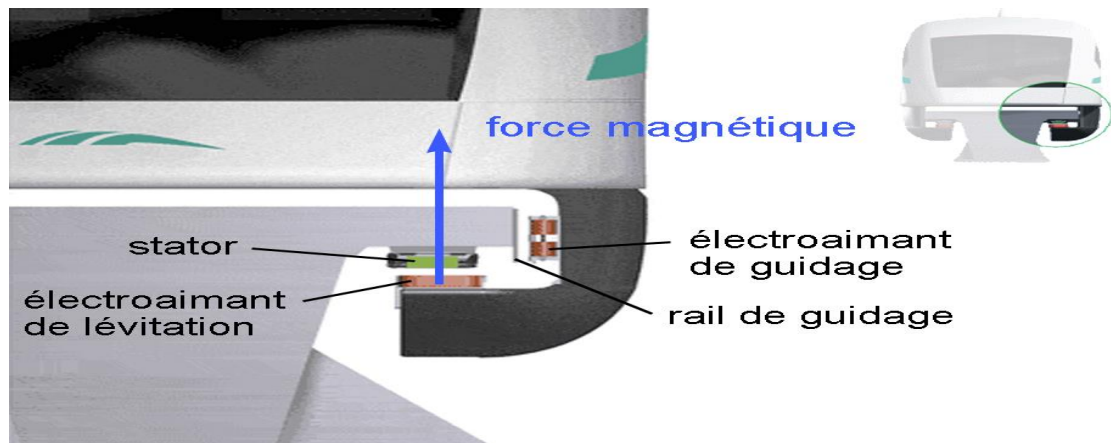


Figure. I.19 : La force magnétique représentée est celle qui permet la lévitation du train



Figure.I.20 : Train Maglev(552 Km/H)

I.10.5 Transformateur et limiteur de courant de court-circuit :

Nous allons aborder ici brièvement le cas des transformateurs et des limiteurs de court-circuit(souvent appelés simplement limiteurs de courants). Nous reviendrons plus en détails sur ces derniers un peu plus loin dans le document. Les transformateurs supraconducteurs, par

rapport à leurs homologues classiques en cuivre, présentent de plus faibles pertes, un volume moindre et un poids généralement plus faible. L'utilisation de supraconducteurs permet, grâce aux propriétés intrinsèques du matériau, de proposer une fonction de limitation de courant de court-circuit qui peut se révéler très intéressante d'un point de vue réseau électrique. Les supraconducteurs sont d'excellents candidats pour la limitation du courant. En effet, on peut utiliser la transition naturelle du matériau de l'état supraconducteur vers l'état résistif pour réaliser cette fonction [8].



Figure.I.21: Limiteur de courant

I.10.6 Transport de l'énergie :

Les courants admissibles étant plus élevés que dans les lignes conventionnelles, les câbles de transport supraconducteurs sont particulièrement intéressants pour accroître la puissance transmissible d'un réseau électrique tout en améliorant le rendement. Avec le développement des systèmes HVDC, le transport en courant continu pourrait devenir particulièrement intéressant, car on réduit des pertes dues au courant alternatif dans les matériaux supraconducteurs.

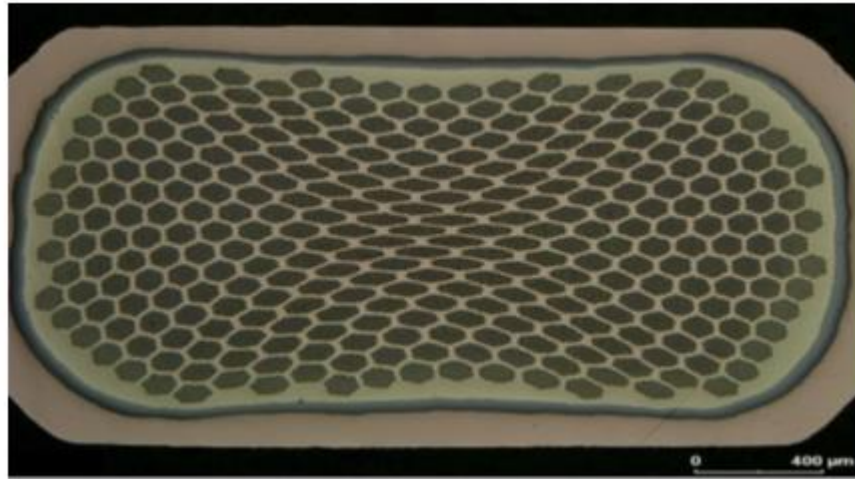


Figure.I.22: Vue en coupe NbSn de Bruker. Source

I.11 CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons présenté une étude sur les deux types de matériau supraconducteur : type I et type II, ces derniers sont limités par des grandeurs magnétiques et thermiques appelées grandeurs critiques qui sont : la température critique T_c , le champ magnétique critique H_c et enfin la densité de courant critique J_c). Nous avons aussi présenté les propriétés remarquables qui rendent leur utilisation envisageable dans divers domaines d'application industrielle.

Chapitre II :

Formulation Mathématique en Electromagnétisme

- ❖ INTRODUCTION
- ❖ Les Equations De Maxwell
- ❖ Lois constitutives des milieux
- ❖ Interprétation physique des équations de Maxwell
- ❖ Formulation des équations électromagnétiques
- ❖ Formulation de L'équation Magnétodynamique
- ❖ Formulation de l'équation thermique
- ❖ Le Modèle Cylindrique Axisymétrique En Electromagnétisme
- ❖ Différentes techniques de résolutions des équations aux dérivées partielles
- ❖ CONCLUSION

II.1 INTRODUCTION :

Les phénomènes électromagnétiques que l'on étudie au sein des dispositifs de limiteur de courant à base de supraconducteur à haut température critique sont régis par les équations de Maxwell et les équations caractéristiques des matériaux. Ces équations sont de vieux concepts de la physique. Dans ce chapitre, nous allons exposer les modèles mathématique qui caractérise l'évolution spatiaux-temporelle du champ électromagnétique dans les matériaux supraconducteurs, et par conséquence la résistivité électrique.

II.2 Les Equations De Maxwell :

Les équations de maxwell, aussi appelées **équations de Maxwell-Lorentz**, sont des lois fondamentales de la physique. Elles constituent les postulats de base de l'électromagnétisme, avec l'expression de La force de Lorentz.

Ces équations traduisent sous forme locale différents théorèmes (Gauss, Ampère, Faraday) qui régissaient l'électromagnétisme avant que Maxwell ne les réunisse sous forme d'équations intégrales. Elles donnent ainsi un cadre mathématique précis au concept fondamental de champ introduit en physique par Faraday dans les années 1830.

Ces équations montrent notamment qu'en régime stationnaire, les champs électrique et magnétique sont indépendants l'un de l'autre, alors qu'ils ne le sont pas en régime variable. Dans le cas le plus général, il faut donc parler du champ électromagnétique, la dichotomie électrique/magnétique étant une vue de l'esprit. Cet aspect trouve sa formulation définitive dans le formalisme covariant présenté dans la seconde partie de cet article : le champ électromagnétique y est représenté par un être mathématique unique : le tenseur électromagnétique, dont certaines composantes s'identifient à celles du champ électrique et d'autres à celles du champ magnétique.

$$\overrightarrow{rot E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (II.1)$$

$$\overrightarrow{rot H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (II.2)$$

$$div \vec{B} = 0 \quad (II.3)$$

$$div \vec{D} = \rho \quad (II.4)$$

II.3 Lois constitutives des milieux :

$$1) \quad B = \mu \cdot H \text{ ou } H = \nu \cdot B \quad (\text{II.5})$$

$$2) \quad D = E \cdot \varepsilon \quad (\text{II.6})$$

Avec :

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{densité des courants de déplacement négligeable à basse fréquence [A/m}^2 \text{]}$$

E : Vecteur champ électrique [V/m]

B : Vecteur induction magnétique [T]

H : Vecteur Champ magnétique [A/m]

D : Vecteur induction électrique (vecteur déplacement électrique [C/m²])

ρ : densité volumique de charge électriques [C/m³]

J_c : Vecteur densité du courant électrique de conduction [A/m²]

II.4 Interprétation physique des équations de Maxwell :

II.4.1 Equations de couplages électromagnétiques :

a) Loi d'induction de FARADAY :

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II.7})$$

Cette équation exprime le couplage électrique magnétique en régime dynamique où la variation temporelle de \vec{B} détermine le $\text{rot} \vec{E}$

Démonstration :

La force électromotrice induite dans un circuit (c) placé dans un champ magnétique est déterminée par l'intégrale curviligne suivante :

$$e = \oint \vec{E} d\vec{l} \quad (\text{II.8})$$

Où (c) est une boucle fermée. De la même manière, une (f.e.m.) est aussi induite, si le flux Φ varie dans le temps à travers un circuit fixe tel que :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad (\text{II.9})$$

Ou :

$$\phi = f(x, y, z, t)$$

Donc :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} d\vec{s}$$

Ou (s) est une surface s'appuyant sur le contour (c) Et d'après le théorème de STOKES on a :

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = \int \text{rot} \vec{E} d\vec{s} \quad (\text{II.10})$$

On obtient donc :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} d\vec{s} = \int \text{rot} \vec{E} d\vec{s} \quad (\text{II.11})$$

Ainsi nous aurons :

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II.12})$$

b) Théorème D'ampère

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{II.13})$$

Cette équation exprime la dépendance du champ magnétique de la densité de courant totale (conduction + déplacement) Démonstration :

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \oint \vec{J} d\vec{s} \quad (\text{II.14})$$

(s) : est la surface qui s'appuie sur le courant (c)

J : est la densité de courant.

D'après le théorème de STOKES nous avons :

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \oint \text{rot} \vec{H} d\vec{s} \quad (\text{II.15})$$

Donc :

$$\oint \text{rot} \vec{H} d\vec{s} = \oint \vec{j} d\vec{s} \quad (\text{II.16})$$

D'où :

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} \quad (\text{II.17})$$

c) Les équations de conservations :

Divergence de l'induction magnétique

$$\text{Div} \vec{B} = 0$$

Cette relation traduit mathématiquement, qu'il n'existe pas de charges magnétiques car les seules sources de champ magnétique sont les courants électriques.

C'est pourquoi les lignes du champ sont toujours fermées sur elles –mêmes, elles forment des boucles .ces boucles n'ont; ni points de départs, ni points d'arrivées, ni points de convergences, D'où, la nomination d'induction conservative (champ conservatif)

d) Théorème de GAUSS :

$$\text{Div} \vec{D} = \rho \quad (\text{II.18})$$

Si on considère une surface (s) fermée, le flux de vecteur de déplacement électrique

\vec{D} Sortant de cette surface est égale à la charge totale contenue à l'intérieur de cette dernière

$$\oint \vec{D} d\vec{s} = \oint \text{int} = \oint \rho dv \quad (\text{II.19})$$

D'après le théorème d'OSTROGRADSKI –GREEN nous avons

$$\oint \vec{D} d\vec{s} = \oint \text{div} \vec{D} dv \quad (\text{II.20})$$

D'où :

$$\oint \text{div} \vec{D} dv = \oint \vec{D} d\vec{v} \quad (\text{II.21})$$

Ainsi

$$\text{div} \vec{D} = \rho$$

e) **Loi de comportement des matériaux (milieu physique) :**

Induction électrique et champ électrique

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$$

ε_r : Permittivité relative du milieu [U S I]

ε_0 : Permittivité absolue du vide [F / m]

Cette équation décrit la relation entre le vecteur induction électrique \vec{D} et le champ électrique \vec{E} , elle est linéaire si ε est constante dans le cas des conducteurs non polarisés nous avons :

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36 \pi 10^9} [F/M]$$

La détermination \vec{D} de l'équation (II-6) et de $\text{rot } \vec{E}$ détermine complètement \vec{E} Induction magnétique et champ magnétique

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

C'est la relation entre le champ magnétique et l'induction magnétique .cette dernière donne la courbe d'aimantation

$$\vec{B} = f(\vec{H})$$

Cette variation de \vec{H} conduit à une variation de l'induction \vec{B} , on trouve par la suite le cycle d'hystérésis dont la forme se différencie d'un matériau à un autre, donc d'un dispositif électrotechnique à un autre.

II.5 Formulation des équations électromagnétiques :

Les équations de MAXWELL se découpent donnant naissance à des modèles plus simples [11]

II.5.1 Modèle Electrostatique :

Dans ce modèle la répartition des charges électriques ne dépend pas de temps (régime stationnaire : cas de courant continu) de ce fait le champ magnétique créé ne varie pas dans le temps [12] :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \quad (\text{II.22})$$

Les équations de ce modèle se simplifient comme suit :

$$\text{div} \vec{D} = \rho$$

$$\text{rot} \vec{E} = \vec{0}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

La relation (II-23) permet de définir une fonction potentiel scalaire électrique V , telle que :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \quad (\text{II.23})$$

Le modèle se ramène alors à l'équation

$$\text{div}(\epsilon \overrightarrow{\text{grad}} V) + \rho = 0 \quad (\text{II.24})$$

II.5.2 Modèle Electrocinétique :

Ce type de problèmes concerne l'étude de la répartition des courants dans des conducteurs hétérogènes (connexion, jeu de barres, contact...) soumis à des tensions continues.

Le terme $\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$ reste nul Ce modèle régit par les équations suivantes :

$$\text{rot} \vec{E} = \vec{0}$$

$$\text{div} \vec{J} = 0 \quad (\text{II.25})$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (\text{II.26})$$

Ou :

σ : Est la conductivité d'un conducteur

L'équation (II, 26) implique que le champ électrique dérive d'un potentiel Scalaire V :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

Et en tenant compte de l'équation (I-28) on trouve :

$$\vec{J} = -\sigma \overrightarrow{\text{grad}} V \quad (\text{II.27})$$

Injectant cette dernière équation dans l'équation (II.27) , on aboutit alors à l'équation globale du modèle :

$$\text{div}(-\sigma \overline{\text{grad}} V) = 0 \quad (\text{II.28})$$

La résolution numérique de ce genre d'équations est bien maîtrisée ; cela est dû particulièrement à la simplicité de la détermination des conditions aux limites.

II.5.3 Modèle Magnétostatique :

a) Modèle magnétostatique scalaire :

Dans ce modèle on admet que les courants électriques sont négligeables dans la pièce à étudier, et que le champ magnétique ne dépend pas de temps

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$$

On aboutit aux relations suivantes :

$$\text{div} \vec{B} = \vec{0}$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{0}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + B_r$$

Dans ce cas le champ dérive d'un potentiel magnétique scalaire (ϕ):

$$\vec{H} = -\overline{\text{grad}} \phi \quad (\text{II.29})$$

Les équations de ce modèle sont regroupées pour former l'équation globale suivante :

$$\text{div}(\mu \overline{\text{grad}} \phi) = \text{div} \vec{B}_r \quad (\text{II.30})$$

Ce modèle pose peu de problèmes particuliers et la technique actuelle le permet de le traiter même dans les cas tridimensionnels complexes.

b) Modèle magnétostatique vectorielle :

Comme dans le modèle précédent, on suppose que le champ magnétique est produit par des

sources indépendantes du temps le terme $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ est alors nul et les champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} sont découplés par contre, on désire modéliser un objet parcouru par des courants non nuls On obtient alors les équations suivantes :

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + B_r$$

La relation $\text{div} \vec{B} = 0$ permet de définir une fonction vectoriel \vec{A} appelée potentiel vecteur magnétique, tel que :

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

Pour que cette fonction soit totalement définie, il faut également fixer sa divergence, on ajoute alors la condition :

$$\text{div} \vec{A} = 0$$

Cette condition est appelée JAUGE DE COULOMB

D'où le système d'équation est :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \right) = \vec{J} + \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{B_r} \right) \quad (\text{II.31})$$

II.5.4 Le Modèle magnétodynamique :

Contrairement aux autres modèles le terme $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ n'est pas nul Par conséquent les phénomènes magnétiques et électriques sont couplés, c'est-à-dire que la variation de champ magnétique dans le temps induit des courants de Foucault et des f.e.m ce qui est le cas de tous les dispositifs dans lesquels les courants et les tensions électriques ne sont pas stationnaires.

Le potentiel vecteur \vec{A} Joue un rôle primordial dont la connaissance \vec{A} implique la connaissance de tous les grandeurs physiques où :

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

En termes d'équations nous avons :

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J}$$

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

A ces équations nous ajoutons les lois caractéristiques au milieu

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

C'est à partir de ces équations de base de ce modèle que nous pouvons déterminer l'équation décrivant l'évolution des phénomènes électromagnétiques dans un dispositif où l'ensemble des champs présents sont en fonction explicite de l'espace et du temps

L'utilisation de ce modèle est très répandue dans l'étude des machines électriques, des dispositifs du chauffage par induction, des transformateurs ...etc.

II.6 Formulation de L'équation Magnétodynamique :

On se basant sur les équations de J.C.MAXWELL, on peut formuler l'équation qui décrit l'évolution spatiale-temporelle des phénomènes électromagnétiques nous avons :

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Avec :

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \tag{II.32}$$

On obtient :

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial (\text{rot} \vec{A})}{\partial t} = \text{rot} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \tag{II.33}$$

$$\text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \tag{II.34}$$

Ceci implique $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ un champ conservatif, il découle donc d'un potentiel scalaire électrique U Tel que :

$$E + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overline{\text{grad}} U \Rightarrow \vec{E} = -\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \overline{\text{grad}} U\right) \quad (\text{II.35})$$

A partir de l'équation (II.7) et de l'équation (II.34) nous avons :

$$\overline{\text{rot}} = \left(\frac{1}{\mu} \vec{B}\right) = \vec{J} \quad (\text{II.36})$$

Et à partir des équations (II.32) et (II.35) nous avons :

$$\overline{\text{rot}} \left(\frac{1}{\mu} \overline{\text{rot}} \vec{A}\right) = \vec{J}_{ex} - \sigma \cdot \vec{E} + \sigma(\vartheta \wedge \overline{\text{rot}} \vec{A}) \quad (\text{II.37})$$

$$\overline{\text{rot}} \left(\frac{1}{\mu} \overline{\text{rot}} \vec{A}\right) = \vec{J}_{ex} - \sigma \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \overline{\text{grad}} U\right) + \sigma(\vartheta \wedge \overline{\text{rot}} \vec{A}) \quad (\text{II.38})$$

$$\overline{\text{rot}} \left(\frac{1}{\mu} \overline{\text{rot}} \vec{A}\right) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \overline{\text{grad}} U - \sigma(\vartheta \wedge \overline{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{J}_{ex} \quad (\text{II.39})$$

Le potentiel vecteur \vec{A} ne peut pas être défini par la seule condition $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ On doit fixer sa divergence pour assurer l'unicité de la solution de l'équation aux dérivées partielles (E.D.P)

On ajoute alors la condition $\text{div} \vec{A} = \vec{0}$ appelée JAUGE DE COULOMB Nous aurons ainsi :

$$\overline{\text{rot}} \left(\frac{1}{\mu} \overline{\text{rot}} \vec{A}\right) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \overline{\text{grad}} U - \sigma(\vartheta \wedge \overline{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{J}_{ex} \quad (\text{II.40})$$

$$\text{div} \vec{A} = \vec{0}$$

Les termes - $\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ et $\sigma(\vartheta \wedge \overline{\text{rot}} \vec{A})$ représentent les densités des courants induits ils traduisent le caractère dynamique dans le temps et dans l'espace des phénomènes électromagnétiques

Le terme- $\sigma \overline{\text{grad}} U$ décrit la densité des courants dépendante des conditions électriques imposées aux extrêmes des conducteurs

Dans le cas où la pièce est immobile par rapport à l'inducteur et v est uniformément nul l'équation (II.40) devient

$$\overline{\text{rot}}(v \overline{\text{rot}} \vec{A}) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{J}_{ex} \quad (\text{II.41})$$

$$\text{div} \vec{A} = \vec{0}$$

II.7 Formulation de l'équation thermique :

Les phénomènes thermiques, qui existent lorsqu'un courant et/ou un champ magnétique sont appliqués au SHTC, sont régis par l'équation de diffusion de la chaleur :

$$\rho C_p(T) \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (\kappa(T) \nabla T) = W \quad (\text{II.42})$$

où $\lambda(T)$, ρ , $C_p(T)$ sont respectivement la conductivité thermique en (W/K/m), la masse volumique en (Kg/m³) et la chaleur spécifique du matériau en (J/K/Kg), W est une puissance volumique en (W/m³).

L'expression de l'ensemble des pertes dissipées dans le supraconducteur est donnée par :

$$W = \vec{E} \cdot \vec{J} \quad (\text{II.43})$$

La résolution de l'équation (II.43) permet de connaître la répartition de la température en tout point du supraconducteur. Cependant il est nécessaire d'introduire les équations qui traduisent les échanges thermiques entre le supraconducteur et le fluide cryogénique qui sont considérés comme étant dus essentiellement à la convection. Ainsi sur la frontière du supraconducteur, l'équation à résoudre est donnée par :

$$-\kappa(T) \nabla T \cdot \vec{n}_{as} = h(T - T_o) \quad (\text{II.44})$$

où h est le coefficient de convection du fluide cryogénique exprimé en W/K/m² et T_o est la température de ce même fluide [7].

II.8 Le Modèle Cylindrique Axisymétrique En Electromagnétisme :

Une grande partie de problèmes magnétiques peut être traité en bidimensionnel, ce qui est le cas du problème des systèmes sur lesquels nous appliquerons notre modèle de couplage proposé. Rappelons l'existence des deux types de système bidimensionnels : Ceux infiniment longs alimentés suivant une direction (\vec{e}_z), et ceux à symétrie de révolution alimentés selon la direction (\vec{e}_ϕ).

Dans le premier cas, le champ électrique \vec{E} n'a qu'une composante suivant la direction infiniment longue (oz). Le champ magnétique \vec{B} présente deux composantes suivant (or) et (\vec{e}_ϕ) dans le plan perpendiculaire à J_s (densité de courant source), impliquent ainsi une composante pour le potentiel vecteur magnétique \vec{A} suivant la direction (oz).

Dans le deuxième cas, le courant J_s , est dirigé suivant l'angle ϕ du système de coordonnées cylindriques (r, ϕ, z), le champ magnétique \vec{B} possède alors deux composantes, l'une suivant la

direction (or) et l'autre suivant la direction (oz), imposant ainsi pour le potentiel vecteur une seule composante A_ϕ (désignée par la suite A).

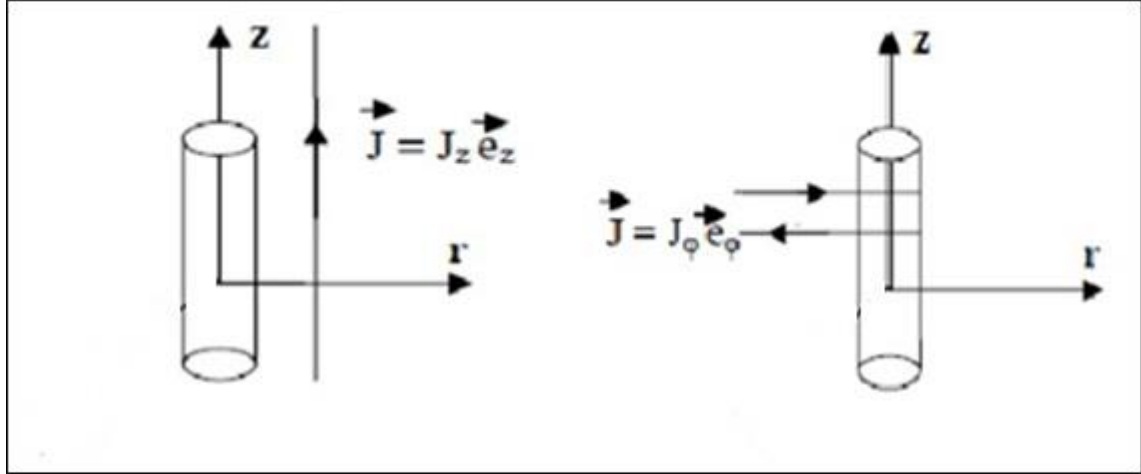


Figure.II.1: Dispositif axisymétrique ou le courant selon la direction (oz) et dispositif axisymétrique ou le courant selon la direction (ϕ)

II.8.1 L'équation magnétodynamique d'un système cylindrique axisymétrique :

Pour le calcul numérique, différents choix de variables d'état aboutissant à des formulations différentes sont possibles. Les formulations en potentiels en particulier, sont toutefois mieux adaptées aux volumes finis. En se basant sur les équations de J.C.Maxwell, l'équation qui décrit l'évolution spatio-temporelle des phénomènes électromagnétiques, trouvée précédemment est la suivante:

$$\overrightarrow{Rot}(\nu \overrightarrow{Rot} \vec{A}) + \sigma \partial \vec{A} / \partial t = \vec{J} \quad (II.45)$$

Lorsque le courant est orienté suivant la direction (ϕ), alors le vecteur $\vec{A} = A_\phi$

Les différentes grandeurs vectorielles ont les composantes suivantes :

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{e}_r \\ J_\phi & \vec{e}_\phi \\ 0 & \vec{e}_z \end{pmatrix} \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{e}_r \\ E_\phi & \vec{e}_\phi \\ 0 & \vec{e}_z \end{pmatrix} \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{e}_r \\ A_\phi & \vec{e}_\phi \\ 0 & \vec{e}_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{B} = \begin{cases} B_r & \vec{e}_r \\ 0 & \vec{e}_\varphi \\ B_z & \vec{e}_z \end{cases} \quad \vec{H} = \begin{cases} H_r & \vec{e}_r \\ 0 & \vec{e}_\varphi \\ H_z & \vec{e}_z \end{cases}$$

Comme le vecteur \vec{A} est confondu avec sa composante orthogonale, sa divergence est naturellement nulle $\vec{A} = A_\varphi \vec{e}_\varphi$ et $\overrightarrow{Div} \vec{A} = 0$

En coordonnées cylindriques axisymétriques, nous avons :

$$\overrightarrow{Rot} \vec{A} = 1/r \begin{bmatrix} \vec{e}_r & r \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \varphi & \partial/\partial z \\ 0 & r A_\varphi & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{Rot} \vec{A} = 1/r [-\partial(r A_\varphi)/\partial z] \vec{e}_r + 1/r [0] \vec{e}_\varphi + 1/r [\partial(r A_\varphi)/\partial r] \vec{e}_z \quad (\text{II.46})$$

Et

$$\overrightarrow{Rot}(\nu \overrightarrow{Rot} \vec{A}) = -\{\partial/\partial r [\nu/r \partial(r A_\varphi)/\partial r] - \partial/\partial z [\nu \partial A_\varphi / \partial z]\} \vec{e}_\varphi \quad (\text{II.47})$$

Posons $K = \nu/r$ et $A^*\varphi = \vec{A}\varphi$

Donc l'équation (2.1) prend la forme :

$$\partial/\partial z K (\partial A^*\varphi / \partial z) + \partial/\partial r K (\partial A^*\varphi / \partial r) - \sigma/r (\partial A^*\varphi / \partial t) = J_s \quad (\text{II.43})$$

C'est une équation aux dérivées partielles, qui présente le comportement Magnétodynamique d'un dispositif axisymétrique bidimensionnel alimenté en courant. [7]

Dans ce modèle, on suppose que les courants électriques sont nuls dans la pièce à étudier et que les champs ne dépendent pas du temps, on obtient alors les relations suivantes :

$$\overrightarrow{Rot} \vec{H} = \vec{0} \quad (\text{II.48})$$

car les courants sont nuls

$\text{Div} \vec{B} = 0$ conservation du champ

C'est le cas des dispositifs pour lesquels les champs sont créés par des forces magnétomotrices extérieures et indépendantes du dispositif étudié, ou bien par l'effet d'aimants permanents pour lesquels on a la loi :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_r$$

La relation suivant, implique qu'il existe une fonction Φ , potentiel scalaire magnétique telle que :

$$\vec{H} = \text{Grad } \Phi \quad (\text{II.49})$$

On obtient alors :

$$\text{Div}(\mu \text{Grad } \Phi) = \text{Div} \vec{B}_r \quad (\text{II.50})$$

En tridimensionnel, l'utilisation du potentiel scalaire et vectoriel sont indispensables, tandis qu'en cylindrique axisymétrique, seul le potentiel vecteur apparaît, le potentiel scalaires s'annule naturellement. Ainsi, vu que le vecteur \vec{A} n'a qu'une seule composante A_ϕ , facilitera énormément les calculs. [7]

II.9 Différentes techniques de résolutions des équations aux dérivées partielles :

Les principales méthodes de résolution des EDPs dans les milieux linéaires sont : la méthode des différences finies(MDF), la méthode des éléments finis(MEF), la méthode des volumes finis(MVF), la méthode des intégrales de frontières(MIF), la méthode des circuits couplés(MCC).

L'utilisation des méthodes numériques de discrétisation consiste à ramener la résolution du système d'équations différentielles dans le domaine d'étude, compte tenu des conditions aux limites, à celle d'un système d'équation algébriques dont la solution conduit à la détermination des champs électromagnétiques et du déplacement.[13]

II.9.1 Méthode des Eléments Finis (MEF) :

La méthode des éléments finis est plus générale car elle est mieux adaptée aux géométries complexes et aux matériaux non linéaires.

Dans cette méthode on cherche à exprimer une formulation intégrale basée sur l'une des deux approches suivantes :

- La méthode variation elle qui consiste à minimiser une fonctionnelle qui représente généralement, l'énergie du système étudié. Cette méthode n'est donc applicable que si

on connaît une fonctionnelle équivalente au problème différentiel que l'on veut résoudre.

- La méthode des résidus pondérés ou méthode projective qui consiste à minimiser le résidu induit par l'approximation de la fonction inconnue.

La méthode des éléments finis consiste à subdiviser le domaine d'étude en domaines élémentaires appelés éléments finis, comme le montre la figure (Figure.II.3) et à exprimer l'inconnue sur chaque élément par les fonctions d'interpolation simples en fonction des valeurs de l'inconnue en chacun des sommets de cet élément. L'inconnue devra vérifier globalement les conditions de continuité à l'interface et au passage d'un milieu à un autre.

Pour des structures bidimensionnelles, les éléments de maillage sont souvent des triangles, tandis que dans les problèmes tridimensionnels, les éléments sont de forme tétraédrique ou prismatique.

L'avantage de s'adapter aux géométries complexes et la prise en considération des non linéarités ont fait que la méthode des éléments finis soit très utilisée en électromagnétisme bien qu'elle soit quelque peu difficile à mettre en œuvre puisqu'elle requiert une grande capacité de mémoire et un temps de calcul important.[13]

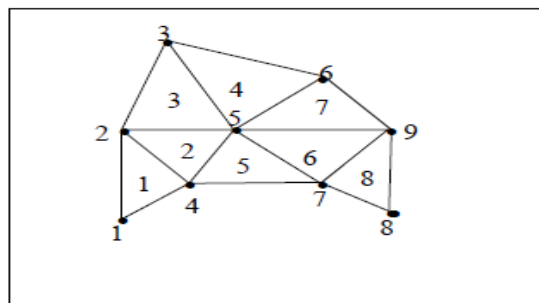


Figure.II.2: Un domaine d'étude discrétisé en Elément finis

II.9.2 Méthode des Différences Finis (MDF) :

C'est une méthode basée sur le théorème de Taylor où l'on remplace l'opérateur différentiel par un opérateur aux différences.

Le domaine d'étude est découpé au moyen d'une grille carrée dans le cas bidimensionnel et d'une grille cubique dans le cas tridimensionnel, l'équation à résoudre est écrite pour chaque

point ou nœud de maillage, pour cela on aura un système d'équations possédant un nombre d'équations égal au nombre de nœuds.

II.9.3 Méthode des intégrales de frontières (MIF) :

Lorsqu'on utilise la MDF ou la MEF, on calcule les variables inconnues dans tout le domaine. La MIF permet de ramener le maillage à la frontière du domaine. Ainsi, le calcul des valeurs de l'inconnue sur les frontières du domaine suffit pour obtenir la solution en tout point du domaine.

Pour ramener le problème sur les frontières, la MIF utilise le théorème d'Ostrogradski-Green. Cette méthode peut être intéressante pour l'étude de structure tridimensionnelle ou lorsque l'air ou les milieux passifs occupent une grande partie du domaine d'étude.

Cependant, cette méthode a l'inconvénient de conduire à un système algébrique à matrice pleine (pas de termes nuls). Ceci augmente le temps utilisateur, donc le coût de calcul.

II.9.4 Méthode des Volumes Finis (MVF) :

La MVF se déduit de la MDF. Le domaine d'étude (Ω) est subdivisé en un nombre d'éléments finis. Chaque élément contient quatre nœuds, pour le cas bidimensionnel axisymétrique, un volume fini entoure chaque nœud.

L'équation différentielle est projetée sur une fonction de projection bien déterminée et ensuite intégrée dans chacun des volumes élémentaires. Pour calculer l'intégrale dans le volume élémentaire, la fonction inconnue est représentée à l'aide d'une fonction d'approximation (linéaire, parabolique, puissance, exponentielle,...etc.) entre deux nœuds consécutifs. Ensuite, la forme intégrale est discrétisée dans le domaine d'étude.

L'équation discrétisée de cette façon exprime le principe de conservation pour l'inconnu dans l'élément de volume et la solution obtenue est constituée uniquement par les valeurs nodales. Cette méthode est utilisée, en particulier en mécanique des fluides (l'équation d'écoulement), où elle est apparue depuis une vingtaine d'années, sa procédure donne une solution plus précise que celle fournie par la MDF.

L'équation discrète obtenue exprime le principe de conservation de la fonction sur le volume de contrôle.

II.10 CONCLUSION :

Ce chapitre a été consacré à l'étude du modèle magnétodynamique dans un milieu supraconducteur, la formulation en champ électrique E à été utilisée.

Le modèle présenté est basé sur des équations aux dérivées partielles. Dans ce qui suit nous passerons à la mise en œuvre de la méthode des volumes finis utilisé pour ramener la résolution d'un système d'équations différentiels à un système algébrique.

Chapitre III :

Modèle Numérique

- ❖ INTRODUCTION
- ❖ Les Equations De Maxwell
- ❖ Lois constitutives des milieux
- ❖ Interprétation physique des équations de Maxwell
- ❖ Formulation des équations électromagnétiques
- ❖ Formulation de L'équation Magnétodynamique
- ❖ Formulation de l'équation thermique
- ❖ Le Modèle Cylindrique Axisymétrique En Electromagnétisme
- ❖ Différentes techniques de résolutions des équations aux dérivées partielles
- ❖ CONCLUSION

III.1 Introduction :

L'utilisation des méthodes numériques de discrétisation consiste à ramener la résolution de EDP à la résolution d'un système d'équations algébriques dans le domaine d'étude compte tenu des conditions aux limites. La solution obtenue permet de connaître l'inconnu dans chaque élément fini, Ainsi la distribution des grandeurs physiques dans le domaine d'étude.

Pour notre travail nous avons utilisé la MVF car elle est facile à concevoir contrairement à la MEF.

Ce chapitre sera consacré à la présentation de la méthode des volumes finis de chacune équations étudiées dans le cas axisymétrique.

III.2 Principe de la méthode des volumes finis :

La méthode des volumes finis est une méthode de discrétisation performante, elle consiste à utiliser une approximation simple de l'inconnu pour transformer les équations aux dérivées partielles en un système d'équation algébriques.

Dans cette méthode, le domaine de calcul est subdivisé en un certain nombre de volumes de contrôle (volumes finis) non superposés, tel que chaque volume entoure chaque point du maillage.

L'équation différentielle est intégrée pour chaque volume de contrôle .Le résultat de cette intégration donne l'équation discrète.

L'équation discrète obtenue exprime le principe de conservation de la fonction sur le volume de contrôle, et la solution obtenue est constituée uniquement par les valeurs nodales

$$\frac{\partial}{\partial z} K \left(\frac{\partial A^* \phi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} K \left(\frac{\partial A^* \phi}{\partial r} \right) - \sigma/r \left(\frac{\partial A^* \phi}{\partial t} \right) = J_s \quad (\text{III.1})$$

III.3 Discrétisation de l'équation magnétodynamiques bidimensionnelle axisymétrique :

Le domaine d'étude (Ω) est subdivisé en volumes élémentaires de telle manière que chaque volume entoure un nœud du maillage, comme le montre la figure suivante :

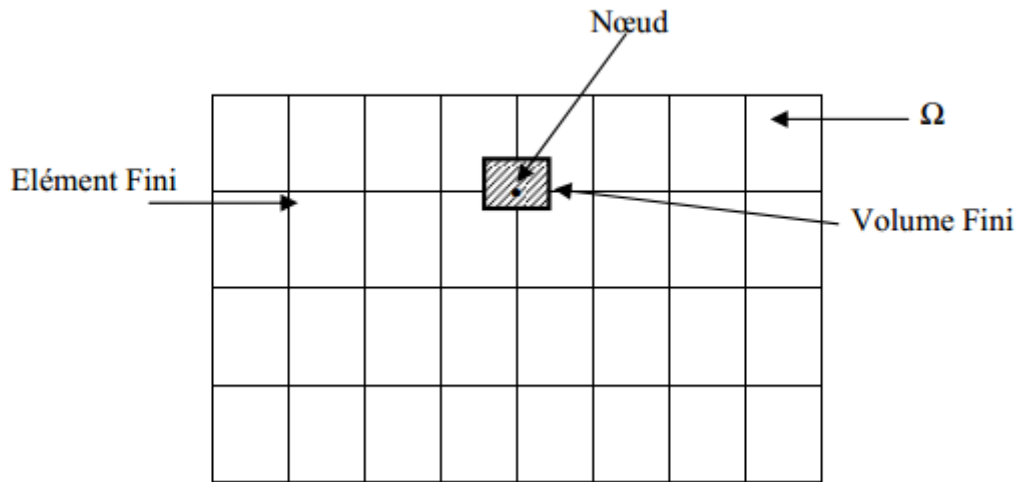


Figure.III.1 : Maillage du domaine d'étude. Rappelons l'équation

Magnétodynamique linéaire :

$$\frac{\partial}{\partial z} K \left(\frac{\partial A^* \varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} K \left(\frac{\partial A^* \varphi}{\partial r} \right) - \sigma/r \left(\frac{\partial A^* \varphi}{\partial t} \right) = J_s \quad (\text{III.2})$$

Avec : $K = v/r$ et $A^* \varphi = r A \varphi$

III.3.1 Le point principale 'P' est à l'intérieur du volume fini :

Chaque nœud principal 'P' est entouré par deux points voisins sur l'axe horizontal r qui sont ouest (w), est(e) et deux autres points voisins sur l'axe vertical z qui sont sud(s), nord (n).

On choisi le volume qui a les dimensions Δr et Δz , on discrétise l'équation pour qu'elle doit être applicable en tous domaines désires.

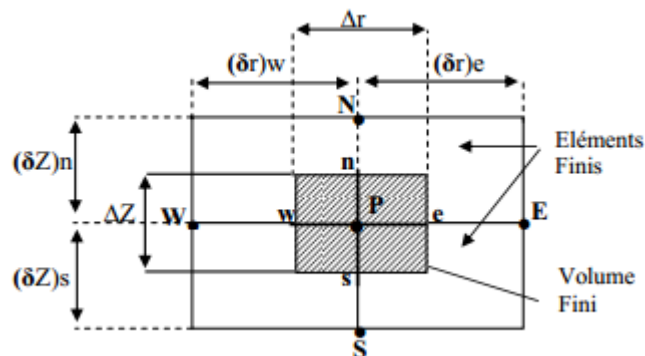


Figure.III.2 : Description d'un volume Fini

Nous intégrons l'équation magnétodynamique d'un système axisymétrique dans le volume choisi nous obtenons :

$$\int \int -\partial/\partial z [K (\partial A^* / \partial z)] dz dr + \int \int -\partial/\partial r [K (\partial A^* / \partial r)] dz dr + \int \int \sigma/r (\partial A^* / \partial t) dz dr + \int \int -J_s dz dr = 0 \quad (III.3)$$

On pose:

$$(I) = \int \int -\partial/\partial z [K (\partial A^* / \partial z)] dz dr$$

$$(II) = \int \int -\partial/\partial r [K (\partial A^* / \partial r)] dz dr$$

$$(III) = \int \int \sigma/r (\partial A^* / \partial t) dz dr$$

$$(IV) = - \int \int J_s dz dr$$

$$(I) = \int [-K (\partial A^* / \partial z)] dr = - [(K \partial A^* / \partial z) - (K \partial A^* / \partial z)] \Delta r$$

$$= (K n \Delta r / \Delta z n + K s \Delta r / \Delta z s) A^* p - (K n \Delta r / \Delta z n) A^* n - (K s \Delta r / \Delta z s) A^* s$$

$$(II) = \int [-K (\partial A^* / \partial r)] dz = - [(K \partial A^* / \partial r) - (K \partial A^* / \partial r)] \Delta z$$

$$= (K_e \Delta z / \Delta r e + K_w \Delta z / \Delta r_w) A^* p - K_e \Delta z / \Delta r e A^* e - K_w \Delta z / \Delta r_w A^* w$$

$$(III) = \int \int \sigma/r j_w A^* dz dr$$

$$= j_w \sigma_p / r_p A^* p \Delta r \Delta z$$

$$(IV) = \int \int J_s dz dr = J_s \Delta r \Delta z$$

On remplace les quatre intégrales trouvées dans l'équation (III .1) du système on obtient :

$$[K n \Delta r / \Delta z n + K s \Delta r / \Delta z s + K_e \Delta z / \Delta r e + K_w \Delta z / \Delta r_w + j_w \sigma_p / r_p \Delta r \Delta z] A^* p =$$

$$K n \Delta r / \Delta z n A^* n + K s \Delta r / \Delta z s A^* s + K_e \Delta z / \Delta r e A^* e + K_w \Delta z / \Delta r_w A^* w + J_s \Delta r \Delta z \quad (III.4)$$

Ainsi, l'équation algébrique finale s'écrit sous la forme :

$$K_p A^* p = K_n . A . n + K_s . A . s + K_e . A . e + K_w . A . w + J_s \Delta r \Delta z \quad (III.5)$$

Avec:

$$K_p = K_n \Delta r / \Delta z n + K_s \Delta r / \Delta z s + K_e \Delta z / \Delta r e + K_w \Delta z / \Delta r_w + j_w \sigma_p / r_p \Delta r \Delta z$$

$$K_p = K_n + K_s + K_e + K_w + j_w \sigma_p / r_p \Delta r \Delta z$$

$$K_N = K_n \Delta r / \Delta z_n ; K_S = K_s \Delta r / \Delta z_s ; K_E = K_e \Delta z / \Delta r_e ; K_W = K_w \Delta z / \Delta r_w$$

$$K_n = \sigma / r_p ; K_s = \sigma / r_p ; K_e = \sigma / r_p ; K_w = \sigma / r_p$$

Si la discrétisation du domaine comporte N nœuds, on est amené à étudier un système

De N équations à N inconnues qui sont les valeurs nodales de A. [7]

III.3.2 Le point principal 'P' est sur l'une des frontières du volume

fini :

Comme il est indiqué sur la figure ci- dessous, le point principal est sur la limite deux points voisins sur l'axe horizontal r qui sont est, ouest et un point voisin sur l'axe vertical z qui est sud ou nord.

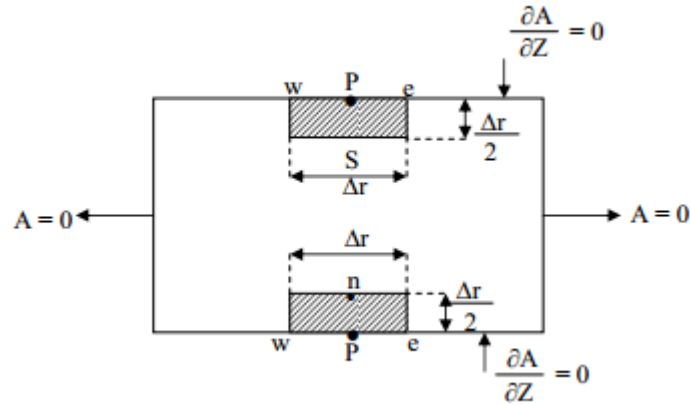


Figure.III.3: Le point principal sur les frontières

Nous intégrons l'équation qui régit le phénomène physique dans le cas où le point voisin est le nord.[7]

$$\int \int -\partial/\partial z [K(\partial A^* / \partial z)] dz dr + \int \int -\partial/\partial r [K(\partial A^* / \partial r)] dz dr + \int \int \sigma/r (\partial A^* / \partial t) dz dr + \int \int -Js dz dr = 0$$

Posons :

$$(I) = \int \int -\partial/\partial z [K(\partial A^* / \partial z)] dz dr$$

$$(II) = \int \int -\partial/\partial r [K(\partial A^* / \partial r)] dz dr$$

$$(III) = \int \int \sigma/r (\partial A^* / \partial t) dz dr$$

$$(IV) = - \int \int J_s dz dr$$

$$(I) = \int [-K(\partial A^* / \partial z)] dr = [(K\partial A^* / \partial z)n - (K\partial A^* / \partial z)p] \Delta r$$

$$= Kn((A_N^* - A_P^*) / \Delta zn) \Delta r$$

$$= [(Kn\Delta r) / \Delta zn] A_P^* - [(Kn\Delta r) / \Delta zn] A_N^*$$

$$(II) = \int [K(\partial A^* / \partial r)] dz = [(K\partial A^* / \partial r)e - (K\partial A^* / \partial r)w] \Delta z / 2$$

$$= [Ke(A_E^* - A_P^*) / \Delta re] + Kw(A_P^* - A_W^*) / \Delta rw] \Delta z / 2$$

$$= [(Ke\Delta z / 2 \Delta re) + (Kw \Delta z / 2 \Delta rw)] A_P^* - (Ke\Delta z / 2 \Delta re) A_E^*$$

$$+ (Kw \Delta z / 2 \Delta rw) A_W^*$$

$$(III) = \int \int j w \sigma / r A^* dr dz$$

$$= 1/2 [j w (\sigma_p / r_p)] A_P^* \Delta r \Delta z$$

$$= jw/2 (\sigma_p / r_p) \Delta r \Delta z A_P^*$$

$$(IV) = Js \Delta r \Delta z / 2$$

On substitue ces quatre intégrales dans l'équation (2.2) on trouve :

$$[Kn\Delta r / \Delta zn + Ke\Delta z / 2\Delta re + Kw\Delta z / 2\Delta rw + j w/2 (\sigma_p / r_p) \Delta r \Delta z] A_P^* =$$

$$Kn\Delta r / \Delta zn A_N^* + Ke\Delta z / 2\Delta re A_E^* + Kw\Delta z / 2\Delta rw A_W^* + 1/2 Js \Delta r \Delta z \quad (III.6)$$

Dans le cas ou le point voisin est le sud (limite supérieur) on obtient le résultat suivant :

$$[KS\Delta r / \Delta zs + Ke\Delta z / 2\Delta re + Kw\Delta z / 2\Delta rw + j w/2 (\sigma_p / r_p) \Delta r \Delta z] A_P^* =$$

$$KS \Delta r / \Delta zs A_S^* + Ke\Delta z / 2\Delta re A_E^* + Kw \Delta z / 2\Delta rw A_W^* + 1/2 Js \Delta r \Delta z \quad (III.7)$$

III.4 L'équation thermique :

Rappelons que le modèle thermique est défini par la relation suivante :

$$\rho(T) * C_p(T) * \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla(K(T) \nabla T) = W \quad (III.8)$$

$$\rho(T) * C_p(T) * \frac{T^t - T^{t-1}}{\Delta t} - \text{div}(K \text{ grad} T) = W$$

En calcule

$$\text{div} (\mathbf{K} \text{ grad} T) = \quad (III.9)$$

$$\text{grad} T = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_k$$

En axisymétrie nous avons:

$$\text{grad} T = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_k \quad (III.10)$$

En remplace (III.10) sur (III.9) et (III.7) sur (III.8):

$$\text{div}(k \text{ grad} T) = \frac{1}{r} \frac{\partial r \partial T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (III.11)$$

$$\rho C_p \frac{T^t - T^{t-1}}{\Delta t} - \left(\mathbf{K} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r \partial T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \right) = W \quad (III.12)$$

L'intégration de l'équation (III.12) sur le volume élémentaire de type rectangulaire donne :

$$\iint \frac{1}{r} \frac{\partial r \partial T}{\partial r^2} dr dz = \frac{1}{r} \left(\left(rk \frac{\partial T}{\partial r} \right)_e - \left(rk \frac{\partial T}{\partial r} \right)_w \right) \Delta z$$

$$= \frac{1}{r_p} \left[\frac{(Te - Tp)r_e k_e}{\Delta r_e} - \frac{(Tp - Tw)r_w k_w}{\Delta r_w} \right] \Delta z$$

$$\iint \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dr dz = \frac{1}{r} \left(\left(rk \frac{\partial T}{\partial z} \right)_t - \left(rk \frac{\partial T}{\partial z} \right)_b \right) \Delta r$$

$$= \left[\frac{(Te - Tp)k_t}{\Delta z_t} - \frac{(Tp - Tb)k_b}{\Delta z_b} \right] \Delta r$$

$$\iint \rho C_p \frac{T^t - T^{t-1}}{\partial t} = \frac{Tp^t - Tp^{t-1}}{\Delta t} \rho C_p \Delta z \Delta r$$

À partir de l'équation (1) :

$$\frac{Tp^t - Tp^{t-1}}{\Delta t} \rho C_p \Delta z \Delta r - \left(\frac{1}{r_p} \left[\frac{(Te - Tp)r_e k_e}{\Delta r_e} - \frac{(Tp - Tw)r_w k_w}{\Delta r_w} \right] \Delta z + \left[\frac{(Te - Tp)k_t}{\Delta z_t} - \frac{(Tp - Tb)k_b}{\Delta z_b} \right] \Delta r \right) = W \Delta z \Delta r \quad (III.13)$$

Et pour simplifier l'équation on poser :

$$\text{atv} = \frac{\rho C_p \Delta z \Delta r}{\Delta t}$$

$$ate = \frac{ke \Delta z re}{\Delta re} \frac{1}{r_p}$$

$$atw = \frac{ke \Delta z rw}{\Delta rw} \frac{1}{r_p}$$

$$atb = \frac{kb \Delta r}{\Delta zb}$$

$$at_T = \frac{kT \Delta r}{\Delta zT}$$

On obtient donc :

$$(III.13) \Leftrightarrow atv(Tp^t - Tp^{t-1}) - (ate(Te - Tp)) - atw(Tp - Tw) - atb(Tp - Tb) + at_T(Tt - Tp) = W \Delta z \Delta r$$

$$Tp (atv + ate + atw + att + atb) = (atv.Tp^{t-1} + ate.Te + atw.Tw + att.Tt + atb.Tb + W . \Delta z . \Delta r) \quad (III.14)$$

L'équation algébrique finale s'écrit sous la forme :

$$Tp = \frac{1}{apt} (atvTp^{t-1} + ateTe + Twatw + att.Tt + atbTb + W \Delta z \Delta r) \quad (III.15)$$

Avec:

$$apt = (atv + ate + atw + att + atb)$$

III.5 Les conditions aux limites :

Pour la résolution des équations aux dérivées partielles électromagnétiques, il est inévitable d'associer les conditions aux limites du domaine d'étude à ces équations .en électromagnétisme on a deux types de conditions :

III.5.1 Condition de Dirichlet :

Les conditions aux frontières de Dirichlet sont décrites par des valeurs de potentiel connues sur toutes les surfaces entourant le milieu où l'on cherche la distribution de potentiel.

III.5.2 Condition de Neumann :

Elle est utilisée dans le cas où le système à étudier présente des plans de symétrie.

Les conditions aux frontières de Neumann sont décrites par des valeurs de la dérivée normale du potentiel ($\partial A / \partial n$) connues sur toutes les surfaces entourant le milieu où l'on cherche la distribution de potentiel

III.6 Propriétés physiques aux interfaces :

L'interface est la partie intermédiaire entre deux milieux différents, comme il est indiqué sur la figure suivante :

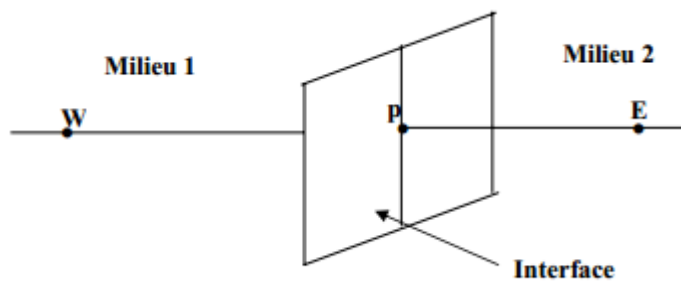


Figure.III.4:Description d'un nœud principal à l'interface

Les nœuds qui se trouvent à l'interface prennent les propriétés physiques suivantes :

$$\sigma = (\sigma_A + \sigma_B) / 2 \text{ (conductivité d'interface)}$$

$$\mu = (\mu_A + \mu_B) / 2 \text{ (perméabilité d'interface)}$$

$$J_s = (J_{sA} + J_{sB}) / 2 \text{ (densité de courant d'interface)}$$

III.7 Méthode de résolution numérique des systèmes d'équations algébriques :

Pour la résolution des systèmes d'équations algébriques linéaires, il existe deux catégories :

- Les méthodes directes
- Les méthodes itératives[7]

III.7.1 Méthodes Directes :

Ces méthodes sont applicables pour les systèmes linéaires dont le nombre d'élément est peu.

Elles sont précises et exactes mais demandent beaucoup d'espace mémoire et de temps de calcul.

$$[A] \{X\} = \{B\} \text{ avec } A = \text{constante}$$

Parmi les méthodes directes nous citons :

- Méthode de **Cramer**
- Méthode de **Gauss**
- Méthode de **Jordon**
- Méthode de **Crout**
- Méthode de **Cholevski**

III.7.2 Méthodes Itératives :

Ces méthodes sont mieux adaptées aux matrices d'ordre élevé comportant de nombreux éléments nuls (matrice creuse). Parmi ces méthodes, nous citons

III.7.2.1 Méthode de Jacobi :

Elle est basée sur la transformation du système $A \cdot X = B$ en

$$X_i^{(k+1)} = \frac{[bi - \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j^k]}{a_{ii}}; (i \neq j); i = 1, \dots, n \quad (\text{III.16})$$

On estime une valeur arbitraire initiale X_i^0 pour $(k = 0)$, le calcul sera arrêté si

$$\left| X_i^{(k+1)} - X_i^k \right| < \varepsilon \quad \text{ou} \quad \left| X_i^{(k+1)} - X_i^k \right| / X_i^k < \varepsilon \quad (\text{III.17})$$

ε : précision imposée par l'utilisateur.

III.7.2.2 Méthode de Gauss Seidel :

Cette méthode consiste à transformer le système $A \cdot X = B$ en :

$$X_i^{(k+1)} = \frac{[bi - \sum_{j=1}^{(i-1)} a_{ij} X_j^{(k+1)} - \sum_{j=(i+1)}^n a_{ij} X_j^k]}{a_{ii}}, i = 1 \dots n \quad (\text{III.18})$$

En donnant aux inconnues X_i^k des valeurs arbitraires initiales X_i^0 pour $(k = 0)$, le calcul sera arrêté si

$$\left| X_i^{(k+1)} - X_i^k \right| < \varepsilon \quad \text{ou} \quad \left| X_i^{(k+1)} - X_i^k \right| / X_i^k < \varepsilon \quad (\text{III.19})$$

ε : précision imposée par l'utilisateur.

III.7.2.3 Méthode de Relaxation :

Pour améliorer la rapidité de la convergence dans les méthodes itératives, on utilise un facteur de relaxation λ tel que :

$$X_i^{(k+1)} = X_i^k + \lambda (X_i^{(k+1)} - X_i^k) \quad (\text{III.20})$$

III.8 Algorithme de résolution :

Après avoir donné les modèles numériques de calcul, l'étape suivante consiste à implémenter sous l'environnement MATLAB le code de calcul. Cet environnement présente de nombreux avantages tels que le calcul matriciel, l'interface graphique, la technique des matrices creuses qui permet la réduction du temps de calcul, et celui de l'utilisateur.

Un code de calcul basé sur les modèles mathématico numériques est développé. Ce code de calcul est réalisé à partir des sous modules effectuant chacun une tâche différente. Chaque module est réalisé par un programme interactif. Ces trois modules sont décrits comme suit :

- Module de Maillage
- Module de base de données
- Module d'affectation

La figure (III.5) présente l'organisation du code de calcul utilisé pour la résolution des équations électromagnétiques et thermique. Ce code de calcul est constitué de trois blocs principaux Bloc d'entrée, Bloc de résolution et Bloc de sortie.

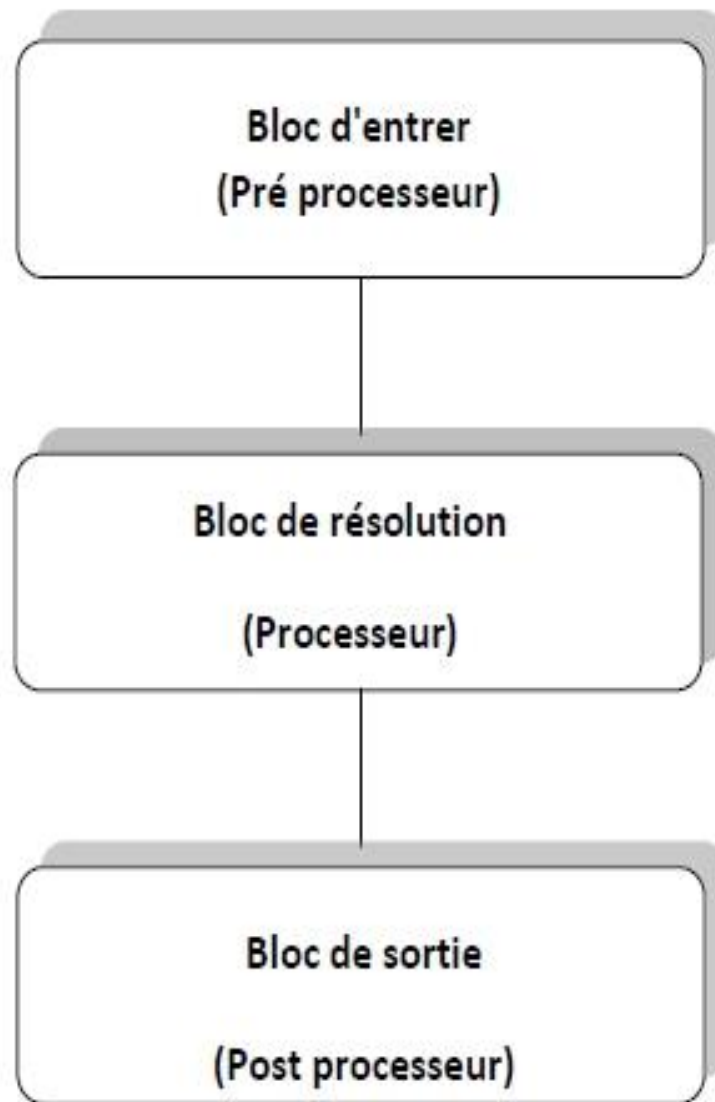
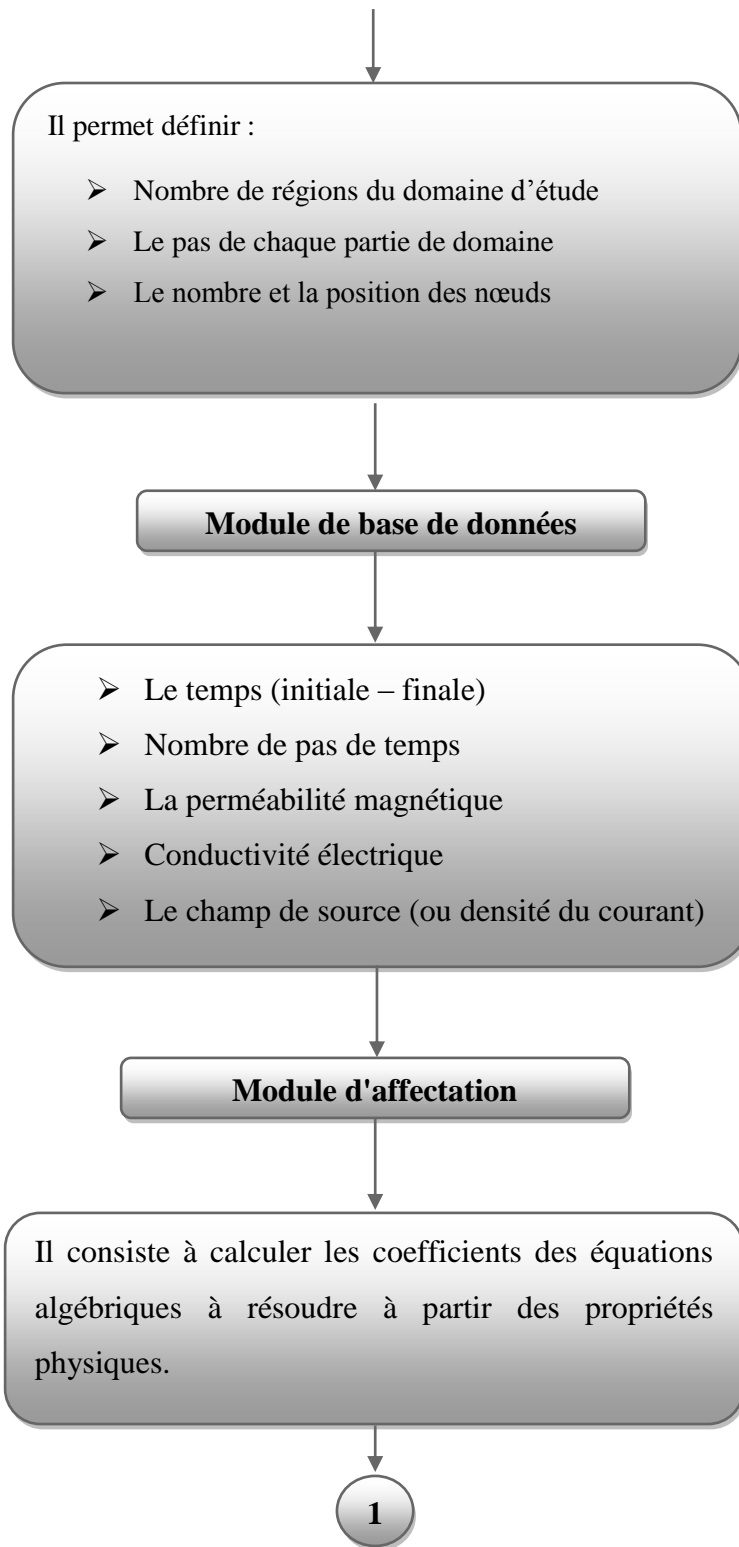


Figure.III.5: Organigramme du code de calcul

Et la figure (III.6) illustre les différentes fonctions de la procédure du calcul et de la résolution de l'équation électromagnétique et thermique.



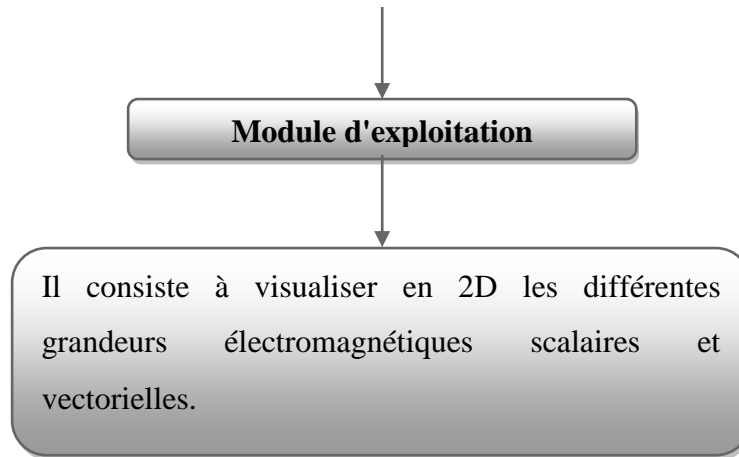


Figure.III.6: Algorithme de résolution du code de calcul de la résolution de l'équation électromagnétique et thermique

III.9 CONCLUSION :

Ce chapitre a été consacré à la modélisation des matériaux SHTc, les différents modèles de l'électromagnétisme ont été présentés, en particulier le modèle magnétodynamique dans un milieu comportant un matériau supraconducteur à haute température critique. La formulation en potentiels, vecteur magnétique \vec{A} et scalaire V a été adoptée pour résoudre le problème magnétique dans de tel problème. La méthode des volumes finis (MVF) a été adoptée comme méthode de résolutions des équations aux dérivées partielles caractéristiques aux phénomènes physiques à traité. L'emploi la MVF conduit à un système d'équations algébriques. Celui-ci a été résolu par la méthode de Gauss Seidel.

Chapitre IV :

Applications et résultats

- ❖ INTRODUCTION
- ❖ Dispositif
- ❖ Résultats Des Simulations
- ❖ Répartition spatiale de la température T au sein de la pastille supraconductrice
- ❖ L'influence de la valeur de la densité du courant critique J_c sur le comportement thermique d'un limiteur du courant
- ❖ L'influence de la géométrie de la pastille supraconductrice sur le comportement résistif d'un limiteur du courant

IV.1 INTRODUCTION :

Depuis l'apparition des supraconducteurs à haute température critique leurs applications ne cessent d'augmenter. L'une des applications la plus prometteuse est l'application des ces matériaux dans le domaine de la limitation du courant de défaut dans les réseaux électriques. Pour cela, nous nous sommes orientés à l'étude de la possibilité d'implémenter les matériaux supraconducteurs à haute température critique dans les réseaux électriques afin de limiter les courants de défauts (limiteur de courant supraconducteur).

Ces limiteurs offrent l'avantage d'une part, d'être invisible dans le régime assigné ou nominal (résistance nulle) et de pouvoir limiter les courants de défaut dans un temps de réponse très réduit par rapport aux limiteurs de courant classique ou de disjoncteurs conventionnels.

Une telle application nécessite de déterminer avec exactitude les grandeurs électromagnétiques et thermiques. Pour cela nous présentons dans ce chapitre les résultats des simulations des comportements magnétique-thermique obtenus à partir du code numérique développé et implémenter sous l'environnement MATLAB, où nous avons adopté la méthode des volumes finis comme méthode de résolution de l'ensemble des équations aux dérivées partielles caractéristiques aux phénomènes physiques à traiter. Les résultats de simulation à caractère magnétique et thermique seront largement présentés.

IV.2 Dispositif :

Le principe de base du limiteur de courant fait intervenir les propriétés de l' Bi 2212 qui varient considérablement en fonction de la température. Les tableaux ci-dessous résument les propriétés physiques et géométriques des pastilles supraconductrices utilisées dans les simulations qui vont être présentés dans la partie ci-dessous. Le but est de voir l'influence des propriétés physiques et géométriques sur le comportement magnétique et thermique durant le fonctionnement d'un limiteur de courant conçu à partir d'un supraconducteur à haute température critique.

Symbole	Quantité	Valeur
T_c	Température critique	95K
T_0	Température de l'environnement	77K
J_{c0}	La densité courant critique	10^8 A/m^2
J_{cc}	La densité de courant de court-circuit	$5.10^7 \sim 4.10^8$
$\gamma\rho_{cp}$	capacité calorifique	$40000 \text{ J/m}^3.\text{K}$
Σ	conductivité thermique	9 W/m.K

Tableau IV.1 : Paramètres de la simulation pour la pastille Bi-2212

IV.3 Résultats Des Simulations :

Dans cette partie, nous présentons les résultats des simulations d'une pastille supraconductrice qui doit subir un courant de court-circuit franc dans l'allure est présentée dans la Figure.IV.1. Dans le cas de la limitation de courant de défaut, un supraconducteur à haute température critique peut se retrouver dans deux états différents, un état dit intermédiaire et un état normal. Dans le cas où l'une des grandeurs dépasse la valeur critique, la pastille supraconductrice transite d'un état peu dissipatif (résistance presque nulle) vers un autre état très dissipatif caractérisé par une résistance très élevée. Cet instant représente le temps d'intervention du supraconducteur. Cette propriété a mené à exploiter ces matériaux pour la conception des limiteurs de courant à base de matériaux supraconducteurs haute température critique.

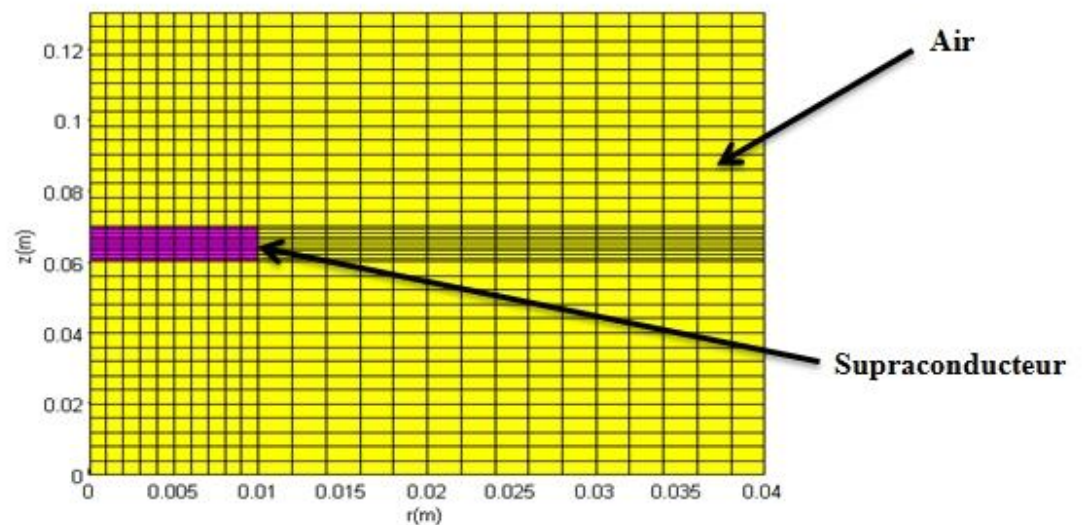


Figure IV.1: maillage du dispositif

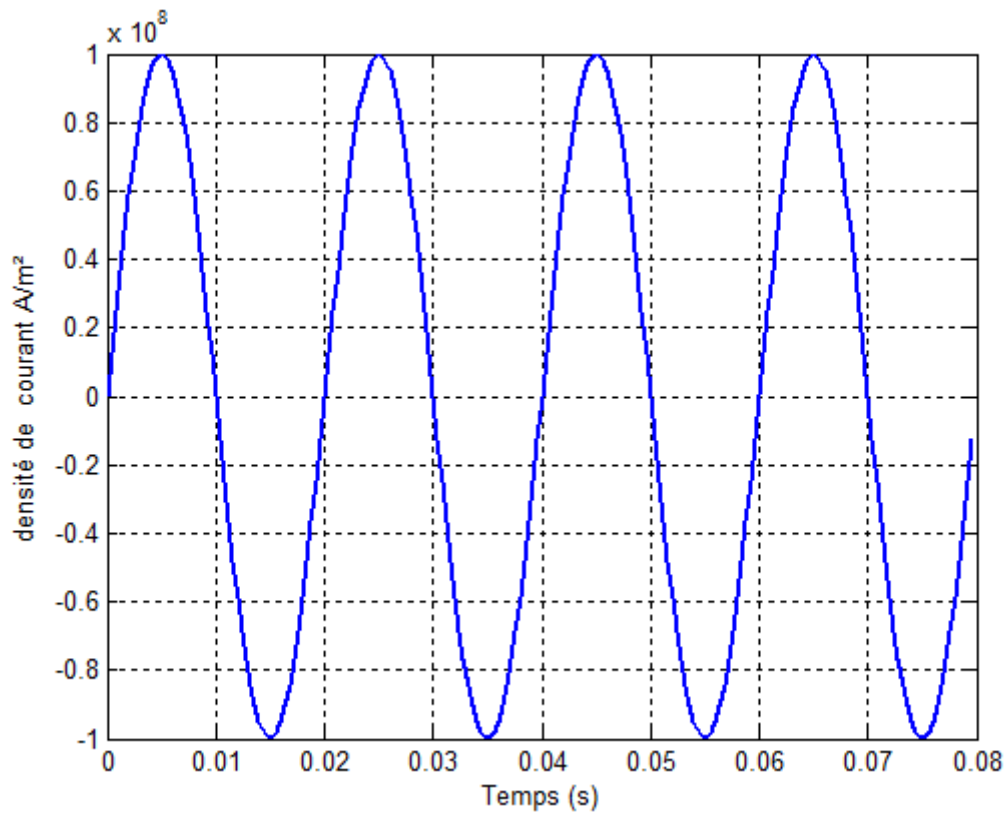


Figure IV.2: L'allure du courant de court-circuit appliqué.

Le but des simulations présentées est de calculer la répartition spatiale de la température au sein du supraconducteur. A partir de cette grandeur, on peut déterminer l'instant de l'intervention du supraconducteur d'une part, d'autre part, de voir l'influence du supraconducteur sur le comportement du réseau électrique en calculant l'impédance du limiteur de courant durant son régime normal ou très dissipatif durant l'apparition d'un défaut au sein d'un réseau électrique, ainsi, déterminer la valeur du courant circulant dans le réseau après limitation.

La figure IV.3 représente la répartition des courants supraconducteurs aux seins de la pastille supraconductrice à l'instant $t = 0.0396$ s. Ces résultats ont été obtenus en supposant que la pastille a une densité de courant critique $J_c = 1 \times 10^8 \text{ A/m}^2$, et une densité de courant de court-circuit $J_{cc} = 1 \times 10^8 \text{ A/m}^2, 3 \times 10^8 \text{ A/m}^2$. Selon ces résultats, on remarque que la densité de courant répartie au sein du supraconducteur dépend de la valeur de J_{cc} . Cette densité

IV.4 Répartition spatiale de la température T au sein de la pastille supraconductrice :

Les résultats ci-dessous représentent la répartition deux dimensionnelle de la température au sein de la pastille supraconductrice utilisée pour limiter le courant de défaut. La température au sein de la pastille augmente progressivement dans le temps, c'est-à-dire avec l'augmentation du courant de défaut. La température atteint son maximum au cœur de la pastille supraconductrice et elle décroît considérablement sur les parois de la pastille, cela est dû à l'effet de refroidissement du fluide cryogénique.

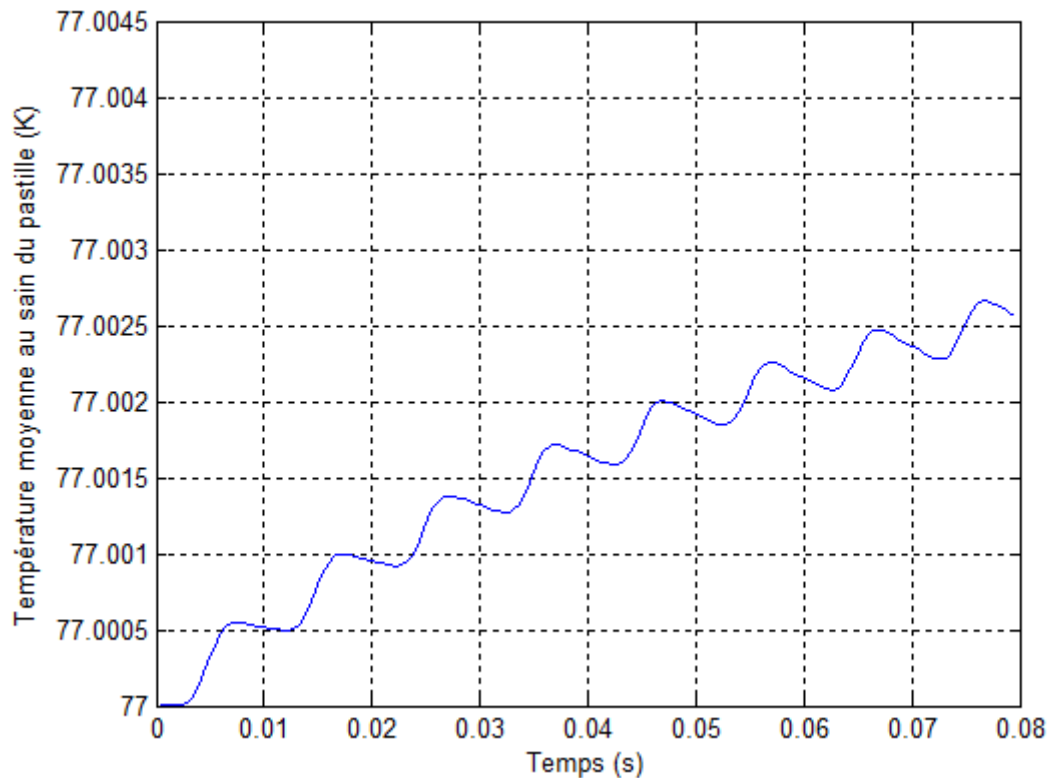


Figure .IV.3: la variation de la température moyenne en fonction du temps.

Selon les figures (**IV.3, IV.4**) on remarque que la pastille supraconductrice est toujours dans un état supra c'est-à-dire que le limiteur de courant ne peut intervenir. La température maximale est presque de $77.004 \text{ }^{\circ}\text{K} \sim 77\text{K} \sim T_{c0}$.

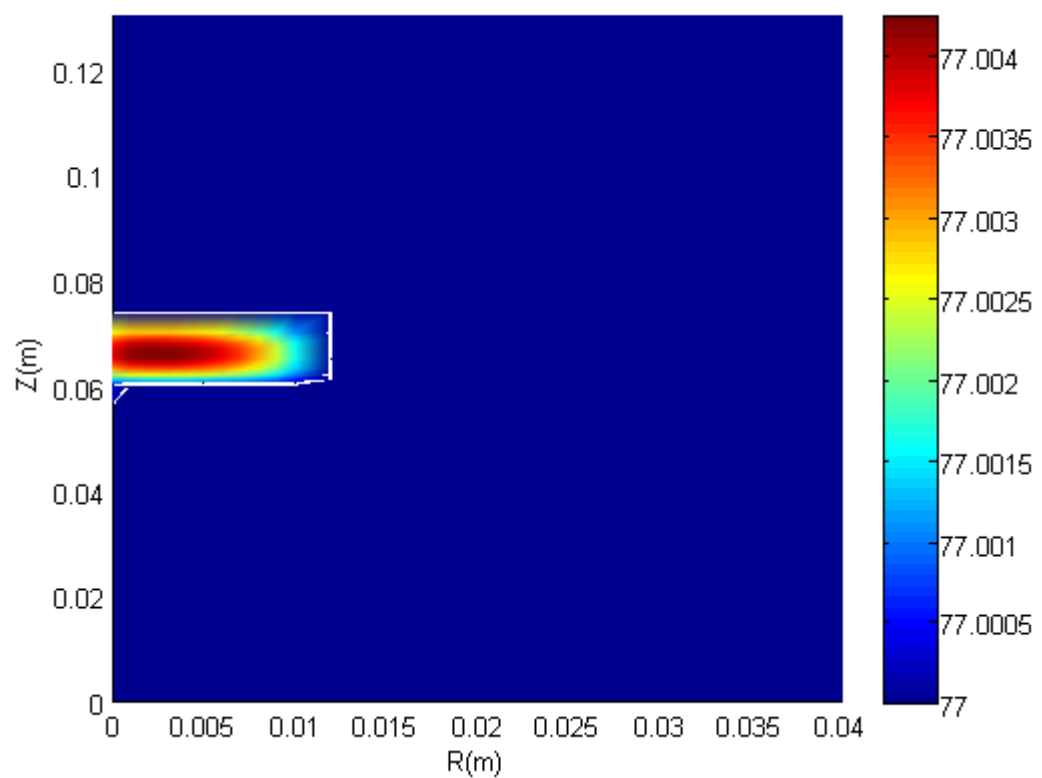


Figure IV.4: la distribution de la température.

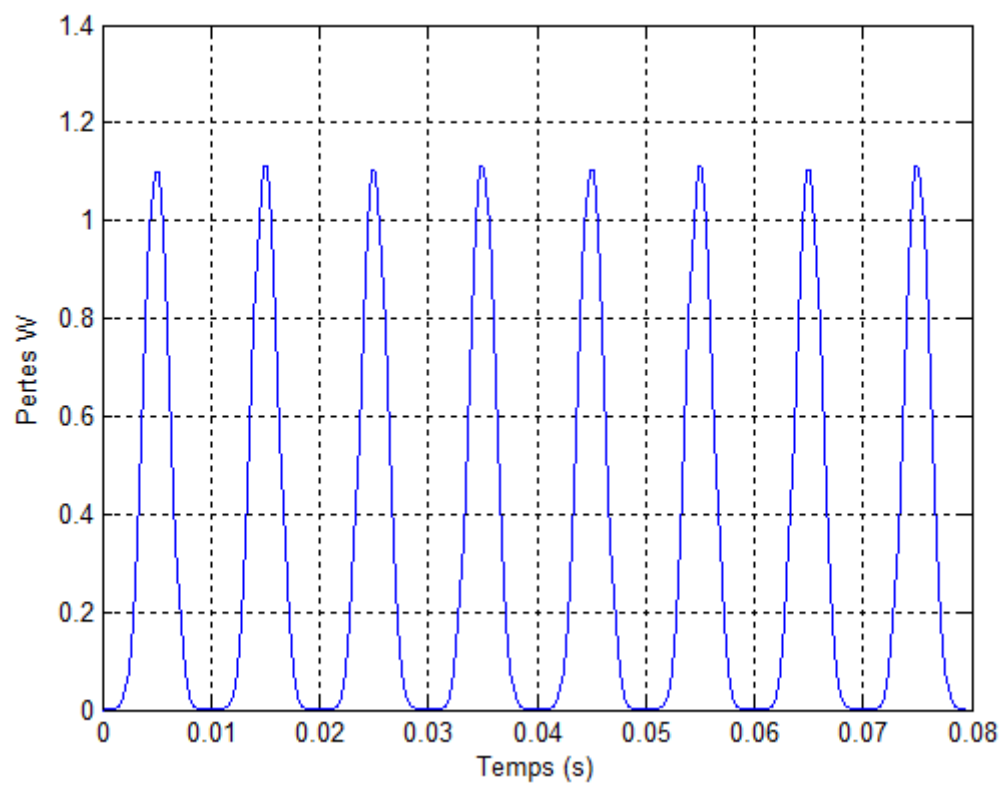


Figure .IV.5: les pertes en fonction du temps.

La figure IV.5 représente la variation des pertes moyennes dans la pastille supraconductrice en fonction du temps. En remarque que les pertes augmentent avec le temps. Ceci peut être expliqué par le faite que la variation du champ électrique augmente avec le temps selon la figure IV.6 est par conséquent, la densité de courant critique augmente comme il explique la figure IV.7, ceci provoquera aussi l'augmentation des pertes au sein de la pastille supraconductrice.

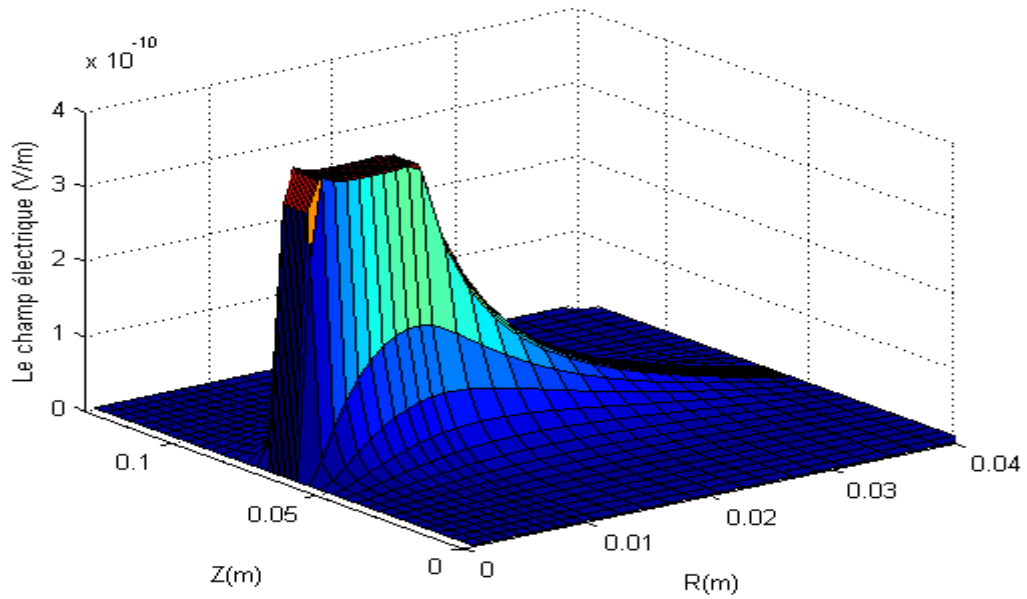


Figure IV.6: la distribution de champ électrique

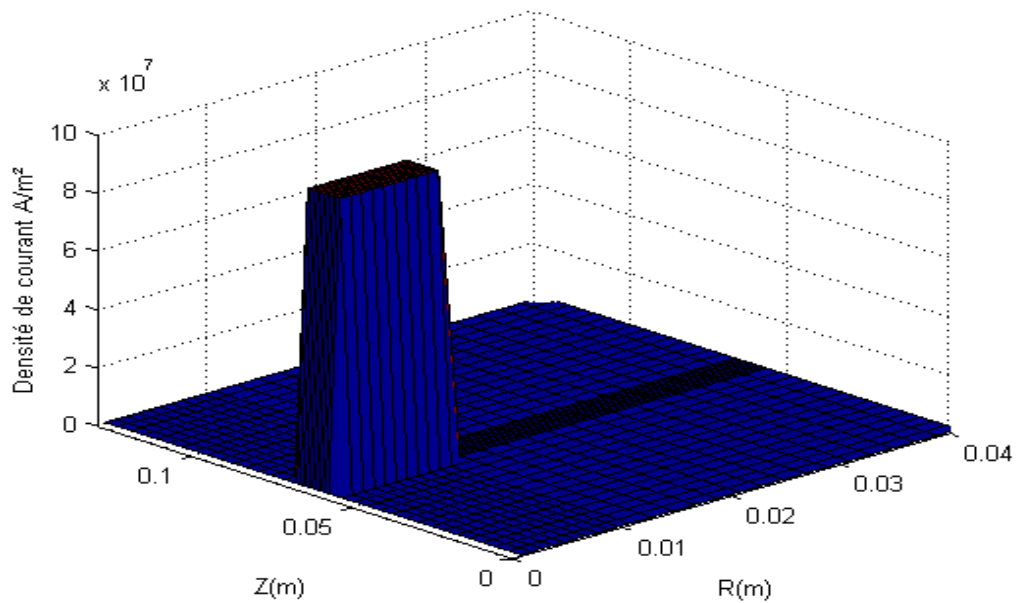


Figure IV.7: la distribution de courant électrique.

IV.5 L'influence de la valeur de la densité du courant sur le comportement thermique d'un limiteur de courant :

Dans le but de montrer l'influence de la valeur de la densité du courant critique J_c sur le comportement thermique d'un limiteur de courant, nous avons calculé la répartition spatiale de la température au sein de pastille supraconductrice pour la valeur de $J_s = 3 \cdot 10^8$:

En cas de défaut et selon les résultats présentés ci-dessous, il est clair que la pastille supraconductrice transite d'un état supraconducteur vers un état normal en supposons que la température critique T_c est de 95°K à $t=0.028\text{s}$.

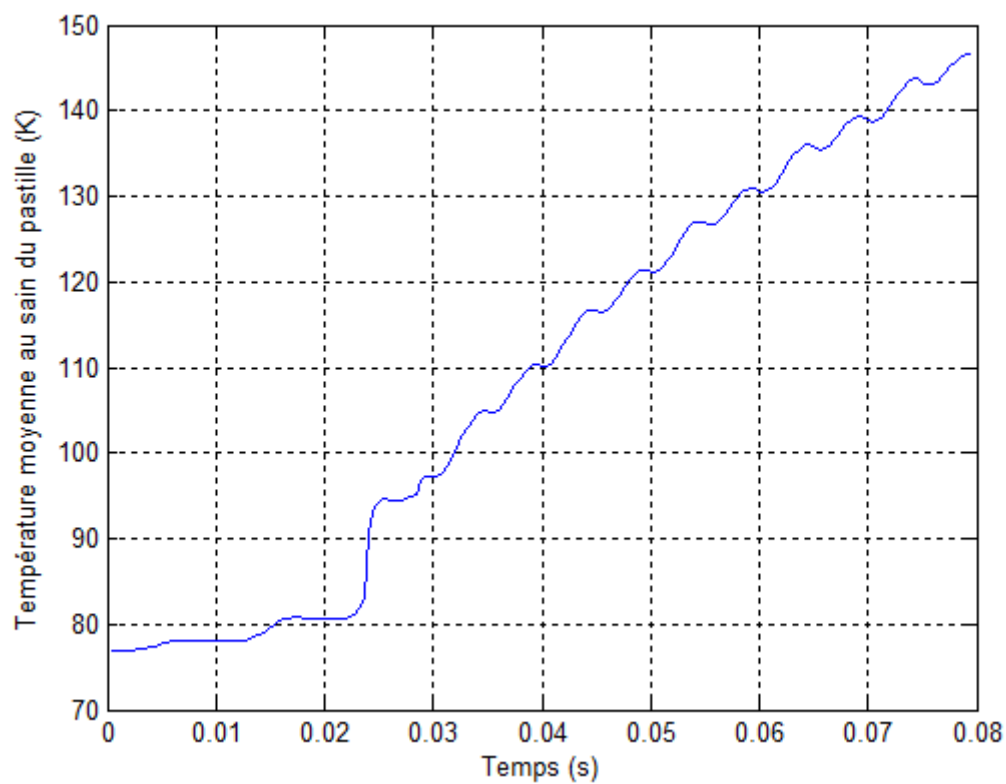


Figure IV.8: la variation de la température moyenne en fonction du temps.

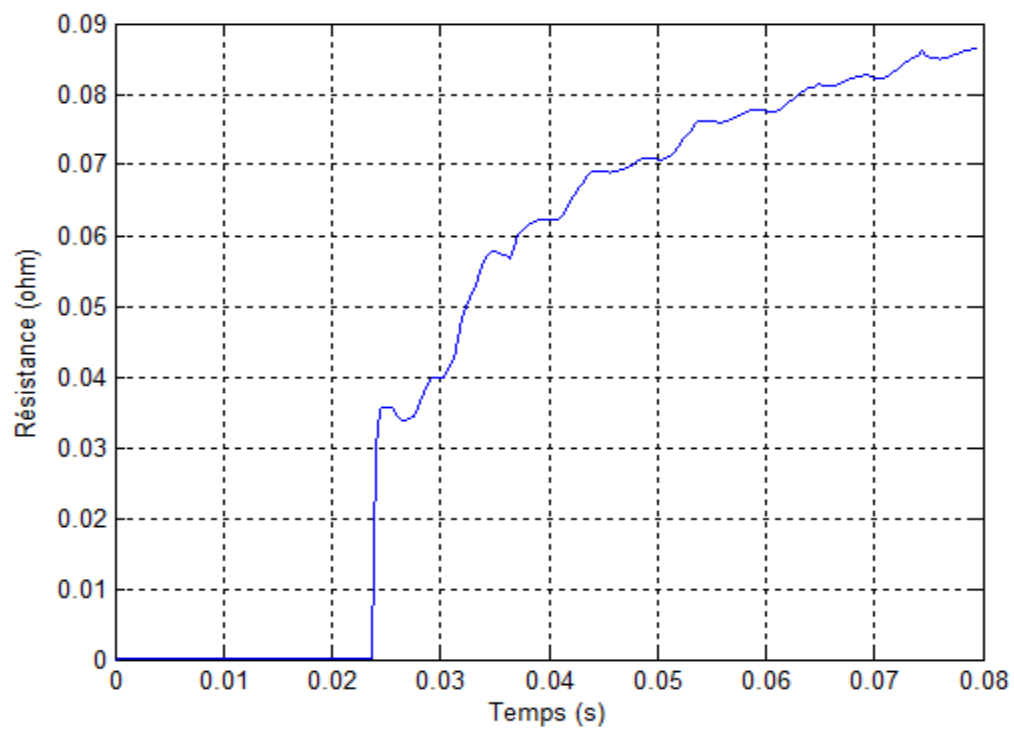


Figure IV.9: la variation de la résistance moyenne en fonction du temps.

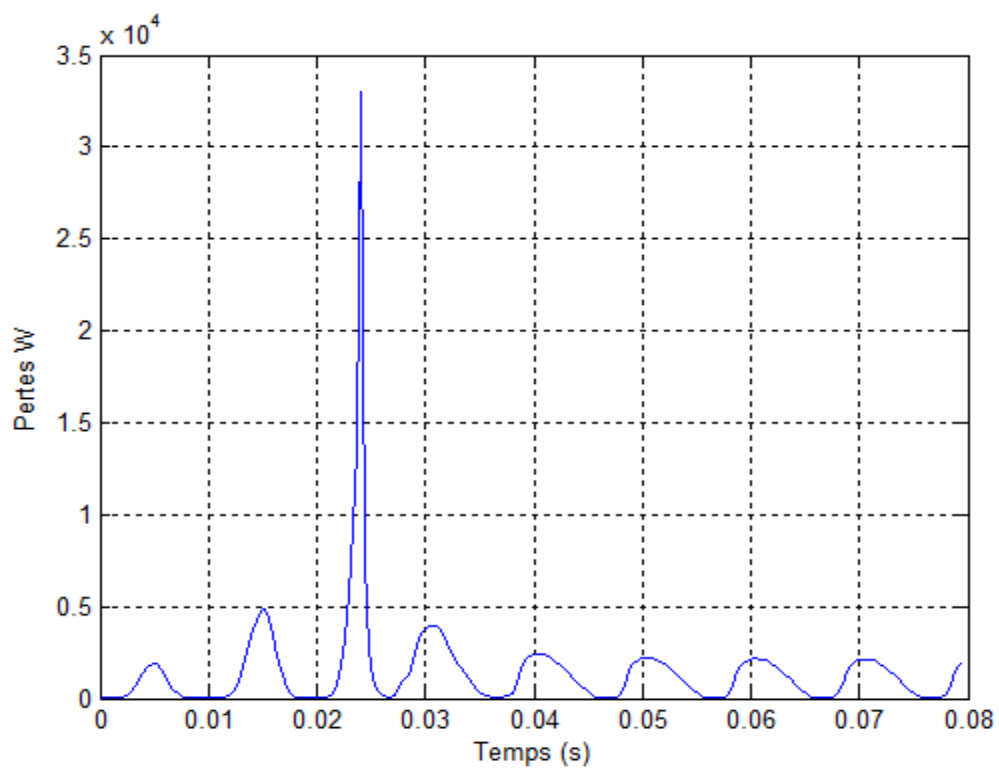


Figure IV.10: les pertes en fonction du temps

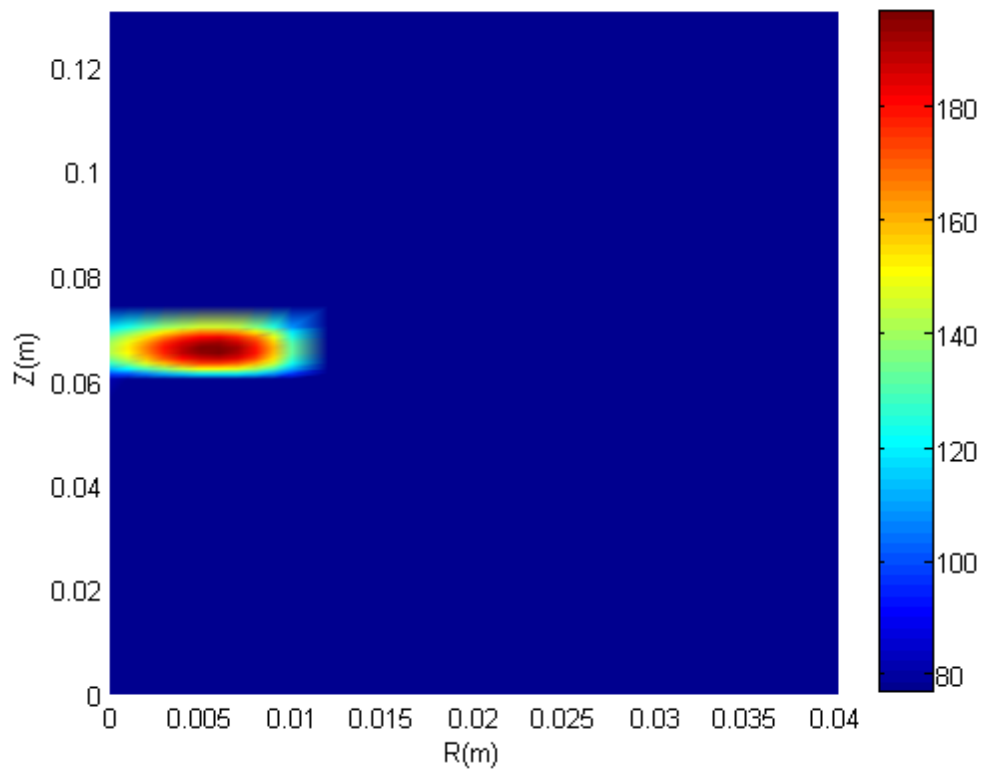


Figure IV.11: la distribution de la température.

A $t=0.08s$, Selon la figure IV.9, la pastille supraconductrice est dans un état normal c'est-à-dire le limiteur de courant intervient. La température maximale est presque de $194^{\circ}K$.

Après avoir présenté la répartition deux dimensionnelle spatiale de la température au sein de la pastille supraconductrice, nous avons présenté sur la figure IV.8 le maximum de la température au sein de la pastille supraconductrice en fonction du temps. Ceci est dans le but de déterminer l'instant de l'intervention du limiteur de courant (l'instant de transition d'un état supraconducteur vers un état normal). Cet instant est déterminé à partir de l'instant où la température dépasse celle la valeur de la température critique déterminé par la valeur de $95^{\circ}K$.

Et aussi, il est clair qu'avec l'augmentation de la valeur de la densité du courant J_c , la température au sein de la pastille supraconductrice augmente considérablement, ceci est dû principalement à l'augmentation des pertes. (figure IV.10)

IV.6 L'influence de la géométrie de la pastille supraconductrice sur le comportement résistif d'un limiteur du courant :

Dans le but de montrer l'influence de la géométrie sur le comportement magnétique et résistif d'un limiteur de courant durant le processus de la limitation du courant, nous avons calculé la variation temporelle des résistances des pastilles supraconductrices pour différentes géométries (Tableau IV.2).

Nom	Rayon Lr (mm)	Hauteur Lz (mm)
Pastille A	10	10
Pastille B	15	15
Pastille C	20	20
Pastille D	25	25

Tableau IV.2 : Caractéristiques géométriques des différentes pastilles étudiées

Les figures ci-dessous représentent la résistance et la valeur moyenne de la température pour les différentes géométries des pastilles supraconductrices et pour une densité de courant d'excitation $J_s = 3 \cdot 10^8 \text{ A/m}^2$ (dans notre travail c'est le courant de court-circuit).

Selon la Figure ci-dessus, on remarque que la résistance est nul de l'instant 0 jusque 0.015s pour les pastilles (B. C. D) et pour la pastille (A) de 0 s jusque 0.025s (après une période) dans ce cas les pastilles sont en état supraconducteur dans l'instant 0.015s.

A partir cette instant, la résistance augmente brusquement jusqu'à 0.05Ω pour les pastilles (B C D) et de 0.03Ω pour la pastille (A) a partir de 0.025s, ces instants sont nommées les instants de transition par ALLOUI L. et BENMEBAREK F., après ces instants les pastilles sont en état normal, la résistance elle ce augmente linéairement avec la température (modèle en puissance).

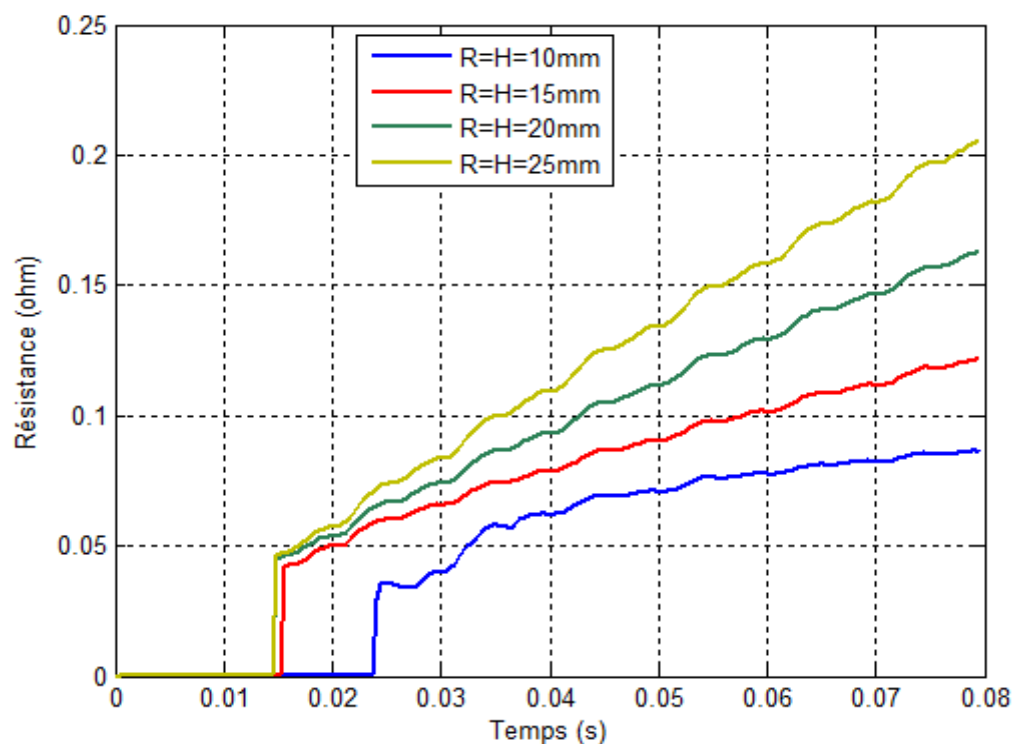


Figure IV.12. : La variation de la résistance en fonction de temps pour les différentes géométries des pastilles

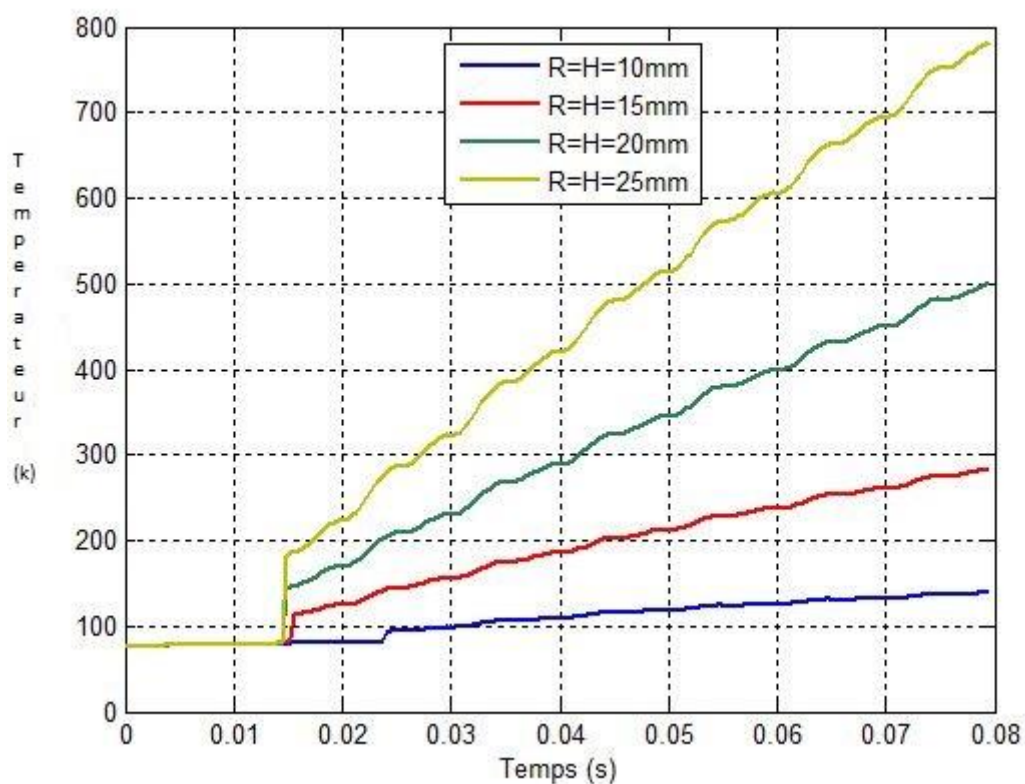


Figure IV.13. : La variation de les températures en fonction de temps a défèrent géométrie des pastilles en différent densité de courant

Selon la Figure de La variation de la valeur moyenne de la températures en fonction de temps pour différentes géométries des pastilles, on remarque lorsque la résistance est nul donc avant les instants de transition, la température est inférieur a la température critique a cause les valeurs faibles des pertes. et après les instants de transitions la température augmente au-dessous de la valeur critique $T_c=97K$.

Et aussi nous avons remarque que chaque géométrie caractériser par un instant de transition et la résistance augmente avec l'augmentation de la géométrie et de même pour la température pour un courant de court-circuit donné.

IV.7 CONCLUSION :

Dans ce chapitre, on a traité un dispositif contient une pastille supraconductrice de forme cylindrique appliqué pour la limitation du courant de court circuit caractériser par une seule composante suivant ϕ (\vec{e}_ϕ), dont l'objectif est de calculer les différents grandeurs électromagnétique et thermique couplé dans les matériaux supraconducteurs. Ceci est dans le but de déterminer les caractéristiques physiques d'une pastille supraconductrice qui doivent satisfaire le bon fonctionnement d'un limiteur de courant conçu à partir d'un matériau supraconducteur à haute température critique tel que la valeur de la densité de courant de court-circuit. Ce calcul a aussi permet de déterminé l'instant de l'intervention d'un limiteur de courant (instant de transition).

CONCLUSION GENERALE

Le but principal de ce mémoire de master est l'étude des phénomènes électromagnétique et thermique dans les matériaux supraconducteurs à haute température critique utilisés dans la limitation du courant de défaut dans un réseau électrique. La possibilité de simuler le comportement de ces matériaux est une clé essentielle pour le développement d'applications dans le domaine industriel, et la conception d'un limiteur du courant à base de supraconducteur à haute température.

Pour étudier les phénomènes magnétiques des matériaux supraconducteurs à des relations mathématiques on a utilisé les équations de maxwell qui constituent aujourd'hui la base de l'électromagnétisme. Aussi nous avons utilisé le mode de couplage alterné pour faire un couplage entre les phénomènes magnétiques et thermiques.

La méthode des volumes finis est utilisée pour résoudre les équations aux dérivées partielles caractéristiques aux phénomènes physiques à traité (magnétique et thermique).

Le modèle mathématico-numérique développé a été implémenté dans un code de calcul développé et implémenté sous l'environnement MATLAB.

A partir de la résolution du problème magnétique et thermique, le temps de transition d'un limiteur de courant est déterminé dans le cas d'un court-circuit.

La limitation de courant du court-circuit pour un limiteur du courant supraconducteur dépend de la valeur de courant de court-circuit et la géométrie.

En perspective, nous proposons la modélisation le comportement d'un réseau électrique contient un limiteur de courant a base d'un supraconducteur a haute température critique durant un court-circuit.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] **CHARLES-HENRI BONNARD**, ‘Transformateur Limiteur De Courant Supraconducteur à Haute Température Critique : Design, Construction Et Test’ mémoire

[2]. **Ben Mebarek Fethi** Modélisation des matériaux supraconducteurs, application à un limiteur du courant

[3] Il s'agit du $\text{HgBa}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_8$, une céramique. William D. Callister, Science et génie des matériaux, Modulo Éditeur, 2001, p.620 (traduit en français)

[4] **Mohamed MAHTALI** THESE De DOCTORAT D’ETAT En Physique Spécialité: Sciences des Matériaux Université MENTOURI – Constantine Etude et caractérisation de structures supraconductrices

[5] **Joseph DURON** Modélisation de Matériaux supraconducteurs -application à un limiteur de courant Joseph DURON THÈSE NO3469 (2006)

[6] **Khaled BEN ALIA**. ETUDE DES SYSTEMES DE GUIDAGE MAGNETIQUE A BASE DE SUPRACONDUCTEUR HTc

[7] **BELKHIRI Yamina** UNIVERSITE DE BATNA MEMOIRE DE MAGISTER (Modélisation des Phénomènes Electromagnétiques et Mécaniques Couplés par la Méthode des Volumes Finis (CVM))

[8] (2012_Charles-HenriBonnard]TRANSFORMATEUR LIMITEUR DE COURANT SUPRACONDUCTEUR À HAUTE TEMPÉRATURE CRITIQUE : DESIGN, CONSTRUCTION ET TEST

[9] http://fr.wikipedia.org/wiki/Limiteur_de_courant_de_d%C3%A9faut

[10] Les matériaux supraconducteurs Rapport d’Epistemologie Wiest-Million Nicolas Lemoine Julien Solt Edouard Lundi 22 Juillet 2002

[11] **MOHAMED RACHID MEKADECHE**, (Contribution à la modélisation numérique de torches à plasma d’induction) ,université de Nantes, 1993

[12] **ABDELLAH CHENTOUF** (Contribution à la modélisation électrique magnétique et thermique d’une application de plasma inductif haute fréquence) thèse de doctorat ,université de nantes ,1994

[13] **H. BECHA**, Modélisation des Phénomènes Electromagnétiques Couplés par la des Volumes Finis et de la Paramétrisation dans les Systèmes Amagnétiques de chauffage par Induction, thèse de Magister, Univ Biskra, Algérie, 2001

Résumé:

MODÉLISATION DES PHÉNOMÈNES MAGNÉTO-THERMIQUE DANS LES DISPOSITIFS DE LIMITEUR DE COURANT À BASE DE SUPRACONDUCTEUR À HAUTE TEMPÉRATURE CRITIQUE

Dans ce travail, on présente une contribution de la modélisation phénomènes électromagnétiques et thermique en deux dimensions dans les matériaux supraconducteurs à haute température critique appliquée pour limiter le courant de défaut, la méthode des volumes finis a été adoptée comme méthode de résolution des équations aux dérivées partielles caractérisées aux phénomènes physiques à traiter. Les différents résultats électromagnétiques et thermiques ont été largement présentés.

Mots clés: Modélisation tridimensionnelle, phénomènes magnétique et thermique, supraconducteur, haute température critique, courant de défaut, méthode des volumes finis.

ملخص:

نمذجة الظواهر المغناطيسية الحرارية في الأجهزة المخفضة من التيار التي تستند على المواد فائقة الناقلية ذات درجة الحرارة الحرجة عالية

في هذا العمل نقدم نمذجة ثنائية الأبعاد للظواهر الكهرومغناطيسية والحرارية في المواد الموصلات الفائقة الناقلية ذات درجة حرارة حرجة عالية مطبقة للحد من تيار الخطأ وقد اعتمدنا على طريقة الأحجام المنتهية كوسيلة لحل المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية الميزات لمعالجة الظواهر الفيزيائية. وقدمت مختلف النتائج الكهرومغناطيسية والحرارية.

الكلمات المفتاحية:

نمذجة، الظواهر المغناطيسية و الحرارية، الناقل الممتاز، تيار الخطأ، طريقة الأحجام المنتهية

Abstract:

Modeling of Magneto Thermal Phenomenal in Current Limiter Devices Has Base to Superconducting in High Critical Temperature

In This work we present two-dimensional modeling of the magneto thermal and Electromagnetic phenomena in current limiter devices based to superconducting materials by using MATLAB for display the simulation based in different equation and methods to find result of this modeling.

Key words: Modeling, magnetic and thermal phenomena, superconducting fault current, finite volume method.